Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Иванов, Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения параметрических гипотез о распределении случайного вектора. I, *Матем. вопр. криптогр.*, 2015, том 6, выпуск 3, 89–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 06:52:59

УДК: 519.233.3

Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения параметрических гипотез о распределении случайного вектора. I

А. В. Иванов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Москва

Получено 25.XI.2014

Построены асимптотически оптимальные критерии в задаче различения простых гипотез о параметрах комбинированного полунепрерывного канала связи в схеме серий для случая скалярного параметра, характеризующего распределение дискретной помехи. Найдены вероятностные характеристики соответствующих критериев (в частности, асимптотически минимального объема выборки для различения гипотез при заданных вероятностях ошибок первого и второго рода). Показано, что минимальный объем выборки существенно зависит от соотношений между параметрами канала.

Ключевые слова: комбинированный полунепрерывный канал связи, асимптотически оптимальный критерий, схема серий, асимптотически минимальный объем выборки

Asymptotically optimal criteria for testing parametric hypothesis on the distribution of a random vector. I

A. V. Ivanov

National Research University «Higher School of Economics», Moscow

Abstract. We construct asymptotically optimal criteria for testing two simple hypotheses on the scalar parameter of discrete noise in a combined semicontinuous communication channel for the triangular scheme. Probabilistic characteristics of these criteria are obtained (in particular, asymptotics of the minimal sample size for given error probabilities of two kinds). It is shown that the minimal sample size depends essentially on the channel parameters.

Key words: combined semicontinuous communication channel, asymptotically optimum criteria, triangular scheme, asymptotically minimal sample size

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 89–116 (Russian).

1. Введение

Рассматривается модель комбинированного полунепрерывного канала связи (КПКС), представляющего собой комбинацию двоичного симметричного канала с дискретной помехой и непрерывной аддитивной помехи (см., например, [3, глава 7]). Модель КПКС однозначно задается набором параметров. Требуется по выборке, наблюдаемой на выходе КПКС, различить две простые гипотезы, каждая из которых определяется соответствующими параметрами канала.

Пусть $B = \{0, 1\}$, $B^m = \{0, 1\}^m$. Рассмотрим последовательность независимых случайных векторов

$$X^{(t)} = (X_1^{(t)}, X_2^{(t)}, \dots, X_m^{(t)}), \quad t = 1, 2, \dots,$$

с независимыми одинаково распределенными координатами, $\mathbf{P}(X_j^{(t)} = \tau) = 2^{-1}$, $\tau \in B$, $j = 1, 2, \dots, m$. Везде в дальнейшем предполагается, что $m \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$, фиксировано и конечно, $t \in \mathbb{Z}^+$.

Введем в рассмотрение последовательность независимых и не зависящих от последовательности $\{X^{(t)}\}_{t=1}^{\infty}$ случайных двоичных векторов $\varepsilon^{(t)} = (\varepsilon_1^{(t)}, \varepsilon_2^{(t)}, \dots, \varepsilon_m^{(t)})$ с независимыми координатами:

$$\mathbf{P}(\varepsilon_j^{(t)} = \tau) = \frac{1 + (-1)^{\tau} \delta_j}{2}, \quad \tau \in B, |\delta_j| \leq 1, j = 1, 2, \dots, m.$$

Вектор $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ является параметром дискретного двоичного симметричного канала.

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\eta_t^* = f(X^{(t)} \oplus \varepsilon^{(t)}) + \xi_*^{(t)}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

где $\{\xi_*^{(t)}\}_{t=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нормальным распределением $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, $\sigma > 0$, не зависящих от векторов $\{X^{(t)}, \varepsilon^{(t)}\}_{t=1}^{\infty}$; $\oplus$ — операция покомпонентного сложения векторов по модулю 2; $f(x) : B^m \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная псевдобулева функция.

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\eta_t = \frac{\eta_t^* - \mu}{\sigma} = \lambda f(X^{(t)} \oplus \varepsilon^{(t)}) + \xi^{(t)}, \quad (1)$$

где $\{\xi^{(t)}\}_{t=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0; 1)$, $\lambda = \sigma^{-1}$ — параметр аддитивной помехи с непрерывным распределением.

Заметим, что ранее в других постановках задач в качестве непрерывного шума рассматривались также случайные величины $\xi^{(t)}$, имеющие непрерывные, но отличные от нормального распределения (см., например, [17, 18]), в частности распределение Коши, бета-распределение и другие.

Нетрудно видеть, что при заданных функции $f(x)$, векторе $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ и параметре $\lambda = \sigma^{-1}$ модель (1) определена однозначно.

Далее будем использовать следующие обозначения: $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$, $z \in \mathbb{R}$, — плотность, $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(u) du$ — функция стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0; 1)$, ζ_{α} — квантиль распределения $\mathcal{N}(0; 1)$ уровня $\alpha \in (0, 1)$.

Предположим, что имеется выборка, состоящая из независимых одинаково распределенных случайных векторов

$$\left\{ \left(X^{(t)}, \eta_t \right) = \left(X^{(t)}, \lambda f \left(X^{(t)} \oplus \varepsilon^{(t)} \right) + \xi^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{\infty}. \quad (2)$$

Статистическая гипотеза $H_{f, \lambda, \delta}$ о распределении пар $(X^{(t)}, \eta_t)$ однозначно задается функцией f , векторным параметром $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ и параметром λ .

Требуется по выборке (2) различить две простые гипотезы $H_{f, \lambda, \delta}, H_{f^*, \lambda^*, \delta^*}$, для которых выполнено хотя бы одно из условий:

- 1) $f \neq f^*$, т. е. существует такое $x \in B^m$, что $f(x) \neq f^*(x)$;
- 2) $\delta \neq \delta^*$, т. е. существует такое $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, что $\delta_j \neq \delta_j^*$;
- 3) $\lambda \neq \lambda^*$.

Требуется при выполнении хотя бы одного из условий 1)–3) построить асимптотически оптимальный критерий различения гипотез $H_{f, \lambda, \delta}, H_{f^*, \lambda^*, \delta^*}$ в схеме серий при различных предположениях о соотношениях между параметрами схемы.

2. Предварительные результаты

Далее в этой первой части статьи рассматривается случай скалярного параметра δ , когда $\delta_j \equiv \delta, j = 1, 2, \dots, m$. Случай векторного параметра $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ будет рассмотрен во второй части статьи.

Будем считать, что $\lambda = \lambda^*$, т. е. фактически в дальнейшем будут различаться гипотезы $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*} .

Обозначим через $p_{f,\lambda,\delta}(x, z)$, $x \in B^m, z \in \mathbb{R}$, плотность распределения случайного вектора $(X^{(t)}, \eta_t)$ из формулы (2) при заданных функции f и параметрах δ, λ (при гипотезе $H_{f,\lambda,\delta}$), так что

$$p_{f,\lambda,\delta}(x, z, t) = \frac{d}{dz} \mathbf{P} \left(X^{(t)} = x, \eta_t \leq z \right) \quad (3)$$

и для любых измеримых множеств $C \subset B^m, A \subset \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\mathbf{P} \left(X^{(t)} \in C, \eta_t \in A \right) = \sum_{x \in C} \int_A p_{f,\lambda,\delta}(x, z, t) dz.$$

Поскольку случайные векторы в последовательности (2) одинаково распределены и независимы, далее параметр t в обозначении плотности (3) будет опускаться.

Замечание 1. Как правило, в приложениях рассматриваются линейные функции вида $f(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j = (\alpha, x)$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$. В частности, при $\alpha_j = 1, j = 1, 2, \dots, m$, получаем вес Хэмминга вектора x : $f(x) = \sum_{j=1}^m x_j = \|x\|$. Этот случай подробно изучен автором в [6].

Положим

$$\mathbf{P}_\delta \left(\varepsilon^{(t)} = \varepsilon \right) = \pi_\delta(\varepsilon) = \pi_0(\varepsilon) (1 - \delta)^{\|\varepsilon\|} (1 + \delta)^{m - \|\varepsilon\|}, \quad (4)$$

где $\pi_0(\varepsilon) = 2^{-m}$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) \in B^m$, $\|\varepsilon\| = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j$ — вес Хэмминга вектора ε .

Приведем некоторые конкретизации общей модели (1):

если $\lambda = 0$, $\delta \in [0, 1]$ (гипотеза $H_{f,0,\delta}$), то при любых функции f и параметре δ последовательность (2) представляет собой последовательность $\{(X^{(t)}, \eta_t)\}_{t=1}^\infty$ с независимыми координатами, имеющими бернуллиевское равновероятное на B^m и стандартное нормальное распределения соответственно;

если $\lambda > 0$, $\delta = 0$ (гипотеза $H_{f,\lambda,0}$), то последовательность (2) представляет собой последовательность $\{(X^{(t)}, \lambda f(Y^{(t)}) + \xi^{(t)})\}_{t=1}^\infty$, где $X^{(t)}$ и $Y^{(t)}$ — независимые равновероятные случайные векторы со значениями в B^m с независимыми бернуллиевскими координатами;

если $\lambda > 0$, $\delta = 1$ (гипотеза $H_{f,\lambda,1}$), то последовательность (2) представляет собой последовательность $\{(X^{(t)}, \lambda f(X^{(t)}) + \xi^{(t)})\}_{t=1}^\infty$ с жестко зависимыми координатами;

если $\lambda > 0$, $0 < |\delta| < 1$ (гипотеза $H_{f,\lambda,\delta}$), то получаем последовательность общего вида (2).

