Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Малышев, Сложность восстановления начальных знаков фильтрующих генераторов одного класса, *Матем. вопр. криптогр.*, 2015, том 6, выпуск 1, 109–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:06:43

УДК 519.142.1

Сложность восстановления начальных знаков фильтрующих генераторов одного класса

Ф. М. Малышев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Получено 22.IV.2014

Решается задача восстановления начальных знаков рекуррентной последовательности порядка m по значениям усложняющей выходной функции F . При естественном предположении о функции рекуррентной зависимости f и функции F эта задача решается с линейной по m трудоемкостью, при этом требуется линейное же по m число известных выходных знаков. Коэффициенты при m однозначно задаются мощностями алфавита выходных знаков, алфавита знаков рекуррентной последовательности и числами аргументов в функциях f и F .

Ключевые слова: рекуррентная последовательность, фильтрующий генератор, псевдослучайная последовательность

The complexity of initial state recovery for a class of filter generators

F. M. Malyshev

Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow

Abstract. A recovery problem for the initial state of the m -th order recurrent sequence from the output values of filter function F . Under natural conditions on the feedback function f and filter function F the complexity of initial state recovery from linear (in m) number of output values is shown to be linear in m . Coefficients of these linear functions are defined by the cardinalities of alphabet of output values, alphabet of input sequence elements and numbers of essential arguments of functions f and F .

Key words: recurrent sequence, filter generator, pseudo-random sequence

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2015, vol. 6, no. 1, pp. 109–116 (Russian)

В работе предлагается подход к решению задачи восстановления начальных знаков рекуррентных последовательностей порядка m по выходам с усложняющих функций. В условиях, когда числа аргументов у усложняющей функции и у функции рекуррентной зависимости заданы, а сами эти функции удовлетворяют естественному предположению, получены линейные по m верхние оценки трудоемкости и числа выходных знаков, необходимых для решения задачи.

Пусть X и Y – конечные алфавиты. Далее рассматриваются генераторы последовательностей $\{y_i \in Y, i \in \mathbb{Z}\}$, вычисляемых по формуле

$$y_i = F(x_{i+l_1}, \dots, x_{i+l_r}), \quad (1)$$

где $\{x_i \in X, i \in \mathbb{Z}\}$ – рекуррентная последовательность порядка m , удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$x_{i+m} = f(x_i, x_{i+k_1}, \dots, x_{i+k_s}), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

а $f: X^{s+1} \rightarrow X$ и $F: X^r \rightarrow Y$ – некоторые отображения. Обычно отображение $f(z_1, \dots, z_{s+1})$ является подстановочным по первой переменной z_1 при любой фиксации остальных s переменных. Тогда последовательность $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$ является рекуррентной и для обратного порядка элементов:

$$x_i = f^-(x_{i+k_1}, \dots, x_{i+k_s}, x_{i+m}), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad f^-: X^{s+1} \rightarrow X.$$

Номера $l_1, \dots, l_r$ в задании функции съема F (см. (1)) и номера $k_1, \dots, k_s$ в задании рекуррентного соотношения (2) считаем упорядоченными:

$$0 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_r \leq m, \quad (3)$$

$$0 < k_1 < k_2 < \dots < k_s < m. \quad (4)$$

Других условий на эти номера не накладывается.

Различные частные случаи таких генераторов псевдослучайных последовательностей представлены в монографии [1], где они называются фильтрующими генераторами.

Полученные в настоящей работе результаты основаны на соображениях работы [2] и относятся к ситуации, когда параметры $r \geq 1$ и $s \geq 1$ являются фиксированными, а порядок рекуррентной последовательности m может принимать любые целочисленные значения.

