Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, А. М. Шойтов, Многократные повторения длинных цепочек в конечной цепи Маркова, *Матем. вопр. криптогр.*, 2015, том 6, выпуск 3, 117–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 04:33:03

УДК: 519.212.2 + 519.214

Многократные повторения длинных цепочек в конечной цепи Маркова

В. Г. Михайлов¹, А. М. Шойтов²

¹Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

²Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 02.VI.2015

Пусть $X_0, X_1, \dots$ — простая эргодическая цепь Маркова с конечным числом состояний и $\tilde{\xi}_{n,k}^{(m)}(s)$ — число m -серий k -кратных повторений s -цепочек в отрезке цепи $X_0, X_1, \dots, X_{n+s+m}$. Получены достаточные условия сходимости к многомерному распределению Пуассона распределения вектора $\tilde{\Xi}_{n,k,M}(s) = (\tilde{\xi}_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \tilde{\xi}_{n,k}^{(M)}(s))$ при $n, s \rightarrow \infty$, позволяющие доказывать предельные теоремы для некоторых связанных с $\tilde{\Xi}_{n,k,M}(s)$ случайных величин.

Ключевые слова: цепь Маркова, многократные повторения s -цепочек, многомерная предельная теорема Пуассона

On multiple repetitions of long tuples in a Markov chain

V. G. Mikhailov¹, A. M. Shoitov²

¹*Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow*

²*Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow*

Abstract. Let $X_0, X_1, \dots$ be a simple ergodic Markov chain with N states and $\tilde{\xi}_{n,k}^{(m)}(s)$ be the number of m -series of k -repetitions of s -tuples in the chain segment $X_0, X_1, \dots, X_{n+s+m}$. The sufficient conditions for the distribution of the vector $\tilde{\Xi}_{n,k,M}(s) = (\tilde{\xi}_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \tilde{\xi}_{n,k}^{(M)}(s))$ to converge to the multidimensional Poisson distribution are found. This permits to prove limit theorems for the distributions of some random variables connected with $\tilde{\Xi}_{n,k,M}(s)$.

Key words: Markov chain, multiple repetitions of tuples, multidimensional Poisson limit theorem

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 117–133 (Russian).

1. Введение

Пусть последовательность $\mathbf{X} = \{X_0, X_1, \dots\}$ образует простую неразложимую ациклическую однородную цепь Маркова с состояниями $1, \dots, N$, матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = \|p_{a,b}\|$ и произвольным начальным распределением. Отметим, что такая цепь является эргодической.

Положим $Y_i(s) = (X_i, \dots, X_{i+s-1})$, $s, i = 1, 2, \dots$, и для натурального k , $k \geq 2$, рассмотрим события (здесь и далее $\bar{E}$ обозначает дополнение к событию E)

$$E_{i_1, \dots, i_k} = E_{i_1, \dots, i_k}(s) = \left\{ Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) = \dots = Y_{i_k}(s) \right\},$$

$$E_{i_1, \dots, i_k}^{(m)} = \bar{E}_{i_1-1, \dots, i_k-1} \cap \bigcap_{j=0}^{m-1} E_{i_1+j, \dots, i_k+j} \cap \bar{E}_{i_1+m, \dots, i_k+m}.$$

В [2] и [9] для события $E_{i_1, \dots, i_k}$ был использован термин « k -кратное повторение цепочки». Событие $E_{i_1, \dots, i_k}^{(m)}$ можно трактовать как серию из m k -кратных повторений $E_{i_1, \dots, i_k}, \dots, E_{i_1+m-1, \dots, i_k+m-1}$. Очевидно, что

$$\bigcap_{j=0}^{m-1} E_{i_1+j, \dots, i_k+j} = E_{i_1, \dots, i_k}(s+m-1).$$

Пусть

$$\xi_{n,k}(s) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} I\{E_{i_1, \dots, i_k}\}$$

— число k -кратных повторений s -цепочек,

$$\tilde{\xi}_{n,k}^{(m)}(s) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} I\{E_{i_1, \dots, i_k}^{(m)}\}$$

— число серий длины m , образованных k -кратными повторениями s -цепочек, начинающихся до момента n включительно, а

$$\tilde{\xi}_{n,k}(s) = \sum_{m \geq 1} \tilde{\xi}_{n,k}^{(m)}(s)$$

— общее число серий, образованных k -кратными повторениями s -цепочек, начинающихся до момента n включительно.