Основной целью настоящей работы является построение асимптотически оптимальных критериев различения гипотез общего вида $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*} в схеме серий при $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, а также расчет основных характеристик таких критериев, в частности асимптотически минимального объема выборки, достаточного для различения указанных гипотез с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода.

Отметим, что аналогичные задачи исследовались близкими методами в [1, 10–12, 16] и ряде других статей. Некоторые результаты настоящей работы анонсировались автором в [7, 8].

Далее для упрощения изложения некоторые индексы в обозначении гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ (в зависимости от конкретной пары различаемых гипотез) там, где это не вызовет разночтений, будут опускаться: например, если речь идет о построении критерия различения гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f,λ,δ^*} , то будем обозначать соответствующие гипотезы через H_δ и H_{δ^*} . Кроме того, через $H^{(0)}$ далее обозначается гипотеза $H_{f,0,\delta}$, которая в дальнейшем используется в качестве вспомогательной. При справедливости гипотезы $H^{(0)}$ в модели (1) получаем $\eta_t = \xi_t$, т. е. помеху с непрерывным стандартным нормальным распределением.

Для построения асимптотически оптимальных критериев различения гипотез потребуется ряд предварительных результатов. Откажемся на время от индекса t в (1) и рассмотрим случайную величину $\eta = \lambda f(X \oplus \varepsilon) + \xi$, где $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ — случайный двоичный вектор с независимыми равновероятными координатами, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ — независимый от вектора X случайный двоичный вектор с независимыми координатами,

$$\mathbf{P}(\varepsilon_j = \nu) = \frac{1 + (-1)^\nu \delta}{2}, \quad |\delta| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

ξ — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0; 1)$. Сформулируем ряд вспомогательных утверждений о виде плотности распределения (3) в случае справедливости той или иной гипотезы.

Положим $p(x, z) = p_{f,0,\delta}(x, z) = 2^{-m} \phi(z)$. Через $\mathbf{E}_\delta(\dots)$ будем обозначать математическое ожидание по распределению (4), а через $\mathbf{E}^{(0)}(\dots)$ — математическое ожидание при гипотезе $H^{(0)}$.

Лемма 1. Пусть $\lambda > 0$ и выполняются сделанные выше предположения о распределении случайных векторов X, ε и случайной величины ξ . Тогда

$$p_{f,\lambda,\delta}(x, z) = \frac{d}{dz} \mathbf{P}(X = x, Z \leq z) = p(x, z) \mathbf{E}_\delta \frac{\phi(z - \lambda f(x \oplus \varepsilon))}{\phi(z)}. \quad (5)$$

Доказательство. Из определения плотности $p_{f,\lambda,\delta}(x, z)$ (3) с учетом формулы условной вероятности непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} p_{f,\lambda,\delta}(x, z) &= \frac{d}{dz} \mathbf{P}(X = x, \eta \leq z) = \frac{d}{dz} [\mathbf{P}(\eta \leq z | X = x) P(X = x)] = \\ &= 2^{-m} \frac{d}{dz} [\mathbf{P}(\xi \leq z - \lambda f(x \oplus \varepsilon))] = \\ &= 2^{-m} \sum_{u \in B^m} \phi(z - \lambda f(x \oplus u)) \pi_\delta(u) = 2^{-m} \mathbf{E}_\delta \phi(z - \lambda f(x \oplus \varepsilon)) = \\ &= p(x, z) \mathbf{E}_\delta \frac{\phi(z - \lambda f(x \oplus \varepsilon))}{\phi(z)}. \end{aligned}$$

□

В частности, из леммы 1 следуют равенства

$$p_{f,\lambda,0}(x, z) = 2^{-m} \mathbf{E}_0 \phi(z - \lambda f(\varepsilon)),$$

$$p_{f,\lambda,1}(x, z) = 2^{-m} \mathbf{E}_1 \phi(z - \lambda f(x \oplus \varepsilon)) = 2^{-m} \phi(z - \lambda f(x)),$$

откуда при $f(x) = \|x\|$ получаем

$$p_{f,\lambda,0}(x, z) = 2^{-2m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \phi(z - \lambda k),$$

$$p_{f,\lambda,1}(x, z) = 2^{-m} \phi(z - \lambda \|x\|).$$

Перейдем к рассмотрению случая схемы серий при $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, который соответствует модели КПКС с гауссовским шумом большой интенсивности.

Прежде всего напомним, что при $z \rightarrow 0$, $z \in \mathbb{R}$, справедливы разложения

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + o(z^4), \quad (6)$$

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + o(z^4). \quad (7)$$

Положим

$$a_k(f, \delta, x) = \mathbf{E}_\delta f^k(x \oplus \varepsilon). \quad (8)$$

Лемма 2. *Справедливо представление*

$$a_k(f, \delta, x) = \sum_{j=0}^m a_{kj}(f, x) \delta^j,$$

где

$$a_{kj}(f, x) = \mathbf{E}_0 \left(f^k(x \oplus \varepsilon) \mu_j(\|\varepsilon\|) \right) \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} \mu_j(n) &= \sum_{l=0}^j (-1)^l \binom{n}{l} \binom{m-n}{j-l}, \\ j &= 0, 1, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. По определению математического ожидания с учетом (4) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\delta f^k(x \oplus \varepsilon) &= \sum_{u \in B^m} f^k(x \oplus u) \pi_\delta(u) = \\ &= \sum_{u \in B^m} f^k(x \oplus u) 2^{-m} (1 - \delta)^{\|u\|} (1 + \delta)^{m - \|u\|} = \\ &= \mathbf{E}_0 f^k(x \oplus \varepsilon) (1 - \delta)^{\|\varepsilon\|} (1 + \delta)^{m - \|\varepsilon\|}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что при любых $j = 0, 1, \dots, m$, $n = 0, 1, \dots, m$ верно разложение

$$\begin{aligned} (1 - \delta)^n (1 + \delta)^{m-n} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \delta^i \sum_{j=0}^{m-n} \binom{m-n}{j} \delta^j = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^j (-1)^l \binom{n}{l} \binom{m-n}{j-l} \delta^j = \sum_{j=0}^m \mu_j(n) \delta^j, \end{aligned}$$

где $\mu_j(n) = \sum_{l=0}^j (-1)^l \binom{n}{l} \binom{m-n}{j-l}$, $j = 0, 1, \dots, m$, $n = 0, 1, \dots, m$, откуда следует утверждение леммы. $\square$

В частности, из (10) следует, что

$$\begin{aligned} \mu_0(n) &= 1, \mu_1(n) = m - 2n, \mu_2(n) = \frac{(m - 2n)^2 - m}{2}, \\ \mu_3(n) &= mn(2n - m + 1) + \frac{m}{6} (m^2 - 3m + 2) - \frac{n}{6} (8n^2 + 4). \end{aligned}$$

Можно рассчитать $\mu_r(n)$ при любом $r = 1, 2, \dots$, однако очевидно, что с ростом r формулы будут существенно усложняться.

Лемма 3. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $\delta = \rho\lambda$, $\rho = \text{const}$. Тогда

$$a_k(f, \lambda\rho, x) = \sum_{j=0}^4 b_{kj}(f, \rho, x) \lambda^j + O(\lambda^5), \quad (11)$$

где

$$b_{kj}(f, \rho, x) = a_{kj}(f, x) \rho^j. \quad (12)$$

и $a_{kj}(f, x)$ определено в (9).

Доказательство. Из представления (9) следует, что при $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $\delta = \rho\lambda$, $\rho = \text{const}$,

$$a_k(f, \delta, x) = \sum_{j=0}^m a_{kj}(f, x) \delta^j = \sum_{j=0}^m a_{kj}(f, x) \rho^j \lambda^j,$$

откуда следует представление (11). □

Отметим равенство

$$b_{k0}(f, \rho, x) = a_{k0}(f, x), \quad (13)$$

которое будет использовано в дальнейшем.

Лемма 4. Пусть $f(x) = \|x\| = \sum_{j=1}^m x_j$. Тогда верны соотношения

$$\begin{aligned} a_1(\|x\|, \delta, x) &= \delta \left(\|x\| - \frac{m}{2} \right) + \frac{m}{2}, \\ a_2(\|x\|, \delta, x) &= \delta^2 \left(\|x\| (\|x\| - m) + \frac{m(m-1)}{4} \right) + \\ &+ \delta \left(m\|x\| - \frac{m^2}{2} \right) + \frac{m(m+1)}{4}. \end{aligned}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $x \in B^m$ и рассмотрим вектор $x \oplus \varepsilon$. Поскольку вектор x фиксирован, это означает, что он содержит $\|x\|$ единиц и $m - \|x\|$ нулей. Не ограничивая общности рассуж-

дений, будем считать, что $x = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{\|x\|}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-\|x\|} \right)$, поскольку последующие

рассуждения верны для любого другого вектора, содержащего $\|x\|$ единиц и $m - \|x\|$ нулей.