Требования на отображения f и F не столь явные. Для их формулировки потребуются множества

$$\Delta_t^{(s)} = \{(z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{Z}^s \mid z_1 \geq 0, \dots, z_s \geq 0, z_1 + \dots + z_s \leq t\} \subset \mathbb{Z}^s,$$

$$\Delta_t^{(s+1)} = \left\{ (z_0, z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{Z}^{s+1} \mid z_0 \geq 0, z_1 \geq 0, \dots, z_s \geq 0, z_0 + z_1 + \dots + z_s \leq t \right\} \subset \mathbb{Z}^{s+1},$$

$$t \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Равенство $\iota(z_1, \dots, z_s) = (0, z_1, \dots, z_s) \in \Delta_t^{(s+1)}$, где $(z_1, \dots, z_s) \in \Delta_t^{(s)}$, определяет естественное вложение $\iota: \Delta_t^{(s)} \rightarrow \Delta_t^{(s+1)}$. Индукцией по $s \geq 1$ убеждаемся, что

$$|\Delta_t^{(s)}| = \sum_{i=0}^t |\Delta_i^{(s-1)}| = \binom{s+t}{s}, \quad |\Delta_t^{(s+1)}| = \binom{s+t+1}{s+1}.$$

Требование на отображения f и F заключаются в том, что хотя бы при одном значении $t \geq 1$ система из $\binom{s+1+t}{s+1}$ уравнений

$$\left\{ F(\chi_u^{(1)}, \dots, \chi_u^{(r)}) = \eta_u, \quad u \in \Delta_t^{(s+1)}, \right. \quad (5)$$

при любых правых частях $\eta_u \in Y$, $u \in \Delta_t^{(s+1)}$, имеет не более одного решения

относительно $r \binom{s+t}{s}$ неизвестных $\chi_u^{(j)} \in X$, $j=1, \dots, r$, $u \in \iota(\Delta_t^{(s)})$, которые

в уравнения с $u \in \iota(\Delta_t^{(s)})$ входят явно, а в остальные – опосредованно. В этой системе при каждом $j=1, \dots, r$ остальные переменные $\chi_u^{(j)}$,

$$u \in \Delta_t^{(s+1)} \setminus \iota(\Delta_t^{(s)}) = (1, 0, \dots, 0) + \Delta_{t-1}^{(s+1)} = \left\{ (z_0 + 1, z_1, \dots, z_s) \mid (z_0, z_1, \dots, z_s) \in \Delta_{t-1}^{(s+1)} \right\},$$

выражаются через неизвестные $\chi_u^{(j)}$, $u \in \iota(\Delta_t^{(s)})$, с помощью соотношений типа (2), именно,

$$\chi_{u+e_0}^{(j)} = f(\chi_u^{(j)}, \chi_{u+e_1}^{(j)}, \dots, \chi_{u+e_s}^{(j)}), \quad u \in \Delta_{t-1}^{(s+1)}. \quad (6)$$

Здесь $e_i \in \mathbb{Z}^{s+1}$, $i=0, 1, \dots, s$, – вектор с единственной ненулевой координатой, равной 1, на i -м месте.

Равенства (6) вначале применяются для $u \in \iota(\Delta_{t-1}^{(s)})$. В результате через неизвестные $\chi_u^{(j)}$, $u \in \iota(\Delta_{t-1}^{(s)})$, будут выражены все $\chi_u^{(j)}$ с $u \in e_0 + \iota(\Delta_{t-1}^{(s)})$. После этого равенства (6) применяются для $u \in e_0 + \iota(\Delta_{t-2}^{(s)})$, что дает выражения через неизвестные $\chi_u^{(j)}$, $u \in \iota(\Delta_{t-2}^{(s)})$, переменных $\chi_u^{(j)}$ с $u \in 2e_0 + \iota(\Delta_{t-2}^{(s)})$. В результате продолжения этих вычислений переменные $\chi_u^{(j)}$ для $u \in \Delta_t^{(s+1)} \setminus \iota(\Delta_t^{(s)}) = \bigcup_{p=1}^t (pe_0 + \iota(\Delta_{t-p}^{(s)}))$ будут выражены через неизвестные $\chi_u^{(j)}$, $u \in \iota(\Delta_t^{(s)})$.

Значение t в системе (5) выбирается таким, что

$$\log_{|X|} |Y| \cdot \binom{s+1+t}{s+1} \geq C \cdot r \binom{s+t}{s}, \quad (7)$$

где $C \geq 1$ – заранее задаваемая константа.