В работах [1–4] величины $Y_i(s)$, $\xi_{n,k}(s)$ и $\tilde{\xi}_{n,k}(s)$ рассматривались в последовательности полиномиальных испытаний. В [2–4], в частности, было

показано, что при $s, n \rightarrow \infty$ и $\mathbf{E}\tilde{\xi}_{n,k}(s) \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ распределения величин $\xi_{n,k}(s)$ и $\tilde{\xi}_{n,k}(s)$ сходятся к сложному пуассоновскому и пуассоновскому распределениям соответственно.

Задачи, связанные с совпадениями цепочек из двух независимых конечных цепей Маркова, рассматривались в [5]. Задачи о повторениях состояний и цепочек состояний в цепях Маркова в схемах с возрастающим числом исходов изучались в [6–8].

В [9] изучалось распределение величины $\tilde{\xi}_{n,2}(s)$ в неразложимой ациклической марковской цепи. В частности, были выведены достаточные условия сходимости (при $n, s \rightarrow \infty$) распределения случайной величины $\tilde{\xi}_{n,2}(s)$ к распределению Пуассона и к нормальному распределению (распределение цепи $\mathbf{X}$ считалось фиксированным). В качестве следствий этих предельных теорем были получены предельные теоремы для времени первого повторения s -цепочек $\tau(s)$ и для максимальной длины повторившейся цепочки $\mu(n)$.

В настоящей работе рассматривается случай повторений произвольной кратности. Получены достаточные условия сходимости распределения случайного вектора $(\tilde{\xi}_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \tilde{\xi}_{n,k}^{(M)}(s))$ (при произвольном натуральном M) в неразложимой ациклической марковской цепи к многомерному распределению Пуассона. Эти же условия являются достаточными для сходимости распределения случайной величины $\tilde{\xi}_{n,k}(s)$ к распределению Пуассона и для сходимости распределения случайной величины $\xi_{n,k}(s)$ к сложному пуассоновскому распределению.

2. Формулировка основного результата

Пусть $p = \max_{a,b \in \{1, \dots, N\}} p_{a,b}$, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$, $\pi_r > 0$, $r = 1, \dots, N$, — стационарное распределение цепи $\mathbf{X}$, $\Pi_k = \sum_{r=1}^N \pi_r^k$. Рассмотрим матрицу $\mathbb{P}_k = \|p_{a,b}^k\|$. Матрица $\mathbb{P}_k$ является неразложимой и примитивной (см. [10]), так как расположение нулевых элементов в ней совпадает с расположением нулевых элементов в матрице $\mathbb{P}$. Пусть $\rho_k = \rho(\mathbb{P}_k) > 0$ — максимальное характеристическое число матрицы $\mathbb{P}_k$, а $(z_{k,1}, \dots, z_{k,N})$, $z_{k,r} > 0$, $r = 1, \dots, N$, — собственный вектор, соответствующий характеристическому числу ρ_k .

Согласно предложению 2 [10, с. 365] для $\mathbb{P}_k$ имеет место представление

$$\mathbb{P}_k = Z_k \rho_k \mathbb{P}'_k Z_k^{-1},$$

где Z_k — диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены числа $z_{k,1}, \dots, z_{k,N}$, а $\mathbb{P}'_k$ — стохастическая матрица. Матрица $\mathbb{P}'_k$ определяет

неразложимую и ациклическую цепь Маркова со стационарным распределением $\pi'_k = (\pi'_{k,1}, \dots, \pi'_{k,N})$, $\pi'_{k,r} > 0$, $r = 1, \dots, N$, и для некоторой константы $c_1 = c_{k,1} > 0$ при $s \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$|\mathbb{P}'_k^s - \Pi'_k| = O(e^{-c_1 s}), \quad (1)$$

где матрица Π'_k состоит из одинаковых строк π'_k , а $|A|$ — норма матрицы $A = \|a_{i,j}\|$, определяемая формулой (см. [10])

$$|A| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|. \quad (2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} (\pi'_k, z_k^{-1}) &= \sum_{r=1}^N \pi'_{k,r} z_{k,r}^{-1}, \quad (\pi^k, z_k) = \sum_{r=1}^N \pi_r^k z_{k,r}, \\ \Lambda_{s,n}(k) &= C_n^k \rho_k^{s-1} (1 - \rho_k) (\pi'_k, z_k^{-1}) (\pi^k, z_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть $n, s \rightarrow \infty$ и для фиксированного натурального $k \geq 2$ выполнены условия $\rho^k < \rho_k$, $\Lambda_{s,n}(k) \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$. Тогда:

1) при любом натуральном M распределение случайного вектора $(\tilde{\xi}_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \tilde{\xi}_{n,k}^{(M)}(s))$ сходится к M -мерному пуассоновскому распределению с производящей функцией

$$\varphi_M(z_1, \dots, z_M) = \exp \left\{ \sum_{m=1}^M \lambda \rho_k^{m-1} (1 - \rho_k) (z_m - 1) \right\}, \quad (4)$$

2) распределение случайной величины $\tilde{\xi}_{n,k}(s)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ ,

3) распределение случайной величины $\xi_{n,k}(s)$ сходится к сложному пуассоновскому распределению с производящей функцией

$$\varphi(z) = \exp \left\{ \frac{\lambda(z-1)}{1 - \rho_k z} \right\}. \quad (5)$$

Замечание 1. Пусть строки матрицы $\mathbb{P}$ являются перестановками одного и того же фиксированного вектора $(p_1, \dots, p_N)$, $P_k = \sum_{i=1}^N p_i^k$. Тогда $\rho_k = P_k > p^k$, вектор $(z_{k,1}, \dots, z_{k,N}) = (1, \dots, 1)$, а $\Lambda_{s,n} = C_n^k P_k^{s-1} (1 - P_k) \Pi_k$.

Замечание 2. В [9] приведены и другие примеры марковских цепей, для которых $p^k < \rho_k$. В общем случае вопрос выполнения этого условия требует отдельного изучения.

Замечание 3. Из условия $p^k < \rho_k$ теоремы 1 по свойствам спектрального радиуса (см. [10]) при $r \geq 2$ вытекают оценки

$$\rho_r = \rho(\mathbb{P}_r) \leq \rho(p\mathbb{P}_{r-1}) = p\rho(\mathbb{P}_{r-1}) < \rho_k^{1/k} \rho_{r-1},$$

и, следовательно, $\rho_k \leq p^{k-1}$ и

$$p < \rho_k^{1/k} < \rho_{k-1}^{1/(k-1)} < \dots < \rho_2^{1/2} < 1.$$

3. Схема доказательства теоремы 1

Введем обозначения

$$J = \{\bar{i} = (i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\},$$

$$\eta(\bar{i}, s) = I\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) = \dots = Y_{i_k}(s)\}, \quad \eta^{(m)}(\bar{i}) = I\{E_{i_1, \dots, i_k}^{(m)}\}.$$

Для любого $\bar{i}$ из J и натурального h определим множество

$$U^{(h)}(\bar{i}) = \bigcup_{t=1}^k [i_t, i_t + h - 1].$$

Для всех $r = 1, \dots, k$ положим

$$J^{(h)}(r) = \{\bar{i} \in J, \text{ множество } U^{(h)}(\bar{i}) \text{ состоит ровно из } r \text{ связных компонент}\}.$$

Очевидно, что $J = \bigcup_{r=1}^k J^{(h)}(r)$ для любого h , и, следовательно,

$$\xi_{n,k}(s) = \sum_{r=1}^k \sum_{\bar{i} \in J^{(h)}(r)} \eta(\bar{i}), \quad \tilde{\xi}_{n,k}^{(m)}(s) = \sum_{r=1}^k \sum_{\bar{i} \in J^{(h)}(r)} \eta^{(m)}(\bar{i}).$$

Возьмем $h = s^3$ и определим случайные величины

$$\delta_{n,k}^{(m)}(s) = \sum_{\bar{i} \in J^{(s^3)}(k)} \eta^{(m)}(\bar{i}).$$

Отметим сразу, что

$$\eta^{(m)}(\bar{i}) \leq \eta(\bar{i}, s + m - 1), \quad \delta_{n,k}^{(m)}(s) \leq \bar{\xi}_{n,k}^{(m)}(s) \leq \xi_{n,k}(s + m - 1). \quad (6)$$

Введем обозначения

$$\bar{\Xi}_{n,k,M}(s) = (\bar{\xi}_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \bar{\xi}_{n,k}^{(M)}(s)), \quad \Delta_{n,k,M}(s) = (\delta_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \delta_{n,k}^{(M)}(s)).$$

Обозначим через $\mathcal{L}(W)$ распределение случайной величины (или вектора) W , через $\text{Po}(\lambda)$ — распределение Пуассона с параметром λ , а через $\text{Po}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ — M -мерное распределение Пуассона с производящей функцией

$$\varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_M}(z_1, \dots, z_M) = \exp \left\{ \sum_{m=1}^M \lambda_m (z_m - 1) \right\}. \quad (7)$$

Пусть $d(\Phi, \Psi)$ — расстояние по вариации между распределениями Φ и Ψ .