В рассматриваемом случае справедливо равенство

$$\|x \oplus \varepsilon\| = \theta_1 + \theta_2, \quad (14)$$

где случайные величины θ_1, θ_2 независимы и имеют биномиальные распределения

$$\mathcal{L}(\theta_1) = \text{Bi}\left(\|x\|, \frac{1+\delta}{2}\right), \quad \mathcal{L}(\theta_2) = \text{Bi}\left(m - \|x\|, \frac{1-\delta}{2}\right).$$

Поскольку $\|x \oplus \varepsilon\|^k = (\theta_1 + \theta_2)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \theta_1^j \theta_2^{k-j}$, то с учетом независимости случайных величин θ_1, θ_2 (14) и свойств математического ожидания отсюда следует, что

$$\begin{aligned} a_k(\|x\|, \delta, x) &= \mathbf{E}_\delta \|x \oplus \varepsilon\|^k = \mathbf{E}_\delta (\theta_1 + \theta_2)^k = \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mathbf{E}_\delta \theta_1^j \mathbf{E}_\delta \theta_2^{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \gamma_j(\theta_1) \gamma_{k-j}(\theta_2), \end{aligned}$$

где $\gamma_j(\theta_i) = \mathbf{E}_\delta \theta_i^j$, $i = 1, 2, j = 0, 1, \dots, k$.

Отсюда получаем следующие равенства:

$$a_1(\|x\|, \delta, x) = \mathbf{E}_\delta \theta_1 + \mathbf{E}_\delta \theta_2 = \frac{1+\delta}{2} \|x\| + \frac{1-\delta}{2} (m - \|x\|) = \delta \left(\|x\| - \frac{m}{2} \right) + \frac{m}{2},$$

$$\begin{aligned} a_2(\|x\|, \delta, x) &= \mathbf{E}_\delta \theta_1^2 + 2\mathbf{E}_\delta \theta_1 \mathbf{E}_\delta \theta_2 + \mathbf{E}_\delta \theta_2^2 = \\ &= \frac{\delta^2}{4} (4\|x\|(\|x\| - m) + m(m-1)) + \frac{\delta}{4} (2m(\|x\| - 2m)) + \frac{m(m+1)}{4} = \\ &= \delta^2 \left(\|x\|(\|x\| - m) + \frac{m(m-1)}{4} \right) + \delta \left(m\|x\| - \frac{m^2}{2} \right) + \frac{m(m+1)}{4}. \end{aligned}$$

□

Следствие 1. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_1(\|x\|, 0, x) &= \frac{m}{2}, \quad a_2(\|x\|, 0, x) = \frac{m(m+1)}{4}, \\ a_k(\|x\|, 1, x) &= \|x\|^k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 4 при $\delta = 0$ и $\delta = 1$ соответственно. □

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_0(f, \delta, x, z) &= 1, \\ A_1(f, \delta, x, z) &= za_1(f, \delta, x), \\ A_2(f, \delta, x, z) &= \frac{z^2 - 1}{2} a_2(f, \delta, x), \\ A_3(f, \delta, x, z) &= \frac{z^3 - 3z}{6} a_3(f, \delta, x), \\ A_4(f, \delta, x, z) &= \frac{z^4 - 6z^2 + 3}{24} a_4(f, \delta, x). \end{aligned}$$

Далее в скобках при $A_j(f, \delta, x, z)$, $a_j(f, \delta, x)$, $j = 0, 1, \dots, 4$, будем оставлять лишь тот параметр (или те параметры), которые различны для рассматриваемых гипотез $H_{f, \lambda, \delta}$ и $H_{f^*, \lambda, \delta^*}$, а там, где это не вызовет недоразумений, будем параметры вообще опускать.

Лемма 5. При $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $\delta = \text{const}$ справедливо асимптотическое разложение

$$r_{f, \lambda, \delta}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_{f, \lambda, \delta}(x, z)}{p(x, z)} = \sum_{j=0}^4 A_j(f, \delta, x, z) \lambda^j + O(\lambda^5). \quad (15)$$

Доказательство. Из представления (5) следует, что

$$r_{f, \lambda, \delta}(x, z) = \mathbf{E}_\delta \left[\frac{\phi(z - \lambda f(x \oplus \varepsilon))}{\phi(z)} \right] = \mathbf{E}_\delta \exp \left\{ \lambda z f(x \oplus \varepsilon) - \frac{\lambda^2 f^2(x \oplus \varepsilon)}{2} \right\},$$

откуда с учетом разложения (6) получаем:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \lambda z f(x \oplus \varepsilon) - \frac{\lambda^2 f^2(x \oplus \varepsilon)}{2} \right\} &= 1 + \lambda z f(x \oplus \varepsilon) - \frac{\lambda^2 f^2(x \oplus \varepsilon)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\lambda z f(x \oplus \varepsilon) - \frac{\lambda^2 f^2(x \oplus \varepsilon)}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\lambda z f(x \oplus \varepsilon) - \frac{\lambda^2 f^2(x \oplus \varepsilon)}{2} \right)^3 + \\ &+ \frac{1}{24} \left(\lambda z f(x \oplus \varepsilon) - \frac{\lambda^2 f^2(x \oplus \varepsilon)}{2} \right)^4 + O(\lambda^5) = \\ &= 1 + \lambda(zf(x \oplus \varepsilon)) + \lambda^2 \left(\frac{(z^2 - 1)f^2(x \oplus \varepsilon)}{2} \right) + \lambda^3 \left(\frac{(z^3 - 3z)f^3(x \oplus \varepsilon)}{6} \right) + \end{aligned}$$

$$+\lambda^4 \left(\frac{(z^4 - 6z^2 + 3) f^4(x \oplus \varepsilon)}{6} \right) + O(\lambda^5).$$

Вычисляя математическое ожидание, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\delta \exp \left\{ \lambda z f(x \oplus \varepsilon) - \frac{\lambda^2 f^2(x \oplus \varepsilon)}{2} \right\} &= 1 + \lambda z a_1(f, \delta, x) + \\ &+ \lambda^2 \left(\frac{(z^2 - 1) a_2(f, \delta, x)}{2} \right) + \lambda^3 \left(\frac{(z^3 - 3z) a_3(f, \delta, x)}{6} \right) + \\ &+ \lambda^4 \left(\frac{(z^4 - 6z^2 + 3) a_4(f, \delta, x)}{24} \right) + O(\lambda^5). \end{aligned}$$

□

Введем следующие обозначения:

$$B_1(f, \delta, x, z) = A_1(f, \delta, x, z),$$

$$B_2(f, \delta, x, z) = A_2(f, \delta, x, z) - \frac{A_1^2(f, \delta, x, z)}{2},$$

$$B_3(f, \delta, x, z) = A_3(f, \delta, x, z) - A_1(f, \delta, x, z) A_2(f, \delta, x, z) + \frac{A_1^3(f, \delta, x, z)}{3},$$

$$\begin{aligned} B_4(f, \delta, x, z) &= A_4(f, \delta, x, z) - \frac{A_2^2(f, \delta, x, z)}{2} - A_1(f, \delta, x, z) A_3(f, \delta, x, z) + \\ &+ A_1^2(f, \delta, x, z) A_2(f, \delta, x, z) - \frac{A_1^4(f, \delta, x, z)}{4}. \end{aligned}$$

Лемма 6. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $\delta = \text{const}$. Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$l_{f, \lambda, \delta}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \ln r_{f, \lambda, \delta}(x, z) = \sum_{j=1}^4 B_j(f, \delta, x, z) \lambda^j + O(\lambda^5). \quad (16)$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы 5 и справедливости разложения (7). □

Следует отметить, что в представлении (16), вообще говоря, значение $l_{f,\lambda,\delta}(x, z)$ на векторах (x, z) , для которых $r_{f,\lambda,\delta}(x, z) = 0$ или ∞ , определяется произвольно. В рассматриваемом случае $l_{f,\lambda,\delta}(x, z)$ определяется однозначно, так как $p(x, z) > 0$ и $p_{f,\lambda,\delta}(x, z) > 0$ для всех векторов (x, z) .

Далее в скобках при $B_j(f, \delta, x, z)$, $j = 1, 2, \dots, 4$, будем оставлять лишь тот параметр (или те параметры), которые различны для рассматриваемых гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*} .