Неравенство (7), равносильное неравенству $\log_{|X|} |Y| \cdot \left(1 + \frac{t}{s+1}\right) \geq C \cdot r$, является результатом логарифмирования по основанию $|X|$ неравенства $|Y|^{\binom{s+1+t}{s+1}} \geq \left(|X|^{\binom{s+t}{s}}\right)^C$, в котором слева стоит число возможных значений набора правых частей, а справа – число возможных значений набора неизвестных, возведенное в степень C .

Неравенство (7) означает (так его можно трактовать), что число уравнений в системе (5) как бы в C раз больше числа неизвестных. Правда, когда неизвестные и правые части системы берутся из различных алфавитов (у нас X и Y), то о каком-либо сравнении числа уравнений и числа неизвестных говорить не приходится. Если же для некоторого алфавита Z имеем $X = Z^p$, $Y = Z^q$, $p, q \in \mathbb{N}$, то при переходе к алфавиту Z число неизвестных увеличится в p раз, а число уравнений – в q раз, и тогда уже можно говорить о соотношении между числом уравнений и числом неизвестных. Можно и не прибегать к алфавиту Z , достаточно для числа уравнений ввести поправочный множитель $\frac{q}{p} = \log_{|X|} |Y|$. В общем случае по опреде-

лению считаем, что в одном уравнении в (5) содержится $\log_{|X|} |Y|$ так называемых условных уравнений. Если $Y = X^q$, то одно уравнение в (5) содержит q условных уравнений. Неравенство (7) говорит о том, что число условных уравнений в (5) в C раз больше числа неизвестных. Чем больше константа C в неравенстве (7), тем правдоподобней предположение о том, что почти для всех пар отображений f и F система (5) имеет не более одного решения при любых правых частях.

Определение 1. Отображения f и F назовем условно независимыми уровня $C \geq 1$, если при выполнении неравенства (7) система уравнений (5) при любых правых частях имеет не более одного решения.

Чем больше константа C в определении 1, тем слабее требование условной независимости, накладываемое на отображения f и F .

Общий недостаток рассматриваемых (как и многих других) генераторов псевдослучайных последовательностей состоит в том, что все знаки

последовательности $\{y_i, i \in \mathbb{Z}\}$ выражаются через конечное число знаков $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$. Как правило, значение m существенно меньше числа реально используемых знаков $\{y_i, i \in I \subset \mathbb{Z}\}$: $m \ll |I|$. Поэтому знаки $y_i, i \in I$, зависимы.

При конструировании конкретных генераторов одна из задач состоит в том, чтобы сделать эту зависимость по возможности менее явной, в частности, затруднить ее использование для определения исходных знаков $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$. Почти все известные в настоящее время методы восстановления $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ по заданным знакам $\{y_i, i \in I \subset \mathbb{Z}\}$ при $|I| = O(m)$ имеют экспоненциальную по $m \rightarrow \infty$ оценку трудоемкости.

Приводимая ниже теорема говорит о том, что асимптотически при $m \rightarrow \infty$ и ограниченных r и s представленные выше в самом общем виде фильтрующие генераторы не обеспечивают столь большую сложность задачи восстановления начальных знаков.

Теорема 1. Пусть отображения f и F являются условно независимыми уровня $C \geq 1$, пусть $\tau = \left\lceil \left(\frac{Cr}{\log_{|X|} |Y|} - 1 \right) (s+1) \right\rceil$. Тогда по $(\tau+1)m$

подряд идущим известным знакам выходной последовательности $\{y_i, i \in \mathbb{Z}\}$ можно восстановить m подряд идущих знаков исходной рекуррентной последовательности $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$ с трудоемкостью не выше $\left(r+1 + \frac{s+1}{\tau} \right) \cdot \binom{s+\tau}{s+1} \cdot |X|^{\binom{s+\tau}{s}} \cdot m$.

За единицу трудоемкости в теореме принята трудоемкость однократного вычисления значений отображений f и F . В доказательстве конструктивно описан способ восстановления m подряд идущих знаков последовательности $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$, однако из-за столь внушительного коэффициента при m в оценке трудоемкости он представляет только теоретический интерес.

