Общероссийский математический портал

О. В. Денисов, Об алгоритме поиска существенных аргументов случайных булевых функций, *Матем. вопр. криптогр.*, 2015, том 6, выпуск 3, 19–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:27:38

УДК: 519.719.2+519.233.2

Об алгоритме поиска существенных аргументов случайных булевых функций

О. В. Денисов

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 30.V.2014

Ранее автором был предложен алгоритм поиска существенных аргументов двоичных вектор-функций по N случайным векторам аргументов, имеющих равномерное распределение, и искаженным значениям функций. В настоящей статье изучается вероятность выявления первым этапом этого алгоритма всех существенных аргументов булевой функции или их части в зависимости от N , если функция выбирается случайно из множества симметрических либо пороговых функций. Приводится обзор нескольких работ по этой теме.

Ключевые слова: поиск существенных аргументов, случайная булева функция, оценки спектра функции

On the algorithm of detecting the essential arguments of random Boolean function

O. V. Denisov

LLC «Sertification Research Center», Moscow

Abstract. Earlier author had presented the algorithm for detection of essential arguments of the binary vector-function given N random uniformly distributed arguments and distorted values of the function. The dependence on N of the probability that all (or almost all) essential arguments of Boolean function f are detected on the first stage of the algorithm is studied. Cases of random symmetric and random threshold functions f are considered. A review of some relevant papers is given.

Key words: essential arguments detection, random Boolean function, function spectrum estimation

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 19–32 (Russian).

© 2015 О. В. Денисов

Введение

Изложим постановку задачи, рассматривавшейся в [4], ограничив ее случаем булевой функции. В ряде задач криптографии и теории информации возникает схема, представленная на рис. 1, где для наблюдения доступны вход $\vec{x}(t)$ и выход $y(t)$ схемы, $1 \leq t \leq N$. Требуется определить множество $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ номеров существенных входов схемы.

Рис. 1. Схема двоичного преобразования с искажением

Эта схема реализует булеву функцию, зависящую формально от L переменных, из которых не более n являются существенными. Поэтому поставленная задача может рассматриваться как задача поиска существенных аргументов булевой функции.

Пусть $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$ — группа вычетов по модулю 2, $\mathbb{Z}_2^L$ — множество двоичных векторов размерности L (L -я декартова степень множества $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$), $U(\mathbb{Z}_2^L)$ — равномерное распределение на этом множестве. Входные векторы схемы (аргументы) являются случайными, независимыми и имеющими равномерное распределение:

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_L(t)) \sim U(\mathbb{Z}_2^L).$$

Булева функция $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ неизвестна, но известно число ее аргументов $n = |\Theta| < L$. Случайные двоичные искажения $\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(N)$ одинаково распределены, независимы и не зависят от всех векторов аргументов. Преобладание нуля в их распределении обозначаем через

$$\delta := \mathbf{E}(-1)^{\varepsilon(t)} \in [-1, 1], \quad \delta \neq 0, \quad t = 1, \dots, N.$$

Искажения аддитивно накладываются на значения функции, и на выходе наблюдаются случайные величины

$$y(t) = f(\vec{x}_\Theta(t)) \oplus \varepsilon(t), \quad 1 \leq t \leq N.$$

Здесь и далее для произвольного вектора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_M)$ и непустых $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, M\}$ обозначаем через

$$\vec{x}_I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$$

подвектор вектора $\vec{x}$, состоящий из координат с номерами из I .

Условия, перечисленные в последнем абзаце, далее называем условиями **(Ф)** и всюду считаем их выполненными. Они задают статистическую параметрическую модель, в которой неизвестны параметры Θ , f и ненулевое значение δ .