Введем обозначения (используя формулы (12), (13)):

$$\begin{aligned} C_0(f, \rho, x, z) &= 1, \\ C_1(f, \rho, x, z) &= zb_{10}(\rho), \\ C_2(f, \rho, x, z) &= \frac{z^2 - 1}{2}b_{20}(\rho) + zb_{11}(\rho), \\ C_3(f, \rho, x, z) &= \frac{z^3 - 3z}{6}b_{30}(\rho) + \frac{z^2 - 1}{2}b_{21}(\rho) + zb_{12}(\rho), \\ C_4(f, \rho, x, z) &= \frac{z^4 - 6z^2 + 3}{24}b_{40}(\rho) + \frac{z^3 - 3z}{6}b_{31}(\rho) + \\ &\quad + \frac{z^2 - 1}{2}b_{22}(\rho) + zb_{13}(\rho). \end{aligned}$$

Лемма 7. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $\delta = \rho\lambda$, $\rho = \text{const}$. Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$r_{f,\lambda,\rho\lambda}(x, z) = \frac{p_{f,\lambda,\rho\lambda}(x, z)}{p(x, z)} = \sum_{j=0}^4 C_j(f, \rho, x, z) \lambda^j + O(\lambda^5). \quad (17)$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3 и леммы 5. $\square$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D_1(f, \rho, x, z) &= C_1(f, \rho, x, z), \\ D_2(f, \rho, x, z) &= C_2(f, \rho, x, z) - \frac{C_1^2(f, \rho, x, z)}{2}, \\ D_3(f, \rho, x, z) &= C_3(f, \rho, x, z) - C_1(f, \rho, x, z) C_2(f, \rho, x, z) + \frac{C_1^3(f, \rho, x, z)}{3}, \\ D_4(f, \rho, x, z) &= C_4(f, \rho, x, z) - \frac{C_2^2(f, \rho, x, z)}{2} - C_1(f, \rho, x, z) C_3(f, \rho, x, z) + \\ &\quad + C_1^2(f, \rho, x, z) C_2(f, \rho, x, z) - \frac{C_1^4(f, \rho, x, z)}{4}. \end{aligned}$$

Лемма 8. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $\delta = \rho\lambda$, $\rho = \text{const}$. Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$l_{f,\lambda,\rho\lambda}(x, z) = \ln r_{f,\lambda,\rho\lambda}(x, z) = \sum_{j=1}^4 D_j(f, \rho, x, z) \lambda^j + O(\lambda^5). \quad (18)$$

Доказательство. Лемма 8 следует из леммы 7 и разложения (8). $\square$

Далее положим

$$B_j(f, \delta) = B_j(f, \delta, x, z), \quad D_j(f, \rho) = D_j(f, \rho, x, z).$$

Лемма 9. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$. Тогда при произвольных f, f^*, δ, δ^* справедливо асимптотическое разложение для статистики логарифма отношения правдоподобия в критерии различения гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*}

$$\begin{aligned} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(x, z) &= \ln r_{f,\lambda,\delta}(x, z) - \ln r_{f^*,\lambda,\delta^*}(x, z) = \\ &= \sum_{j=1}^4 (B_j(f, \delta) - B_j(f^*, \delta^*)) \lambda^j + O(\lambda^5). \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что при любых ρ, ρ^* выполняется равенство $D_1(f, \rho, x, z) - D_1(f, \rho^*, x, z) = 0$, обосновывающее следующую лемму.

Лемма 10. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $\delta = \rho\lambda$, $\delta^* = \rho^*\lambda$, $\rho = \text{const}$, $\rho^* = \text{const}$, $\rho \neq \rho^*$. Тогда справедливо асимптотическое разложение для статистики логарифма отношения правдоподобия критерия различения гипотез $H_{f,\lambda,\rho\lambda}$ и $H_{f,\lambda,\rho^*\lambda}$

$$\begin{aligned} l_{f,\lambda,\rho,\rho^*}(x, z) &= \ln r_{f,\lambda,\rho\lambda}(x, z) - \ln r_{f,\lambda,\rho^*\lambda}(x, z) = \\ &= \sum_{j=2}^4 (D_j(\rho) - D_j(\rho^*)) \lambda^j + O(\lambda^5). \end{aligned} \quad (20)$$

Лемма 11. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \rho\lambda$, $\rho = \text{const}$. Тогда справедливо асимптотическое разложение для статистики логарифма отношения правдоподобия критерия различения гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ и $H_{f,\lambda,\lambda\rho}$

$$\begin{aligned} l_{f,\lambda,\delta,\lambda\rho}(x, z) &= \ln r_{f,\lambda,\delta}(x, z) - \ln r_{f,\lambda,\lambda\rho}(x, z) = \\ &= \sum_{j=1}^4 (B_j(\delta) - D_j(\rho)) \lambda^j + O(\lambda^5). \end{aligned} \quad (21)$$

Приведенные в (19)–(21) разложения логарифма статистики отношения правдоподобия позволяют строить критерии проверки различных гипотез о параметрах f и δ в схеме серий при $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$ для случаев $\delta = \text{const}$ или $\delta \equiv \delta(n) \rightarrow 0$.

В следующих разделах построены асимптотически оптимальные критерии различения гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*} .

3. Асимптотически оптимальные критерии различения гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*}

В настоящем разделе подробно рассмотрен общий случай различения гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*} (далее будем обозначать указанные гипотезы через $H_{f,\delta}$ и H_{f^*,δ^*} соответственно).

Предположим, что имеется выборка $\{(X^{(t)}, \eta_t)\}_{t=1}^n$. Рассмотрим логарифм статистики отношения правдоподобия:

$$L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} = \sum_{t=1}^n l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(X^{(t)}, \eta_t),$$

где (см. формулу (19))

$$l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(x, z) = \ln r_{f,\lambda,\delta}(x, z) - \ln r_{f^*,\lambda,\delta^*}(x, z).$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что случай $\lambda^* = c\lambda$, $c = \text{const} > 0$ сводится к случаю $f^*(x) = cf(x)$, в котором можно построить критерий различения соответствующих гипотез для частного случая $\lambda \neq \lambda^*$ при $\lambda^* = c\lambda$.

Дальнейшая задача состоит в построении асимптотически оптимальных критериев для проверки соответствующих пар гипотез в схеме серий при $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$. Критерий различения гипотез G_0 , G_1 в схеме серий при $n \rightarrow \infty$ объема (размера) α и мощности $\beta_n(\alpha)$, по аналогии с [14, с. 105] (см. также [2, с. 406]), будем называть асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) оптимальным (наиболее мощным), или просто асимптотически оптимальным критерием различения гипотез G_0 , G_1 объема α , если для мощности $\beta_n^*(\alpha)$ любого другого критерия того же объема α выполняется соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n^*(\alpha) - \beta_n(\alpha)) \leq 0$.

3.1. Асимптотически оптимальные критерии различения гипотез $H_{f,\delta}$ и H_{f^*,δ^*}

Начнем с рассмотрения критериев различения гипотез о виде функции $f(x)$ и параметра δ модели (1). Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \text{const}$ и выполнено хотя бы одно из условий: $f \neq f^*$ или $\delta \neq \delta^*$.

Далее символом « $\Rightarrow$ » будем обозначать слабую сходимость вероятностных мер (распределений).

Теорема 1. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $n\lambda^2 = \gamma = \text{const} > 0$, $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \text{const}$,

$$h_{f,f^*,\delta,\delta^*} = \mathbf{E}^{(0)} \left(a_1 \left(f, \delta, X^{(t)} \right) - a_1 \left(f^*, \delta^*, X^{(t)} \right) \right)^2 > 0$$

($a_k(f, \delta, x)$ определены в (8)) и выполнено хотя бы одно из условий $\delta \neq \delta^*$ или $f \neq f^*$.

Тогда при гипотезе $H_{f,\delta}$

$$\mathcal{L}_{f,\delta} (L_{f,f^*,\delta,\delta^*}) \Rightarrow \mathcal{N} \left(\frac{\gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*}}{2}; \gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*} \right); \quad (22)$$

при гипотезе H_{f^*,δ^*}

$$\mathcal{L}_{f^*,\delta^*} (L_{f,f^*,\delta,\delta^*}) \Rightarrow \mathcal{N} \left(-\frac{\gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*}}{2}; \gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*} \right). \quad (23)$$

Для минимального объема выборки, позволяющего различать гипотезы $H_{f,\delta}$ и H_{f^*,δ^*} с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода α, β соответственно, справедлива асимптотическая формула

$$n(f, f^*, \delta, \delta^*) \sim \frac{(\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2}{\lambda^2 h_{f,f^*,\delta,\delta^*}}. \quad (24)$$

Доказательство. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$ и выполнено хотя бы одно из условий

$$1) \delta \neq \delta^*, \quad 2) f \neq f^*.$$

Рассмотрим логарифм статистики отношения правдоподобия

$$L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(\left\{ \left(X^{(t)}, \eta_t \right) \right\}_{t=1}^n \right) = \sum_{t=1}^n l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(X^{(t)}, \eta_t \right),$$

где функция $l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(x, z) = \ln r_{f,\lambda,\delta}(x, z) - \ln r_{f^*,\lambda,\delta^*}(x, z)$ для (x, z) , удовлетворяющих соотношению $p_{f,\lambda,\delta}(x, z) p_{f^*,\lambda,\delta^*}(x, z) \neq 0$, и задана произвольно на остальных векторах (x, z) (если такие существуют).

Вначале найдем асимптотику моментов статистики $l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(X^{(t)}, \eta_t)$ по распределениям, задаваемым гипотезами $H_{f,\delta}$ и H_{f^*,δ^*} .