Доказательство теоремы 1. Пусть имеется последовательность $\{y_i, i \in \mathbb{Z}\}$, полученная с помощью равенств (1) из последовательности $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (2). Покажем, как по известным знакам $y_1, \dots, y_{(\tau+1)m}$ можно однозначно восстанавливать $x_{v+l_i}, v=1, \dots, m$.

При каждом $v=1, \dots, m$ будем рассматривать значения $\chi_u^{(j)} = x_{v+l_j+\varphi(u)}$, $j=1, \dots, r$, $u \in \Delta_\tau^{(s+1)}$, где $\varphi: \mathbb{Z}^{s+1} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\varphi(z_0, z_1, \dots, z_s) = z_0 m + z_1 k_1 + \dots + z_s k_s$.

При таком задании отображения φ из соотношений (2) следуют соотношения (6), а для правых частей в (5) имеем: $\eta_u = y_{v+\varphi(u)}$, $u \in \Delta_\tau^{(s+1)}$.

По очереди для каждого $v=1, \dots, m$ будем рассматривать множество $D_v = \bigcup_{j=1}^r \left(v + l_j + \varphi \left(\iota \left(\Delta_\tau^{(s)} \right) \right) \right)$, $|D_v| \leq r |\Delta_\tau^{(s)}| = r \binom{s+\tau}{s}$. При каждом v перебираем все наборы $(\tilde{x}_p, p \in D_v) \in X^{|D_v|}$. Для каждого конкретного значения компонент $\tilde{x}_p \in X, p \in D_v$ применением рекуррентного соотношения (2) вычисляем значения $\tilde{x}_q$, $q \in \bigcup_{j=1}^r \left(v + l_j + \varphi \left(\Delta_\tau^{(s+1)} \right) \right)$. После этого по формуле (1) вычисляем значения $\tilde{y}_p$, $p \in v + \varphi \left(\Delta_\tau^{(s+1)} \right)$, и сравниваем их с истинными значениями y_p .

Параметр τ в формулировке теоремы выбран так, чтобы при $t = \tau$ выполнялось неравенство (7), которое равносильно неравенству $t \geq \left(\frac{Cr}{\log_{|X|} |Y|} - 1 \right) (s+1)$. Если скоро отображения f и F условно независимы уровня C , то только для одного вектора $(\tilde{x}_p, p \in D_v) \in X^{|D_v|}$ (для истинного) произойдет совпадение $\tilde{y}_q$ с y_q для всех $q \in v + \varphi \left(\Delta_\tau^{(s+1)} \right)$. В результате будет однозначно определено значение x_{v+l_i} .

Поясним это. Полагая $\chi_u^{(j)} = \tilde{x}_{v+l_j+\varphi(u)}$, $j=1, \dots, r$, $u \in \Delta_\tau^{(s+1)}$, получаем решение системы (5) с правыми частями $\eta_u = \tilde{y}_{v+\varphi(u)} = y_{v+\varphi(u)}$, $u \in \Delta_\tau^{(s+1)}$. Решение же может быть только одно в силу условной независимости отображений f и F уровня C .

При каждом $v=1, \dots, m$ для отбраковки $\tilde{x}_{v+l_i}$ используются y_p , $v \leq p \leq v + \tau m$, поэтому для всех $v=1, \dots, m$ потребуются только y_q , $1 \leq q \leq (\tau+1)m$.

Указанная в формулировке теоремы оценка трудоемкости следует из того, что соотношение (2) при каждом $v=1, \dots, m$ применяется не более $r \binom{s+\tau}{s+1} |X|^{\binom{s+\tau}{s}}$ раз, а соотношение (1) — не более $\binom{s+\tau+1}{s+1} |X|^{\binom{s+\tau}{s}}$ раз.

Теорема 1 доказана.

За счет увеличения параметра τ требования на отображения f и F в формулировке теоремы 1 можно ослабить, считая их условно независи-

мыми уровня (C, α) , $C \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1/s$, в том смысле, что если для числа «уравнений» $N = \log_{|X|} |Y| \cdot \binom{s+1+t}{s+1}$ в системе (5) с $n = r \binom{s+t}{s}$ неизвестными в этой системе справедливо неравенство $N \geq Cn^{1+\alpha}$, то имеем не более одного решения. Тогда вместо (7) нужно использовать следующее неравенство:

$$\log_{|X|} |Y| \cdot \binom{s+1+t}{s+1} \geq C \cdot \left[r \binom{s+t}{s} \right]^{1+\alpha}. \quad (8)$$

Определение 2. Отображения f и F назовем условно независимыми уровня (C, α) , $C \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1/s$, если при выполнении неравенства (8) система уравнений (5) при любых правых частях имеет не более одного решения.