Опишем первый этап работы алгоритма, предложенного в [4]. Обозначим через

$$\vec{x}\vec{f} = (x_1, \dots, x_n, f(\vec{x}))$$

случайный вектор размерности $n+1$, составленный из аргументов и значения функции, при равномерном распределении аргумента $\vec{x} \sim U(\mathbb{Z}_2^n)$. Рассмотрим значения характеристической функции [1] распределения вектора $\vec{x}\vec{f}$ на двоичных векторах с единственной ненулевой координатой:

$$\varphi_{\vec{x}\vec{f}}\{k\} = \mathbf{E}(-1)^{x_k + f(\vec{x})} = 2^{-n} \sum_{\vec{a} \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{a_k + f(\vec{a})}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1)$$

Эти величины являются также коэффициентами в разложении Фурье псевдобулевой функции $(-1)^{f(\vec{x})}$, т. е. частью спектра функции f .

Спектральные статистики из [4], принимающие здесь вид

$$S_N(i) := \sum_{1 \leq t \leq N} (-1)^{x_i(t) + y(t)}, \quad 1 \leq i \leq L,$$

являются суммами одинаково распределенных независимых случайных величин. При $i \notin \Theta$ среднее значение $\mathbf{E}S_N(i)$ равно 0 (а дисперсия равна N). Поэтому на первом этапе принимается решение о включении i -го входа в статистическую оценку $\Theta^*(1)$ для Θ , если абсолютная величина статистики не меньше некоторой границы:

$$\Theta^*(1) = \left\{ i \in \{1, \dots, L\} : |S_N(i)| \geq B_1 \sqrt{N} \right\}.$$

Далее везде полагаем для любого заданного $\alpha \in (0, 1)$

$$B_1 = B_1(n, L, \alpha, N) := \sqrt{(2 + \gamma) \ln \frac{4(L - n)}{\alpha}},$$

где $\gamma^2 := \frac{1}{N} \max_{0 \leq k \leq n} \ln \left\{ \binom{n}{k} 2^{k+2} \frac{L-n}{\alpha} \right\}$. Из [4, теорема 1] следует, что если $\gamma \leq 1/4$, то при таком выборе границы $\Theta^*(1)$ не содержит номеров несущественных аргументов с вероятностью не меньше $1 - \alpha$ для любого заданного $0 < \alpha < 1$.

С другой стороны, для любого $\theta_k \in \Theta$

$$\mathbf{E}S_N(\theta_k) = N\delta\varphi_{x\vec{f}}\{k\}, \quad \mathbf{D}S_N(\theta_k) = N(1 - \delta^2\varphi_{x\vec{f}}^2\{k\}). \quad (2)$$

Поэтому чем больше значение $|\delta\varphi_{x\vec{f}}\{k\}|$, тем меньше материала требуется для того, чтобы i -й вход попал в $\Theta^*(1)$ с вероятностью, не меньшей заданной величины.

При дальнейших расчетах будем рассматривать схему серий, в которой вероятностная схема случайного выбора функции $\vec{f}$ и параметры δ , L , α , N зависят от n и $n \rightarrow \infty$. При этом предполагаем выполненными условия

$$\alpha \rightarrow 0, \quad \frac{N}{n} \rightarrow \infty, \quad \frac{N}{\ln \frac{L-n}{\alpha}} \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Из двух последних условий в (3) и [4, формула (10)] следует, что $\gamma \rightarrow 0$, и поэтому $\gamma \leq 1/4$,

$$\mathbf{P}\{\Theta^*(1) \subset \Theta\} \geq 1 - \alpha \quad (4)$$

для всех достаточно больших n . При $\gamma \rightarrow 0$ имеем также

$$B_1^2 \sim 2 \ln \frac{4(L-n)}{\alpha}. \quad (5)$$

1. Работа алгоритма при случайном выборе симметрической функции

В [5] рассматривалась p -модель случайного выбора симметрической булевой функции $\vec{f}$, при которой ее значения $f_0, \dots, f_n$ на векторах веса $0, \dots, n$ выбираются независимо по схеме Бернулли с фиксированной вероятностью единицы $p \in (0, 1)$. В частности, $\frac{1}{2}$ -модель задает равномерное распределение на множестве всех симметрических булевых функций от n переменных.