Доказательство первого утверждения теоремы 1 состоит из трех шагов. Сначала доказывается соотношение

$$\mathbf{P}\{\bar{\Xi}_{n,k,M}(s) \neq \Delta_{n,k,M}(s)\} \rightarrow 0, \quad (8)$$

затем — соотношение

$$d\left(\mathcal{L}(\Delta_{n,k,M}(s)), \text{Po}((\mathbf{E}\delta_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \mathbf{E}\delta_{n,k}^{(M)}(s)))\right) \rightarrow 0. \quad (9)$$

Кроме того, доказывается соотношение

$$\text{Po}((\mathbf{E}\delta_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \mathbf{E}\delta_{n,k}^{(M)}(s))) \rightarrow \text{Po}(1 - \rho_k, \rho_k(1 - \rho_k), \dots, \rho_k^{M-1}(1 - \rho_k)). \quad (10)$$

Из (8)–(10) вытекает первое утверждение теоремы 1.

Утверждения 2) и 3) теоремы 1 доказываются по аналогичной схеме.

4. Доказательство соотношения (8)

Используя неравенство $\mathbf{P}\{X_j = b | X_i = a\} \leq p$, $j > i$, получаем для неперекрывающихся цепочек длины s ($i_r \geq i_{r-1} + s$, $r = 2, \dots, k$) оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{E_{i_1, \dots, i_k}\} &= \mathbf{P}\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) = \dots = Y_{i_k}(s)\} = \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_s) \in \{1, \dots, N\}^s} \mathbf{P}\{X_{i_1} = x_1\} \mathbf{P}\{X_{i_2} = x_1 | X_{i_1+s-1} = x_s\} \prod_{r=2}^s p_{x_{r-1}, x_r} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \mathbf{P}\left\{X_{i_3} = x_1 | X_{i_2+s-1} = x_s\right\} \prod_{r=2}^s p_{x_{r-1}, x_r} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}\left\{X_{i_k} = x_1 | X_{i_{k-1}+s-1} = x_s\right\} \times \\ & \times \prod_{r=2}^s p_{x_{r-1}, x_r} \leq \sum_{(x_1, \dots, x_s) \in \{1, \dots, N\}^s} \mathbf{P}\left\{X_{i_1} = x_1\right\} p^{s(k-1)} p_{x_1, x_2} p_{x_2, x_3} \cdot \dots \cdot p_{x_{s-1}, x_s} = p^{s(k-1)}. \end{aligned}$$

Значит, для неперекрывающихся цепочек длины $s + m - 1$, т. е. при $i_r \geq i_{r-1} + s + m - 1, r = 2, \dots, k, m \geq 1$

$$\mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s + m - 1) = Y_{i_2}(s + m - 1) = \dots = Y_{i_k}(s + m - 1)\right\} \leq p^{(s+m-1)(k-1)}. \quad (11)$$

Рассмотрим сначала случай перекрывающихся цепочек длины s . Пусть для определенности перекрываются цепочки $Y_{i_1}(s)$ и $Y_{i_2}(s)$ (возможно, не только они). Возьмем из всех других компонент связности множества $U^{(s)}(\tilde{i})$ по одной представляющей их цепочке: $Y_{i_{j_2}}(s), \dots, Y_{i_{j_r}}(s)$. По аналогии с [2] и [11] заметим, что при $i_2 = i_1 + 1, \dots, i_1 + s - 1$ фиксация вектора $Y_{i_1}(i_2 - i_1) = (x_1, \dots, x_{i_2-i_1})$ однозначно определяет все компоненты вектора $Y_{i_2}(s) = (x_1, \dots, x_{i_2-i_1}, x_1, \dots)$ и векторов $Y_{i_2}(s), \dots, Y_{i_k}(s)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) = \dots = Y_{i_k}(s)\right\} \leq \\ & \leq \mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) = Y_{i_{j_2}}(s) = \dots = Y_{i_{j_r}}(s)\right\} \leq p^{sr}. \end{aligned}$$

Заменив здесь s на $s + m - 1$, получим

$$\mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s + m - 1) = Y_{i_2}(s + m - 1) = \dots = Y_{i_k}(s + m - 1)\right\} \leq p^{(s+m-1)r}. \quad (12)$$