Поскольку $p_{f,\lambda,\delta}(x, z) = r_{f,\lambda,\delta}(x, z) p(x, z)$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{f,\delta} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(X^{(t)}, \eta_t) &= \int l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(x, y) p_{f,\lambda,\delta}(x, y) dx dy = \\ &= \int l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(x, y) r_{f,\lambda,\delta}(x, y) p(x, y) dx dy = \\ &= \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(X^{(t)}, \eta_t) r_{f,\lambda,\delta}(X^{(t)}, \eta_t) \right]. \end{aligned}$$

Из разложений (15), (16) следует, что

$$\begin{aligned} r_{f,\lambda,\delta}(x, z) &= 1 + \lambda z a_1(f, \delta, x) + O(\lambda^2), \\ l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(x, z) &= \lambda z (a_1(f, \delta, x) - a_1(f^*, \delta^*, x)) + \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \left[(z^2 - 1) (a_2(f, \delta, x) - a_2(f^*, \delta^*, x)) + \right. \\ &\left. + z^2 (a_1^2(f^*, \delta^*, x) - a_1^2(f, \delta, x)) \right] + O(\lambda^3), \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(x, z) r_{f,\lambda,\delta}(x, z) &= \lambda z (a_1(f, \delta, x) - a_1(f^*, \delta^*, x)) + \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \left[(z^2 - 1) (a_2(f, \delta, x) - a_2(f^*, \delta^*, x)) + \right. \\ &\left. + z^2 (a_1(f, \delta, x) - a_1(f^*, \delta^*, x))^2 \right] + O(\lambda^3). \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda = 0$ при гипотезе $H^{(0)}$, то $\mathbf{E}^{(0)} \eta_t = 0$, $\mathbf{E}^{(0)} \eta_t^2 = 1$. С учетом этого для математического ожидания $\mathbf{E}_{f,\delta} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(X^{(t)}, \eta_t)$ получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{f,\delta} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(X^{(t)}, \eta_t) &= \\ &= \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}(X^{(t)}, \eta_t) r_{f,\lambda,\delta}(X^{(t)}, \eta_t) \right] \sim \frac{\lambda^2}{2} h_{f,f^*,\delta,\delta^*}. \end{aligned} \quad (25)$$

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{f,\delta} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}^2 \left(X^{(t)}, \eta_t \right) &= \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(X^{(t)}, \eta_t \right) r_{f,\lambda,\delta} \left(X^{(t)}, \eta_t \right) \right]^2 = \\ &= \mathbf{E}^{(0)} \left[\lambda^2 \eta_t^2 \left(a_1 \left(f, \delta, X^{(t)} \right) - a_1 \left(f^*, \delta^*, X^{(t)} \right) \right) \right]^2 + O \left(\lambda^3 \right) = \\ &= \lambda^2 \mathbf{E}^{(0)} \left[a_1 \left(f, \delta, X^{(t)} \right) - a_1 \left(f^*, \delta^*, X^{(t)} \right) \right]^2 + O \left(\lambda^3 \right) = \lambda^2 h_{f,f^*,\delta,\delta^*} + O \left(\lambda^3 \right), \end{aligned}$$

то можно заключить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{f,\delta} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(X^{(t)}, \eta_t \right) &= \mathbf{E}_{f,\delta} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}^2 \left(X^{(t)}, \eta_t \right) - \left[\mathbf{E}_{f,\delta} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(X^{(t)}, \eta_t \right) \right]^2 = \\ &= \lambda^2 h_{f,f^*,\delta,\delta^*} - \frac{\lambda^4}{4} h_{f,f^*,\delta,\delta^*}^2 + O \left(\lambda^3 \right) \sim \lambda^2 h_{f,f^*,\delta,\delta^*}. \end{aligned}$$

Подобными аналогичными рассуждениями формально доказывается, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{f^*,\delta^*} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(X^{(t)}, \eta_t \right) &= \\ &= \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(X^{(t)}, \eta_t \right) r_{f^*,\lambda,\delta^*} \left(X^{(t)}, \eta_t \right) \right] \sim -\frac{\lambda^2}{2} h_{f,f^*,\delta,\delta^*}, \quad (26) \\ \mathbf{D}_{f^*,\delta^*} l_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(X^{(t)}, \eta_t \right) &\sim \lambda^2 h_{f,f^*,\delta,\delta^*}. \end{aligned}$$

Поскольку векторы $(X^{(t)}, \eta_t), t = 1, 2, \dots$, независимы в совокупности, то выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{f,\delta} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right) &\sim \frac{n\lambda^2}{2} h_{f,f^*,\delta,\delta^*} = \frac{\gamma}{2} h_{f,f^*,\delta,\delta^*}, \\ \mathbf{E}_{f^*,\delta^*} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right) &\sim -\frac{n\lambda^2}{2} h_{f,f^*,\delta,\delta^*} = -\frac{\gamma}{2} h_{f,f^*,\delta,\delta^*}, \\ \mathbf{D}_{f,\delta} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(X^{(t)}, \eta_t \right) &\sim \mathbf{D}_{f^*,\delta^*} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(X^{(t)}, \eta_t \right) \sim \gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*}. \end{aligned}$$

Следующим этапом является доказательство асимптотической нормальности статистики логарифма отношения правдоподобия $L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right)$ при $n \rightarrow \infty$.

Для этого необходимо показать, что для статистики $L_{f,\delta} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right) = \sum_{t=1}^n l_{f,\lambda,\delta} \left(X^{(t)}, \eta_t \right)$ имеет место локальная асимптотическая нормальность, для чего достаточно проверить выполнение достаточных условий локальной асимптотической нормальности [15, с. 109].

Действительно, из (5) с учетом соотношения $n\lambda^2 = \gamma = \text{const} > 0$ получаем следующее разложение:

$$\begin{aligned} \frac{p_{f,\lambda,\delta}(x,z)}{p(x,z)} &= \mathbf{E}_\delta \left[\exp \left\{ \lambda z f(x \oplus \varepsilon) - \frac{\lambda^2 f^2(x \oplus \varepsilon)}{2} \right\} \right] = \\ &= 1 + \lambda z a_1(f, \delta, x) + R(f, \lambda, \delta, x, z) = \\ &= 1 + \sqrt{\frac{\gamma}{n}} z a_1(f, \delta, x) + R(f, \lambda, \delta, x, z). \end{aligned}$$

Поскольку $p_{f,\lambda,\delta}(x,z)$ и $p(x,z)$ являются плотностями распределений, то $\mathbf{E}^{(0)}(\eta_t a_1(f, \delta, X^{(t)})) = 0$ и $\mathbf{E}^{(0)}R(f, \lambda, \delta, X^{(t)}, \eta_t) = 0$.

Теперь для доказательства выполнения условия [15, с. 109], которое в данном случае принимает вид

$$\sum_{t=1}^n \lambda^2 R(f, \lambda, \delta, X^{(t)}, \eta_t) \xrightarrow{P} 0,$$

достаточно проверить, что для последовательности случайных величин $R(f, \lambda, \delta, X^{(t)}, \eta_t)$, $t = 1, 2, \dots$, выполняется закон больших чисел [5, с. 188].

Выполнение закона больших чисел, в свою очередь, следует из того, что $R(f, \lambda, \delta, x, z) = O(e^{zd})$, $z \rightarrow \infty$, для некоторого $d < \infty$ и что члены последовательности $R(f, \lambda, \delta, X^{(t)}, \eta_t)$, $t = 1, 2, \dots$, имеют моменты любого порядка.

Из того факта, что статистика $L_{f,\delta} \left(\{ (X^{(t)}, \eta_t) \}_{t=1}^n \right)$ при гипотезе $H^{(0)}$ локально асимптотически нормальна (аналогично доказывается, что статистика $L_{f^*,\delta^*} \left(\{ (X^{(t)}, \eta_t) \}_{t=1}^n \right)$ также локально асимптотически нормальна), с учетом первой леммы Ле Кама [4, с. 256] и признака контигуальности вероятностных мер [14, с. 20, признак 3.5] заключаем, что распределения $p_{f,\lambda,\delta}(x,z)$ и $p(x,z)$ ($p_{f^*,\lambda,\delta^*}(x,z)$ и $p(x,z)$ соответственно) контигуальны при $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно, распределения $p_{f,\lambda,\delta}(x,z)$ и $p_{f^*,\lambda,\delta^*}(x,z)$ также контигуальны.

Теперь воспользуемся третьей леммой Ле Кама [4, с. 263], из которой следует, что статистика $L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \left(\{ (X^{(t)}, \eta_t) \}_{t=1}^n \right)$ асимптотически нормальна как при гипотезе $H_{f,\delta}$, так и при гипотезе H_{f^*,δ^*} . Тем самым утверждения (22), (23) доказаны.