Теорема 1. Пусть при условиях Φ и (3) симметрическая функция $\vec{f}$ выбирается случайно по p -модели. Тогда:

1. Если $B_1 > \sqrt{b \ln n}$ для некоторой константы $b > 2$ и

$$N/N_{\text{sym}}^{(1)} \rightarrow 0, \text{ где } N_{\text{sym}}^{(1)} := \frac{(B_1 - \sqrt{b \ln n})^2 \sqrt{\pi n^3}}{\delta^2 6p(1-p)},$$

то $\mathbf{P}\{\Theta^*(1) = \emptyset\} \rightarrow 1$.

2. Если для некоторой константы $b > 2$

$$N/N_{\text{sym}}^{(2)} \rightarrow \infty, \text{ где } N_{\text{sym}}^{(2)} := \frac{(B_1 + \sqrt{b \ln n})^2 \sqrt{\pi n^3}}{\delta^2 6p(1-p)},$$

то $\mathbf{P}\{\Theta^*(1) = \Theta\} \rightarrow 1$.

Доказательство. Из теоремы 1 [5] следует, что распределение случайной величины $w_1(f) := \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}_2^n} f(\vec{x})(-1)^{x_1}$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически нормально:

$$\frac{w_1(f)}{\sqrt{p(1-p)\sigma_1^2(n)}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

где $\sigma_1^2(n) \sim 2^{2n} \frac{3}{2\sqrt{\pi n^3}}$ согласно формуле (25) [5].

Так как $f(\vec{x}) = \frac{1 - (-1)^{f(\vec{x})}}{2}$, то $w_1(f) = -2^{n-1}\varphi$ (для краткости используем обозначение $\varphi = \varphi_{\vec{x}\vec{f}}\{1\}$). Тогда

$$\frac{w_1^2(f)}{p(1-p)\sigma_1^2(n)} \sim \frac{2^{2n}\varphi^2 2\sqrt{\pi n^3}}{4p(1-p)2^{2n}3} = \frac{\varphi^2}{a(n)},$$

где $a(n) := 6p(1-p)/\sqrt{\pi n^3}$. Отсюда с учетом теоремы непрерывности [2, теорема 4а, с. 124] следует, что распределение последовательности случайных величин $\varphi^2/a(n)$ сходится к распределению хи-квадрат с одной степенью свободы. Тогда для любой числовой последовательности $0 < \varkappa(n) \rightarrow +\infty$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{\varkappa(n)} \leq \frac{\varphi^2}{a(n)} \leq \varkappa(n)\right\} \rightarrow 1. \quad (6)$$

1. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $\varkappa(n) := N_{\text{sym}}^{(1)}/N \rightarrow \infty$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\Theta^* = \emptyset\} &= \mathbf{P}\left\{\Theta^* = \emptyset, \frac{\varphi^2}{a(n)} \leq \varkappa(n)\right\} + \mathbf{P}\left\{\Theta^* = \emptyset, \frac{\varphi^2}{a(n)} > \varkappa(n)\right\} \geq \\ &\geq \mathbf{P}\left\{\frac{\varphi^2}{a(n)} \leq \varkappa(n)\right\} \mathbf{P}\left\{\Theta^* = \emptyset \mid \frac{\varphi^2}{a(n)} \leq \varkappa(n)\right\}. \end{aligned}$$

Согласно (6) в последнем произведении первая вероятность стремится к 1, и достаточно доказать, что вторая вероятность тоже стремится к 1. Для этого воспользуемся теоремой 2 [4]. Ее условия **ВФ** и (13) соответствуют нашим условиям **Ф** и (3). Проверим, что N удовлетворяет условиям п. 1 этой теоремы: $N \leq N_1 = \frac{(B_1 - \sqrt{b \ln n})^2}{\Psi_{\max}^2}$, где

$$\Psi_{\max}^2 = \max_{1 \leq k \leq n} \varphi_{x\vec{f}}^2\{k\} \delta^2 = \varphi^2 \delta^2$$

с учетом первого равенства в (2) и симметричности функции f .