Чем больше значения C , α в определении 2, тем слабее требование условной независимости, накладываемое на отображения f и F .

Теорема 2. Пусть отображения f и F являются условно независимыми уровня (C, α) , $C \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1/s$, пусть

$$\tau = \max \left(s+1, \left\lceil \left(\left(\frac{Cr^{1+\alpha}}{\log_{|X|} |Y|} \cdot \left(\frac{2^s (s+1)^s}{s!} \right)^\alpha \right)^{1/(1-\alpha s)} - 1 \right) (s+1) \right\rceil \right). \quad \text{Тогда по}$$

$(\tau+1)t$ подряд идущим известным знакам последовательности $\{y_i, i \in \mathbb{Z}\}$ знаки $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ могут быть восстановлены с трудоемкостью не выше

$$\left(r+1 + \frac{s+1}{\tau} \right) \cdot \binom{s+\tau}{s+1} \cdot |X|^{r \binom{s+\tau}{s}} \cdot m.$$

Доказательство. Пусть $t > s$. Неравенство (8) переписывается в виде

$$\left(1 + \frac{t}{s+1} \right) \log_{|X|} |Y| \geq Cr^{1+\alpha} \binom{s+t}{s}^\alpha. \quad \text{Так как } t > s, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \binom{s+t}{s} &= \prod_{k=1}^s \left(1 + \frac{t}{k} \right) = \left(1 + \frac{t}{s+1} \right)^s \prod_{k=1}^s \frac{1 + \frac{t}{k}}{1 + \frac{t}{s+1}} = \left(1 + \frac{t}{s+1} \right)^s \prod_{k=1}^s \frac{\frac{1}{t} + \frac{1}{k}}{\frac{1}{t} + \frac{1}{s+1}} \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{t}{s+1} \right)^s (s+1)^s \prod_{k=1}^s \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{t} \right) \leq \left(1 + \frac{t}{s+1} \right)^s (s+1)^s \frac{2^s}{s!}. \end{aligned}$$

Поэтому (8) выполняется, если $\left(1 + \frac{t}{s+1}\right)^{1-\alpha s} \log_{|X|} |Y| \geq Cr^{1+\alpha} \left(\frac{2^s (s+1)^s}{s!}\right)^\alpha$.

Для доказательства теоремы 2 остается дословно повторить рассуждения из доказательства теоремы 1.

Дальнейшему ослаблению требования на отображения f и F в теореме 2 служит следующее определение.

Определение 3. Отображения f и F назовем условно независимыми, если найдется такое $\tau \in \mathbb{N}$, что для $t = \tau$ система (5) при любых правых частях имеет не более одного решения.

Замечание 1. Если отображения f и F являются условно независимыми, то, как следует из доказательства теоремы 1, по $(\tau+1)m$ подряд идущим известным знакам последовательности $\{y_i, i \in \mathbb{Z}\}$ знаки $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ могут быть восстановлены с трудоемкостью не выше $\left(r+1 + \frac{s+1}{\tau}\right) \cdot \binom{s+\tau}{s+1} \cdot |X|^{r \binom{s+\tau}{s}} \cdot m$. В данной формулировке аналога теорем 1 и 2 нет каких-либо ориентиров на величину τ , хоть она и определяется однозначно по значениям r, s и отображениям f, F .

Автор признателен А. М. Зубкову за новое доказательство теоремы 2, которое привело к принципиальному изменению ее формулировки.

Список литературы

1. Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке СИ. – М.: ТРИУМФ, 2003.
2. Малышев Ф. М. Порождающие наборы элементов рекуррентных последовательностей // Труды по дискретной математике. – 2008. – Т. 11. № 2. – С. 86–111.