Для доказательства (24) проведем следующие рассуждения. Из (25), (26) следует, что при вычислении асимптотически минимального объема выборки $n(f, f^*, \delta, \delta^*)$ для заданных вероятностей ошибок первого и второго рода α, β соответственно нужно учесть следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{f,\delta} (L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} > C_{\alpha,n}) = \\ &= \mathbf{P}_{f,\delta} \left(\frac{L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} - \mathbf{E}_{f,\delta} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}{\sqrt{\mathbf{D} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}} > \frac{C_{\alpha,n} - \mathbf{E}_{f,\delta} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}{\sqrt{\mathbf{D} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}} \right) \sim \\ & \sim 1 - \Phi \left(\frac{C_{\alpha,n} - \mathbf{E}_{f,\delta} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}{\sqrt{\mathbf{D} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}} \right) + o(1) = \alpha + o(1), \\ & \mathbf{P}_{f^*,\delta^*} (L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} \leq C_{\alpha,n}) = \\ &= \mathbf{P}_{f^*,\delta^*} \left(\frac{L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} - \mathbf{E}_{f^*,\delta^*} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}{\sqrt{\mathbf{D} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}} \leq \frac{C_{\alpha,n} - \mathbf{E}_{f^*,\delta^*} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}{\sqrt{\mathbf{D} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}} \right) \sim \\ & \sim \Phi \left(\frac{C_{\alpha,n} - \mathbf{E}_{f^*,\delta^*} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}{\sqrt{\mathbf{D} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}} \right) + o(1) = \beta + o(1), \end{aligned}$$

откуда, проводя стандартные рассуждения, заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}_{f,\delta} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} - C_{\alpha,n}}{\sqrt{\mathbf{D} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}} &= \zeta_\alpha + o(1), \\ \frac{C_{\alpha,n} - \mathbf{E}_{f^*,\delta^*} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}{\sqrt{\mathbf{D} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}}} &= \zeta_\beta + o(1). \end{aligned}$$

Далее,

$$\mathbf{E}_{f,\delta} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} - \mathbf{E}_{f^*,\delta^*} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*} = (\zeta_\alpha + \zeta_\beta) \sqrt{\mathbf{D} L_{f,f^*,\lambda,\delta,\delta^*}} + o(1),$$

откуда следует, что при $n \rightarrow \infty, \lambda = \sqrt{\frac{\gamma}{n}} \rightarrow 0$

$$\gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*} = (\zeta_\alpha + \zeta_\beta) \sqrt{\gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*}} + o(1),$$

что, в свою очередь, приводит к соотношению $n(f, f^*, \delta, \delta^*) \sim \frac{(\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2}{\lambda^2 h_{f,f^*,\delta,\delta^*}}$. $\square$

Замечание 3. Если

$$h_{f,f^*} = \mathbf{E}^{(0)} \left(a_1 \left(f, \delta, X^{(t)} \right) - a_1 \left(f^*, \delta^*, X^{(t)} \right) \right)^2 = 0,$$

то для получения содержательных результатов потребуется использовать члены более высоких порядков в разложении соответствующих плотностей и логарифма статистики отношения правдоподобия.

3.2. Асимптотически оптимальные критерии различения гипотез H_f и H_{f^*}

В настоящем разделе рассматриваются критерии различения гипотез H_f и H_{f^*} при $\delta = \text{const}$. В частности, подобная задача на практике может интерпретироваться как задача различения КПКС, характеризующихся разными функциями f, f^* .

Теорема 2. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $n\lambda^2 = \gamma = \text{const} > 0$, $\delta = \text{const}$, $f \neq f^*$ и

$$h_{f,f^*} = \mathbf{E}^{(0)} \left(a_1 \left(f, \delta, X^{(t)} \right) - a_1 \left(f^*, \delta, X^{(t)} \right) \right)^2 > 0$$

($a_k(f, \delta, x)$ определены в (8)).

Тогда при гипотезе H_f

$$\mathcal{L}_f(L_{f,f^*}) \Rightarrow \mathcal{N} \left(\frac{\gamma h_{f,f^*}}{2}; \gamma h_{f,f^*} \right), \quad (27)$$

при гипотезе H_{f^*}

$$\mathcal{L}_{f^*}(L_{f,f^*}) \Rightarrow \mathcal{N} \left(-\frac{\gamma h_{f,f^*}}{2}; \gamma h_{f,f^*} \right). \quad (28)$$

Для минимального объема выборки, позволяющего различать гипотезы $H_{f,\delta}$ и H_{f^*,δ^*} с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода α, β соответственно, справедлива асимптотическая формула

$$n(f, f^*) \sim \frac{(\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2}{\lambda^2 h_{f,f^*}}. \quad (29)$$

Доказательство. Полагая $\delta = \delta^* = \text{const}$ в доказательстве теоремы 1, получаем утверждения (27), (28). Формула (29) выводится стандартным методом из (27), (28). $\square$

3.3. Асимптотически оптимальные критерии различения гипотез H_δ и H_{δ^*}

Настоящий раздел посвящен построению асимптотически оптимальных критериев различения гипотез H_δ и H_{δ^*} при различных соотношениях между

параметрами δ и δ^* , а также определению асимптотически минимального объема выборки для различения указанных гипотез.

Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$. Рассмотрим различные варианты изменения параметров δ и δ^* :

- 1) $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \text{const}$, $\delta \neq \delta^*$;
- 2) $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \rho\lambda$, $\rho = \text{const} > 0$;
- 3) $\delta = \rho\lambda$, $\delta^* = \rho^*\lambda$, $\rho = \text{const} > 0$, $\rho^* = \text{const} > 0$, $\rho \neq \rho^*$.

Рассмотрим отдельно каждый случай.

Случай 1: $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \text{const}$, $\delta \neq \delta^*$.

Теорема 3. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $n\lambda^2 = \gamma = \text{const}$, $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \text{const}$, $\delta \neq \delta^*$ и

$$g_{\delta, \delta^*} = \mathbf{E}^{(0)} \left(a_1(f, \delta, X^{(t)}) - a_1(f, \delta^*, X^{(t)}) \right)^2 > 0$$

($a_k(f, \delta, x)$ определены в (8)). Тогда при гипотезе H_δ

$$\mathcal{L}_\delta(L_{f, \delta, \lambda, \delta, \delta^*}) \Rightarrow \mathcal{N}\left(\frac{\gamma g_{\delta, \delta^*}}{2}; \gamma g_{\delta, \delta^*}\right); \quad (30)$$

при гипотезе H_{δ^*}

$$\mathcal{L}_{\delta^*}(L_{f, \delta, \lambda, \delta, \delta^*}) \Rightarrow \mathcal{N}\left(-\frac{\gamma g_{\delta, \delta^*}}{2}; \gamma g_{\delta, \delta^*}\right). \quad (31)$$

Для минимального объема выборки, позволяющего различать гипотезы $H_{f, \delta}$ и H_{f^*, δ^*} с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода α, β соответственно, справедлива асимптотическая формула

$$n(\delta, \delta^*) \sim \frac{(\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2}{\lambda^2 g_{\delta, \delta^*}}. \quad (32)$$

Доказательство. Для доказательства (30), (31) следует в теореме 1 положить $\hat{f} = f^*$. Формула (32) выводится стандартным методом из (30), (31). $\square$

Замечание 4. Для важного в практических приложениях случая, когда рассматривается функция $f(x) = \|x\|$ и $\delta = 0$, $\delta^* = 1$, в соответствии со следствием 1 имеем $a_1(\|x\|, 0, x) = \frac{m}{2}$, $a_1(\|x\|, 1, x) = \|x\|$, и, таким образом, $g_{\delta, \delta^*} = \frac{m}{4}$. В рассматриваемом случае из теоремы 3 в качестве частного случая получаем теорему 1 работы [6].

Случай 2: $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \rho\lambda$, $\rho = \text{const} > 0$.

Теорема 4. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $n\lambda^2 = \gamma = \text{const}$, пусть $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \rho\lambda$, $\rho = \text{const} > 0$ и

$$v_{\delta, \rho\lambda} = \mathbf{E}^{(0)} \left(a_1(f, \delta, X^{(t)}) - a_{10}(f, X^{(t)}) \right)^2 > 0,$$

($a_k(f, \delta, x)$, $a_{kj}(f, x)$ определены в (8), (9) соответственно).

Тогда при гипотезе H_δ

$$\mathcal{L}_\delta(L_{f, f, \lambda, \delta, \rho\lambda}) \Rightarrow \mathcal{N}\left(\frac{\gamma v_{\delta, \rho\lambda}}{2}; \gamma v_{\delta, \rho\lambda}\right), \quad (33)$$

при гипотезе H_{δ^*}

$$\mathcal{L}_{\rho\lambda}(L_{f, f, \lambda, \delta, \rho\lambda}) \Rightarrow \mathcal{N}\left(-\frac{\gamma v_{\delta, \rho\lambda}}{2}; \gamma v_{\delta, \rho\lambda}\right). \quad (34)$$

Для минимального объема выборки, позволяющего различать гипотезы H_δ и H_{δ^*} с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода α, β соответственно, справедлива асимптотическая формула

$$n(\delta, \rho\lambda) \sim \frac{(\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2}{\lambda^2 v_{\delta, \rho\lambda}}. \quad (35)$$

Доказательство в основном следует идее доказательства теоремы 1, поэтому приведем только его основные этапы.