Действительно, в силу неравенства $\frac{\varphi^2}{a(n)} \leq \varkappa(n)$

$$N = \frac{N_{\text{sym}}^{(1)}}{\varkappa(n)} = \frac{(B_1 - \sqrt{b \ln n})^2}{\delta^2 a(n)} \frac{1}{\varkappa(n)} \leq \frac{(B_1 - \sqrt{b \ln n})^2}{\delta^2 a(n)} \frac{a(n)}{\varphi^2} = N_1.$$

Тогда $\mathbf{P}\{\Theta^*(1) = \emptyset\} \rightarrow 1$ согласно п. 1 теоремы 2 [4]. Первое утверждение теоремы доказано.

2. Аналогично докажем второе утверждение теоремы. Пусть $\varkappa(n) = N/N_{\text{sym}}^{(2)} \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\Theta^* = \Theta\} \geq \mathbf{P}\left\{\frac{\varphi^2}{a(n)} \geq \frac{1}{\varkappa(n)}\right\} \mathbf{P}\left\{\Theta^* = \Theta \mid \frac{\varphi^2}{a(n)} \geq \frac{1}{\varkappa(n)}\right\}.$$

Здесь также с учетом (6) достаточно доказать, что последняя вероятность стремится к 1. Для этого проверяем, что N удовлетворяет условиям п. 2 теоремы 2 [4]:

$$N \geq N_2 = \frac{(B_1 + \sqrt{b \ln n})^2}{\Psi_{\min}^2}, \text{ где } \Psi_{\min}^2 = \min_{1 \leq k \leq n} \varphi_{x\vec{f}}^2\{k\} \delta^2 = \varphi^2 \delta^2.$$

Оно выполнено, поскольку

$$N = N_{\text{sym}}^{(2)} \varkappa(n) \geq \frac{(B_1 + \sqrt{b \ln n})^2}{\delta^2 a(n)} \frac{a(n)}{\varphi^2} = N_2.$$

Тогда $\mathbf{P}\{\Theta^*(1) = \Theta\} \rightarrow 1$ согласно п. 2 теоремы 2 [4]. Теорема 1 доказана. $\square$

Определим пороговое значение N , достаточное для успешной работы алгоритма, по аналогии с классическим в вероятностной комбинаторике подходом (см. [10]). Функцию $N_{\text{rou}}(n)$ назовем *грубым (rough) порогом объема материала* для события $A = \{\Theta^* = \Theta\}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } N(n)/N_{\text{rou}}(n) \rightarrow \infty, \\ 0, & \text{если } N(n)/N_{\text{rou}}(n) \rightarrow 0. \end{cases} \quad (7)$$

Функция $N_{\text{rou}}(n)$ определена не однозначно; в частности, любая функция, полученная из нее умножением на функцию, стремящуюся к ненулевой константе, также является грубым порогом.

При выводе формулы для грубого порога используется следующее условие [4, (14)]:

$$\frac{\ln \frac{L-n}{\alpha}}{\ln n} \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Оно означает, что асимптотически величины $N_{\text{sym}}^{(1)}$ и $N_{\text{sym}}^{(2)}$ эквивалентны.

Следствие 1. Если при условиях теоремы 1 дополнительно выполнено условие (8), то функция

$$N_{\text{sym}}(n) := \frac{B_1^2 \sqrt{\pi n^3}}{\delta^2 6p(1-p)} \sim \frac{\sqrt{\pi n^3}}{3\delta^2 p(1-p)} \ln \frac{4(L-n)}{\alpha}$$

является грубым порогом объема материала в смысле определения (7).

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1 и того, что $N_{\text{sym}}^{(1)}$ и $N_{\text{sym}}^{(2)}$ эквивалентны величине $N_{\text{sym}}(n)$. Асимптотическая формула для $N_{\text{sym}}(n)$ следует из (5). $\square$

Замечания. 1. Полученная функция $N_{\text{sym}}(n)$ на величину порядка $n^{1/2}$ больше порога N_{maj} (см. ниже формулу (12)), рассчитанного в [4] для случая, когда f — мажоритарная функция, т. е. симметрическая пороговая функция, преобладание распределения значений которой близко к нулю.

2. В [4] пороги объема материала рассчитывались для случая булевых функций f с одинаковыми и неслучайными значениями модулей спектральных коэффициентов $\varphi_{x\vec{f}}\{i\}$, $1 \leq i \leq n$. Так как вероятности событий $\left\{|S_N(i)| \geq B_1\sqrt{N}\right\}$ зависят лишь от этих параметров функции f , то распределение случайного множества $\Theta^*(1)$ и вероятность события A , т. е. успешного окончания алгоритма на первом этапе, одинаковы для всех таких функций.

3. Если функция выбирается из класса функций, у которых наборы модулей таких спектральных коэффициентов различны, то вероятности $\mathbf{P}(A)$ разные для разных функций. Чтобы по-прежнему характеризовать алгоритм порогом объема материала, можно выбирать f из класса случайно. В этом случае вероятностная схема становится двухэтапной и строится на прямом произведении вероятностных пространств: сначала выбирается f , а затем независимо от нее — входные векторы и искажения. Тогда распределение $\Theta^*(1)$ оказывается вероятностной смесью распределений, соответствующих всем функциям из класса. Это усложняет поиск порога объема в смысле [4], и здесь мы ограничились расчетом грубого порога объема (7).

4. Отметим, что вероятность успешной работы алгоритма связана не только со случайным выбором векторов аргументов, но и со случайным выбором функции f . Поэтому при условиях п. 2 теоремы 1 существуют симметрические функции, для которых результатом алгоритма является $\Theta^*(1) \neq \Theta$, но суммарная мера таких функций стремится к нулю.

2. Работа алгоритма при случайном равновероятном выборе пороговой функции

Напомним, что булева функция f называется *пороговой* (threshold), если для нее справедливо следующее действительноезначное представление: для некоторых $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{I}\{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq b\}, \quad x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}.$$

Получим нижнюю оценку для числа существенных входов, которые будут найдены на первом этапе алгоритма, при случайной пороговой функции f . Чтобы упростить запись формул, будем использовать обозначение $\exp_2 x := 2^x$.

Теорема 2. Пусть при условиях **Ф** функция f выбирается случайно равновероятно из множества всех пороговых функций от n переменных,

$$\alpha \rightarrow 0, \quad \frac{\ln \frac{L-n}{\alpha}}{N} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (9)$$

и для некоторой константы $b > 2$ при достаточно больших n выполнено условие

$$N \geq N_{\text{thr}}(n) := \frac{(B_1 + \sqrt{b \ln n})^2}{4\delta^2} \exp_2 \left(\sqrt{32n(\log_2 n + \ln \ln n)} \right).$$

Тогда $\mathbf{P} \{ \Theta^*(1) \subset \Theta, |\Theta^*(1)| \geq n - \sqrt{2n(\log_2 n + \ln \ln n)} \} \rightarrow 1$.

Если при этом

$$\log_2 \ln \frac{L-n}{\alpha} + \log_2 |\delta| = o(\sqrt{n \log_2 n}), \quad (10)$$

то $\log_2 N_{\text{thr}}(n) \sim \sqrt{32n \log_2 n}$.

Доказательство. 1. Формула (18) статьи [9] означает, что при $n \rightarrow \infty$ для произвольной последовательности $0 < \varepsilon(n) < 1$, $\varepsilon(n) \log_2 n \rightarrow \infty$, почти все пороговые функции от n переменных имеют не менее

$$r(n) := n - 2\sqrt{n(2 + \varepsilon(n)) \log_2 n}$$

коэффициентов Чоу

$$\Delta_i := \sum_{\vec{x}: f(\vec{x})=1} (-1)^{x_i+1} = \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{x_i+1} \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{f(\vec{x})+1} \right) = 2^{n-1} \varphi_{\vec{x}_i} \{i\},$$

абсолютная величина которых не меньше $2^{r(n)}$, $1 \leq i \leq n$.