Аналогично доказательству теоремы 1 устанавливается, что

$$\mathbf{E}_{\delta, \delta^*} l_{\delta, \delta^*}(X^{(t)}, \eta_t) = \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{\delta, \delta^*}(X^{(t)}, \eta_t) r_{f, \lambda, \delta}(X^{(t)}, \eta_t) \right]$$

и

$$\mathbf{E}_{\delta^*} l_{\delta, \delta^*}(X^{(t)}, \eta_t) = \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{\delta, \delta^*}(X^{(t)}, \eta_t) r_{f, \lambda, \rho\lambda}(X^{(t)}, \eta_t) \right].$$

Используя разложение (21), нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} l_{\delta, \delta^*}(x, z) &= \lambda z (a_1(f, \delta, x) - a_{10}(f, x)) + \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \left[(z^2 - 1) (a_2(f, \delta, x) - a_{20}(f, x)) + z^2 (a_1(f, \delta, x) - a_{10}(f, x)) \right] + O(\lambda^3), \\ r_{f, \lambda, \delta}(x, z) &= 1 + \lambda z a_1(f, \delta, x) + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$l_{\delta, \delta^*}(x, z) r_{f, \lambda, \delta}(x, z) = \lambda z (a_1(f, \delta, x) - a_{10}(f, x)) +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2} \left[(z^2 - 1) (a_2(f, \delta, x) - a_{20}(f, x)) + \right. \\ \left. + z^2 (a_1(f, \delta, x) - a_{10}(f, x))^2 \right] + O(\lambda^3).$$

С учетом того, что $\mathbf{E}^{(0)}\eta_t = 0$, $\mathbf{E}^{(0)}\eta_t^2 = 1$, устанавливается, что

$$\mathbf{E}_{\delta} l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) = \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) r_{f, \lambda, \delta} (X^{(t)}, \eta_t) \right] \sim \frac{\lambda^2}{2} v_{\delta, \rho \lambda}$$

и

$$\mathbf{D}_{\delta} l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) \sim \lambda^2 v_{\delta, \rho \lambda}.$$

Аналогично доказывается, что

$$l_{\delta, \delta^*} (x, z) r_{f, \lambda, \delta^*} (x, z) = \lambda z (a_1(f, \delta, x) - a_{10}(f, x)) + \\ + \frac{\lambda^2}{2} \left[(z^2 - 1) (a_2(f, \delta, x) - a_{20}(f, x)) - z^2 (a_1(f, \delta, x) - a_{10}(f, x))^2 \right] + O(\lambda^3),$$

откуда следует, что

$$\mathbf{E}_{\delta^*} l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) = \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) r_{f, \lambda, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) \right] \sim -\frac{\lambda^2}{2} v_{\delta, \rho \lambda}$$

и

$$\mathbf{D}_{\delta} l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) \sim \lambda^2 v_{\delta, \rho \lambda}.$$

В силу независимости векторов $(X^{(t)}, \eta_t)$ при различных t и соотношения $n\lambda^2 = \gamma = \text{const}$ устанавливается, что

$$\mathbf{E}_{\delta} L_{\delta, \delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right) \sim \frac{\gamma}{2} v_{\delta, \rho \lambda},$$

$$\mathbf{E}_{\delta^*} L_{\delta, \delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right) \sim -\frac{\gamma}{2} v_{\delta, \rho \lambda},$$

$$\mathbf{D}_{\delta} L_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) \sim \mathbf{D}_{\delta^*} L_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) \sim \gamma v_{\delta, \rho \lambda}.$$

Далее доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1, откуда следуют утверждения (33), (34). Соотношение (35) выводится стандартным методом из (33), (34). $\square$

При $f(x) = \|x\|$, $\delta = 0$ в качестве важного для приложений частного случая из теоремы 4 следует теорема 2 работы [6].

Замечание 5. Для получения содержательных результатов при $\delta^* = \rho\lambda$, $v_{\delta,\delta^*} = \mathbf{E}^{(0)}(a_1(f, \delta, X^{(t)}) - a_{10}(f, X^{(t)}))^2 = 0$ потребуется использовать члены более высоких порядков в разложении соответствующих плотностей и логарифма статистики отношения правдоподобия.

Случай 3: $\delta = \rho\lambda$, $\delta^* = \rho^*\lambda$, $\rho = \text{const} > 0$, $\rho^* = \text{const} > 0$, $\rho \neq \rho^*$.

Теорема 5. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda \equiv \lambda(n) \rightarrow 0$, $n\lambda^4 = \gamma = \text{const}$, $\delta = \rho\lambda$, $\delta^* = \rho^*\lambda$, $\rho = \text{const} > 0$, $\rho^* = \text{const} > 0$, $\rho \neq \rho^*$ и

$$s_{\rho,\rho^*} = (\rho - \rho^*)^2 \mathbf{E}^{(0)} a_{11}^2(f, X^{(t)}) > 0$$

($a_{kj}(f, x)$ определены в (9)). Тогда при гипотезе H_δ

$$\mathcal{L}_\delta(L_{\delta,\delta^*}) \Rightarrow \mathcal{N}\left(\frac{\gamma s_{\rho,\rho^*}}{2}; \gamma s_{\rho,\rho^*}\right), \quad (36)$$

при гипотезе H_{δ^*}

$$\mathcal{L}_{\delta^*}(L_{\delta,\delta^*}) \Rightarrow \mathcal{N}\left(-\frac{\gamma s_{\rho,\rho^*}}{2}; \gamma s_{\rho,\rho^*}\right). \quad (37)$$

Для минимального объема выборки, позволяющего различать гипотезы H_δ и H_{δ^*} с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода α, β соответственно, справедлива асимптотическая формула

$$n(\rho, \rho^*) \sim \frac{(\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2}{\lambda^4 s_{\rho,\rho^*}}. \quad (38)$$

Доказательство. Напомним, что $b_{ij}(f, \rho, x) = a_{ij}(f, x) \rho^j$ (см. (12)). Из леммы 7 следует, что в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} r_{f,\lambda,\rho\lambda}(x, z) &= 1 + \lambda z a_{10}(f, x) + \\ &+ \lambda^2 \left[\frac{z^2 - 1}{2} a_{20}(f, x) + z a_{11}(f, x) \rho \right] + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (39)$$

Из леммы 10 с учетом леммы 8 следует разложение

$$l_{\delta,\delta^*}(x, z) = \lambda^2 [z a_{11}(f, x) (\rho - \rho^*)] + \lambda^3 \left[\frac{z^2 - 1}{2} a_{21}(f, x) (\rho - \rho^*) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -z^2 a_{10}(f, x) a_{11}(f, x) (\rho - \rho^*) + z a_{12}(f, x) (\rho^2 - (\rho^*)^2) \Big] + \\
& + \lambda^4 \left[\frac{z^3 - 3z}{6} a_{31}(f, x) (\rho - \rho^*) + \right. \\
& + \frac{z^2 - 1}{2} a_{22}(f, x) (\rho^2 - (\rho^*)^2) - \frac{z^3 - z}{2} (\rho - \rho^*) (a_{10}(f, x) a_{21}(f, x) + \\
& + a_{20}(f, x) a_{11}(f, x)) + z^3 a_{10}^2(f, x) a_{11}(f, x) (\rho - \rho^*) + \\
& \left. + \frac{z^2}{2} a_{11}^2(f, x) ((\rho^*)^2 - \rho^2) z a_{13}(f, x) (\rho^3 - (\rho^*)^3) \right] + O(\lambda^5). \quad (40)
\end{aligned}$$

Из (39), (40) следует, что

$$\begin{aligned}
& l_{\delta, \delta^*}(x, z) r_{f, \lambda, \rho \delta}(x, z) = \\
& = \lambda^2 z a_{11}(f, x) (\rho - \rho^*) + \lambda^3 \left[\frac{z^2 - 1}{2} a_{21}(f, x) (\rho - \rho^*) + z a_{12}(f, x) (\rho^2 - (\rho^*)^2) \right] + \\
& + \lambda^4 \left[\frac{z^3 - 3z}{6} a_{31}(f, x) (\rho - \rho^*) + \frac{z^2 - 1}{2} a_{22}(f, x) (\rho^2 - (\rho^*)^2) + \right. \\
& \left. + z a_{13}(f, x) (\rho^3 - (\rho^*)^3) + \frac{z^2}{2} a_{11}^2(f, x) (\rho^* - \rho)^2 \right] + O(\lambda^5) \quad (41)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& l_{\delta, \delta^*}(x, z) r_{f, \lambda, \rho^* \delta}(x, z) = \\
& = \lambda^2 z a_{11}(f, x) (\rho - \rho^*) + \lambda^3 \left[\frac{z^2 - 1}{2} a_{21}(f, x) (\rho - \rho^*) + z a_{12}(f, x) (\rho^2 - (\rho^*)^2) \right] + \\
& + \lambda^4 \left[\frac{z^3 - 3z}{6} a_{31}(f, x) (\rho - \rho^*) + \frac{z^2 - 1}{2} a_{22}(f, x) (\rho^2 - (\rho^*)^2) + \right. \\
& \left. + z a_{13}(f, x) (\rho^3 - (\rho^*)^3) - \frac{z^2}{2} a_{11}^2(f, x) (\rho^* - \rho)^2 \right] + O(\lambda^5). \quad (42)
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{E}_{\delta} l_{\delta, \delta^*}(X^{(t)}, \eta_t) = \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{\delta, \delta^*}(X^{(t)}, \eta_t) r_{f, \lambda, \rho \lambda}(X^{(t)}, \eta_t) \right],$$