Положим $\varkappa(n) := \ln \ln n$, тогда последовательность $\varepsilon(n) := \frac{2\varkappa(n)}{\log_2 n}$ удовлетворяет вышеприведенным условиям. Пусть также

$$\varphi(n) := 2 \exp_2 \left(-2\sqrt{2n(\log_2 n + \varkappa(n))} \right),$$

$$\begin{aligned} I(f, \varphi) &:= \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : |\varphi_{\vec{x}_i} \{i\}| \geq \varphi(n) \right\} = \\ &= \left\{ i : |\Delta_i| \geq \exp_2 \left(n - 2\sqrt{2n(\log_2 n + \varkappa(n))} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$F(n, \varphi)$ — множество пороговых функций от n переменных, для которых $|I(f, \varphi)| \geq r(n)$.

Из равенства $r(n) = n - 2\sqrt{2n(\log_2 n + \varkappa(n))}$ и первого абзаца доказательства следует, что $\mathbf{P}\{f \in F(n, \varphi)\} \rightarrow 1$.

2. Обозначая для $f \in F(n, \varphi)$

$$\psi_{\min}(f) := \min_{i \in I(f)} \left| \varphi_{x_i f} \{i\} \delta \right| \geq \varphi(n) |\delta|,$$

находим, что при $N \geq N_{\text{thr}} = \frac{(B_1 + \sqrt{b \ln n})^2}{\varphi(n)^2 \delta^2}$ справедлива оценка

$$N \geq \frac{(B_1 + \sqrt{b \ln n})^2}{\psi_{\min}^2(f)}.$$

Заметим, что выполняются все три условия из (3): первое и третье условия приведены в (9), а второе следует из неравенства $N \geq N_{\text{thr}}(n)$. Тогда аналогично п. 4 доказательства теоремы 2 [4] получаем, что асимптотическое соотношение $\mathbf{P}\{I(f, \varphi) \subset \Theta^*(1)\} \rightarrow 1$ выполнено равномерно по $f \in F(n, \varphi)$. Итак,

$$\mathbf{P}\{|\Theta^*(1)| \geq r(n)\} \geq \mathbf{P}\{f \in F(n, \varphi)\} \mathbf{P}\{I(f, \varphi) \subset \Theta^*(1) \mid f \in F(n, \varphi)\} \rightarrow 1.$$

Осталось заметить, что $\mathbf{P}\{\Theta^*(1) \subset \Theta\} \geq 1 - \alpha(n) \rightarrow 1$ в силу (4). Первое утверждение теоремы доказано.

3. Докажем второе утверждение теоремы. С учетом (5) имеем

$$\begin{aligned} \log_2 N_{\text{thr}}(n) &= \\ &= \log_2 B_1^2 + 2 \log_2 \left(1 + \sqrt{\frac{b \ln n}{B_1^2}} \right) - 2 \log_2 \delta + \sqrt{32n \log_2 n (1 + o(1))} = \\ &= \log_2 \ln \frac{L - n}{\alpha} + O(1) + 2 \log_2 \delta + \sqrt{32n \log_2 n (1 + o(1))}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (10) вытекает требуемое асимптотическое соотношение.

Теорема 2 доказана. $\square$

Из теоремы можно сделать следующий качественный вывод. Если выполнено (9), то при $N \geq N_{\text{thr}}(n)$, $b > 2$, для почти всех пороговых функций от n переменных почти всегда $\Theta^*(1)$ содержит почти все существенные входы схемы и не содержит несущественные.

3. Замечания

Перечислим некоторые работы, близкие по направлению или методам исследования к [4] и к этой статье.

В криптографических приложениях схема, изображенная на рис. 1, может рассматриваться как модель комбинирующего генератора, в которой неизвестно, выходы каких регистров сдвига используются при выработке искаженной выходной псевдослучайной последовательности. Используемые при построении алгоритма статистики $S_N(i)$ близки к корреляционным статистикам Зигенталера [11]. В отечественной криптографии статистические методы оценки Θ в схеме, полученной из схемы рис. 1 заменой «параллельного» входа на последовательный (вероятностная модель фильтрующего генератора), разрабатывались в статьях И. Н. Коваленко, Ю. П. Шалимова и других авторов, опубликованных в 1960–1970-х годах в ведомственных сборниках. Развиваемые в [4] методы изучения совместного распределения входа и выхода схемы с m -мерным выходом могут быть полезны при анализе блочных шифров, в которых S-блоки являются или биективными функциями, или бент-функциями.

Задачей определения существенных входов (переменных) булевой функции в связи с задачей выделения n значимых факторов из большого числа L всех факторов при планировании эксперимента занимались разные авторы — см. библиографию в [6, 7]. В основном рассматривался случай активного эксперимента, когда наблюдатель выбирает значения входных векторов $\vec{x}(1), \dots, \vec{x}(N)$. Если эта последовательность выбрана заранее, то эксперимент называется *статическим*, в противном случае — *динамическим*.

В [3] рассматриваются оба типа активного наблюдения над функцией (которая может быть неизвестна, как отмечается в [3, с. 88]) с неискаженными значениями при известном n . Получены оценки для чисел N_{sta} и N_{din} наблюдений, достаточных для определения всех существенных входов. Доказывается, что при $L \rightarrow \infty$ и фиксированной f выполнено

$$N_{\text{sta}} \sim c(f) \log_2 L,$$

где $n \leq c(f) \leq 2^n$ — некоторая характеристика функции f . Верхняя оценка для N_{sta} получена неконструктивным методом «случайного выбора», т. е. без явного построения алгоритма.

Для динамического наблюдения справедливы асимптотические оценки

$$n \log_2 L(1 + o(1)) \leq N_{\text{din}} \leq c(f)(\log_2 L)^{r(f)}(1 + o(1)), \quad (11)$$

где $r(f)$ — целое, $1 \leq r(f) \leq n/2$ в случае симметрической функции, $1 \leq r(f) \leq n-1$ в случае произвольной функции.

Проведем сравнение этих оценок с полученными в [4] порогами объема при выборе в качестве f бент-функции либо мажоритарной функции:

$$N_{\text{bent}} = \frac{2^{n+1} \ln(4(L-n)/\alpha)}{\delta^2}, \quad N_{\text{maj}} = \frac{\pi n}{\delta^2} \ln \frac{4(L-n)}{\alpha}. \quad (12)$$

Порядок роста величин N_{sta} и N_{din} по L всегда не меньше $\ln L$, а в (12) — не больше $\ln L$. Кроме того, порядок роста величин (12) по L может быть меньше $\ln L$, например при $\ln(L-n) = o(\ln L)$. Если в последнем случае $\ln \alpha = o(\ln L)$, δ не стремится к нулю, то $N_{\text{maj}}/N_{\text{sta}} \rightarrow 0$. Порядок роста величин (12) по n лежит в пределах от n до 2^n , что совпадает с оценками для коэффициента $c(f)$.

В [8] рассматривается случай искажения значений неизвестной функции при передаче их по двоичному каналу без памяти. (Отметим, что наше условие аддитивного наложения соответствует случаю симметричного канала.) Предложена трехэтапная рандомизированная процедура динамического поиска, в которой существенно используются значения переходных вероятностей канала. Доказано, что при некотором выборе параметров процедуры при $N \rightarrow \infty$ вероятность ее ошибки будет не более заданного значения ε , а отношение среднего числа необходимых наблюдений к $n \log_2 L$ не превосходит $(1 + \varepsilon)/C$, где C — пропускная способность канала. С учетом (11) данное свойство названо асимптотической оптимальностью процедуры. В [7] результаты [8] обобщаются на случай k -значной функции от двоичных аргументов.

В упомянутых статьях рассматриваются в основном последовательные методы поиска, и требуемое число наблюдений является случайной величиной. При нашей постановке N считается данным параметром вероятностной схемы, зависящим от номера серии. При такой постановке в ряде комбинаторно-вероятностных задач возникает явление фазового перехода: предел вероятности некоторого события меняется с 0 на 1 при переходе предельного соотношения между параметрами через некоторый порог.