то с учетом соотношений $\mathbf{E}^{(0)} \eta_t = 0$, $\mathbf{E}^{(0)} \eta_t^2 = 1$, $\mathbf{E}^{(0)} \eta_t^3 = 0$ и разложений (41), (42) заключаем, что

$$\mathbf{E}_{\delta=\rho \lambda} l_{\delta=\rho \lambda, \delta^*=\rho^* \lambda}(X^{(t)}, \eta_t) = \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{\delta=\rho \lambda, \delta^*=\rho^* \lambda}(X^{(t)}, \eta_t) r_{f, \lambda, \rho \lambda}(X^{(t)}, \eta_t) \right] =$$

$$= \frac{\lambda^4}{2} (\rho^* - \rho)^2 \mathbf{E}^{(0)} a_{11}^2 (f, X^{(t)}) \sim \frac{\lambda^4}{2} s_{\rho, \rho^*}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\delta^*} l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) &= \mathbf{E}^{(0)} \left[l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) r_{f, \lambda, \rho^* \lambda} (X^{(t)}, \eta_t) \right] = \\ &= -\frac{\lambda^4}{2} (\rho^* - \rho)^2 \mathbf{E}^{(0)} a_{11}^2 (f, X^{(t)}) \sim -\frac{\lambda^4}{2} s_{\rho, \rho^*}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathbf{D}_{\delta} l_{\delta, \delta} (X^{(t)}, \eta_t) \sim \mathbf{D}_{\delta^*} l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) \sim \lambda^4 s_{\rho, \rho^*}. \quad (45)$$

В силу независимости векторов $(X^{(t)}, \eta_t)$ при различных t с учетом соотношений $n\lambda^4 = \gamma = \text{const}$, (43)–(45) и свойств математических ожиданий и дисперсий получаем:

$$\mathbf{E}_{\delta} L_{\delta, \delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right) \sim \frac{\gamma}{2} s_{\rho, \rho^*}, \quad (46)$$

$$\mathbf{E}_{\delta^*} L_{\delta, \delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right) \sim -\frac{\gamma}{2} s_{\rho, \rho^*}, \quad (47)$$

$$\mathbf{D}_{\delta} L_{\delta, \delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right) \sim \mathbf{D}_{\delta^*} L_{\delta, \delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right) \sim \gamma s_{\rho, \rho^*}. \quad (48)$$

Для доказательства асимптотической нормальности статистики $L_{\delta, \delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right)$ при гипотезах H_{δ} и H_{δ^*} воспользуемся неравенством Берри–Эссеена (см., например, формулу (2.4) в [13, с. 158]). Для этого оценим сверху третий абсолютный центральный момент статистики

$$l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) = \lambda^2 \eta_t a_{11} (f, X^{(t)}) (\rho - \rho^*) + O(\lambda^3).$$

С учетом того, что $\mathbf{E}_{\delta} l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) = O(\lambda^4)$, получаем:

$$\mathbf{E}_{\delta} \left| l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) - \mathbf{E}_{\delta} l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) \right|^3 < C \lambda^6,$$

где C — некоторая положительная постоянная, и, следовательно,

$$\frac{\mathbf{E}_{\delta} \left| l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) - \mathbf{E}_{\delta} l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t) \right|^3}{(\mathbf{D}_{\delta} l_{\delta, \delta^*} (X^{(t)}, \eta_t))^{\frac{3}{2}}} = O(1).$$

Таким образом, используя неравенство Берри–Эссеена, можно утверждать, что центрированная и нормированная статистика $L_{\delta, \delta^*} \left(\left\{ (X^{(t)}, \eta_t) \right\}_{t=1}^n \right)$ при гипотезах H_{δ} и H_{δ^*} будет иметь в пределе стандартное нормальное распределение. Отсюда с учетом (46)–(48) следует утверждение теоремы. Формула (38) выводится стандартным методом из формул (36), (37). $\square$

Выводы

1. Как показали проведенные исследования, параметры предельных распределений логарифма статистики отношения правдоподобия критерия различения гипотез $H_{f,\delta}$ и H_{f^*,δ^*} при $\lambda \rightarrow 0$ существенно зависят от вида функций f, f^* и вида скалярного параметра δ . Эти параметры существенно различаются при $\delta = \text{const}$ и $\delta \rightarrow 0$ (см. теоремы 2 и 3).

2. В задаче различения гипотез H_δ и H_{δ^*} при $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \text{const}$, $\delta \neq \delta^*$ либо при $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \rho\lambda$, $\rho = \text{const} > 0$, а также в задаче различения гипотез $H_{f,\delta}$ и $H_{f^*,\delta}$ минимальный объем выборки имеет порядок $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ (см. теоремы 2–4), в то время как при $\delta = \rho\lambda$, $\delta^* = \rho^*\lambda$, $\rho = \text{const} > 0$, $\rho^* = \text{const} > 0$, $\rho \neq \rho^*$ — величину порядка $O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$ (см. теорему 5). Подобный эффект, по-видимому, связан с различным характером изменения параметров δ и δ^* в различных схемах серий: $n\lambda^2 = \text{const} > 0$ либо $n\lambda^4 = \text{const} > 0$.

3. Определенный интерес представляют построение асимптотически оптимальных критериев различения гипотез и расчет асимптотически минимального объема выборки в следующих случаях:

при обобщении модели (1), когда вместо операции $\oplus$ используется любая другая операция (например, умножение или сложение по некоторому модулю);

исследование случая векторного параметра $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ (некоторые результаты по указанному направлению получены автором в [9], их развитие будет представлено в следующей работе);

исследование модели (1) с помехами, имеющими непрерывные отличные от гауссовского распределения (по аналогии с [17, 18]);

исследование случая $\delta = \lambda^\tau$ (например, $\delta = \sqrt{\lambda}$);

исследование векторов $\{\varepsilon^{(t)}\}_{t=1}^\infty$ с зависимыми компонентами (например, последовательности k -зависимых случайных векторов).

Список литературы

- [1] Арбеков И. М., “Оптимальная дискретизация наблюдений слабых сигналов при ограничении на скорость квантования”, Проблемы передачи информации, **34**:1 (1998), 69–76.
- [2] Боровков А. А., *Математическая статистика* (4-е изд.), Санкт-Петербург–Москва–Краснодар: Лань, 2010, 704 с.
- [3] Вернер М., *Основы кодирования*, М.: Техносфера, 2004, 288 с.
- [4] Гаек Я., Шидак З., *Теория ранговых критериев*, М.: Наука, 1971, 376 с.
- [5] Гнеденко Б. В., *Курс теории вероятностей* (6-е изд.), М.: Наука, 1988, 448 с.

- [6] Иванов А. В., “Асимптотически наиболее мощный критерий различения гипотез о распределении случайного вектора”, 10-я Общерос. науч. конф. МаБИТ-2011 (Материалы секции «Математические проблемы информационной безопасности»), М.: МАКС-ПРЕСС, 2012, 93-97.
- [7] Иванов А. В., “Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения гипотез о распределении случайного вектора”, *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, **20:2** (2013), 139–141.
- [8] Иванов А. В., “Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения гипотез о распределении случайного вектора. II”, *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, **20:4** (2013), 548–550.
- [9] Иванов А. В., “Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения гипотез о распределении случайного вектора. III”, *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, **21:1** (2014), 58–60.
- [10] Максимов Ю. И., “Построение и анализ статистических критериев для некоторых схем случайных последовательностей со значениями из поля $GF(q)$ ”, *Труды по дискретной математике*, **5** (2002), 159–166.
- [11] Пазизин С. В., “Обнаружение и прием последовательности сигналов, искаженных случайной помехой и независимым шумом”, *Проблемы передачи информации*, **34:1** (1998), 46–55.
- [12] Пазизин С. В., “Вероятности правильного декодирования для канала с аддитивным нормальным шумом и двоичного симметричного канала при случайном выборе кодовых слов”, *Дискретная математика*, **12:2** (2000), 93–98.
- [13] Петров В. В., *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, М.: Наука, 1987, 320 с.
- [14] Русас Дж., *Континуальность вероятностных мер*, М.: Мир, 1975, 256 с.
- [15] Чибисов Д. М., “Теорема о допустимых критериях и ее применение к одной асимптотической задаче проверки гипотез”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **XXI:1** (1967), 96–111.
- [16] Arbekov I. M., “Asymptotically optimum detection of a weak signal sequence with random time delays”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **41:4** (1995), 1169–1174.
- [17] Kassam S. A., *Signal detection in non-gaussian noise*, New-York: Springer-Verlag, 1988, 235 p.
- [18] Miller J. H., Thomas J. B., “Detectors for discrete-time signals in non-gaussian noise”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **18:2** (1972), 241–250.