В [10, с. 99] даны два определения пороговой функции: пороговой функции вида (7) («грубой» в наших терминах) и *регулярной пороговой функции*, определяемой как пара таких функций $(N_{\text{th}}, M_{\text{th}})$, что

$$\text{если } (N - N_{\text{th}})/M_{\text{th}} \rightarrow x, \text{ то } \mathbf{P}(A) \rightarrow F(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $F(x)$ — функция распределения некоторой невырожденной вероятностной меры на действительной прямой.

Исследуемая в [4] пороговая функция является промежуточной между грубой и регулярной, поскольку при $M_{th} = o(N_{th})$ (что, как правило, выполнено) справедлива цепочка импликаций:

$$(N_{th} - \text{регулярный порог}) \Rightarrow (N_{th} - \text{порог}) \Rightarrow (N_{th} - \text{грубый порог}).$$

В заключение отметим некоторые возможные направления развития результатов. В случае выбора спектрально 1-однородных функций [4] интересен вопрос о существовании регулярной пороговой функции. При выборе случайной пороговой функции (а также случайной вектор-функции $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^m$) интересен вопрос о существовании хотя бы грубой пороговой функции, поскольку в этом случае изучение осложняется большим набором ситуаций, возникающих в алгоритме, когда на первом этапе определяется одна часть входов, на втором — другая и т. д.

Другое направление связано с модификацией алгоритма в соответствии со следующими соображениями. Пусть булева функция f является корреляционно-иммунной порядка k . Тогда по спектральному критерию $\varphi_{x_i^*}(I) = 0$ для всех $1 \leq |I| \leq k$, и согласно теореме 2 [4] с вероятностью, стремящейся к 1, алгоритм не найдет ни одного существенного входа. Улучшить характеристики алгоритма можно, увеличив до $k + 1$ число номеров входов, опробуемых на первом этапе. Верхняя оценка временной сложности алгоритма при этом увеличится. Вопрос состоит в том, можно ли выбрать граничные функции $B(G)$ [4] так, чтобы при той же верхней границе α (для вероятности получить несущественные выходы в Θ^*) пороговые функции объема материала уменьшились хотя бы для рассмотренных здесь классов функций.

Автор благодарен А.М.Зубкову за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению статьи.

Список литературы

- [1] Амбросимов А. С., “Свойства бент-функций q -значной логики над конечными полями”, *Дискретная математика*, **6:3** (1994), 50–60.
- [2] Боровков А. А., *Теория вероятностей*, М.: Эдиториал УРСС, 1999, 472 с.
- [3] Викторова И. И., Леонтович А. М., “О числе проверок для определения значимых переменных булевой функции”, *Проблемы передачи информации*, **14:4** (1978), 85–97.
- [4] Денисов О. В., “Статистическая оценка множества существенных аргументов двоичной вектор-функции с искаженными значениями”, *Математические вопросы криптографии*, **5:4** (2014), 41–61.

- [5] Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Миронова В. А., “Анализ спектра симметрических булевых функций”, *Математические вопросы криптографии*, **4**:1 (2013), 59–76.
- [6] Малютов М. Б., “О рандомизированном планировании отсеивающих экспериментов”, *Сб. «Планирование и автоматизация в научных исследованиях»*, М.: Сов. радио, 1974, 60–72.
- [7] Малютов М. Б., Цитович И. И., “Последовательный поиск существенных переменных неизвестной функции”, *Проблемы передачи информации*, **33**:4 (1997), 88–107.
- [8] Цитович И. И., “Последовательный план для определения значимых переменных булевской функции”, *Сб. «Анализ систем информатики»*, М.: Наука, 1991, 10–16.
- [9] Шабанин О. В., “О сложности дизъюнктивной нормальной формы пороговых функций”, *Дискретная математика*, **12**:2 (2000), 85–92.
- [10] Эрдеш П., Спенсер Дж., *Вероятностные методы в комбинаторике*, М.: Мир, 1976, 131 с.
- [11] Siegenthaler T., “Decrypting a class of stream ciphers using ciphertext only”, *IEEE Trans. Computers*, **34**:1 (1985), 81–85.