Теперь, используя неравенства (6), получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\tilde{\xi}_{n,k}^{(m)}(s) \neq \delta_{n,k}^{(m)}(s)\right\} \leq \mathbf{E}\left(\tilde{\xi}_{n,k}^{(m)}(s) - \delta_{n,k}^{(m)}(s)\right) = \\ & = \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{\tilde{i} \in J^{(s+m-1)}(r)} \mathbf{E}\eta(\tilde{i}, s + m - 1) + \sum_{\tilde{i} \in J^{(s+m-1)}(k) \setminus J^{(s^3)}(k)} \mathbf{E}\eta(\tilde{i}, s + m - 1) \leq \\ & \leq \sum_{r=1}^{k-1} |J^{(s+m-1)}(r)| p^{(s+m-1)r} + |J^{(s+m-1)}(k) \setminus J^{(s^3)}(k)| p^{(s+m-1)(k-1)} \leq \\ & \leq \sum_{r=1}^{k-1} n^r |J^{(s+m-1)}(r)| p^{(s+m-1)r} + |J^{(s+m-1)}(k) \setminus J^{(s^3)}(k)| p^{(s+m-1)(k-1)} = \end{aligned}$$

$$= (s+m-1)^{k-1} \sum_{r=1}^{k-1} O(n^r p^{r(s+m-1)}) + (s+m-1)^{3(k-1)} O(n^{k-1} p^{(s+m-1)(k-1)}) \quad (13)$$

равномерно по $m \geq 1$.

С учетом условия $p < \rho_k^{1/k}$ (см. замечание 3 выше) получаем из (13), что равномерно по $m \geq 1$

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{\xi}_{n,k}^{(m)}(s) \neq \delta_{n,k}^{(m)}(s)\right\} = O\left((s+m-1)^{3k} \left(\frac{p}{\rho_k^{1/k}}\right)^{s+m-1}\right). \quad (14)$$

Суммируя эти оценки по $1 \leq m \leq M$, получаем

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{\Xi}_{n,k,M}(s) \neq \Delta_{n,k,M}(s)\right\} = O\left(s^{3k} \left(\frac{p}{\rho_k^{1/k}}\right)^s\right) \rightarrow 0.$$

Здесь использовано то, что функция $x^{3k}(p\rho_k^{-1/k})^x$ стремится к нулю, когда x стремится к бесконечности, и что при $s, n \rightarrow \infty$ выполнена оценка $s = O(\ln n)$, вытекающая из определения величин $\Lambda_{s,n}(k)$ и условий теоремы 1. Соотношение (8) доказано.

5. Доказательство соотношения (10)

Оценим $\mathbf{E}\delta_{n,k}^{(m)}(s)$. Для $\bar{i} \in J^{(s^3)}(k)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{E_{i_1, \dots, i_k}\right\} &= \mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) = \dots = Y_{i_k}(s)\right\} = \\ &= \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \{1, \dots, N\}^s} \mathbf{P}\left\{X_{i_1} = x_1\right\} \cdot p_{x_s, x_1}^{(i_2 - i_1 - s - 1)} \cdot p_{x_s, x_1}^{(i_3 - i_2 - s - 1)} \cdot \dots \cdot p_{x_s, x_1}^{(i_k - i_{k-1} - s - 1)} \times \\ &\quad \times p_{x_1, x_2}^k \cdot p_{x_2, x_3}^k \cdot \dots \cdot p_{x_{s-1}, x_s}^k. \end{aligned}$$

Так как для $\bar{i} \in J^{(s^3)}(k)$ справедливы оценки $i_r - i_{r-1} > s^3$, $r = 2, \dots, k$, $i_1 > s^3$, а цепь Маркова $\mathbf{X}$ является эргодической, то для некоторой константы $c_2 > 0$ равномерно по $\bar{i} \in J^{(s^3)}(k)$ и $x_1, x_s \in \{1, \dots, N\}$ справедливы оценки

$$\left|p_{x_s, x_1}^{(i_r - i_{r-1} - s - 1)} - \pi_{x_1}\right| < e^{-c_2 s^3}, \quad \left|\mathbf{P}\left\{X_{i_1} = x_1\right\} - \pi_{x_1}\right| < e^{-c_2 s^3}.$$

Поэтому равномерно по $\bar{i} \in J^{(s^3)}(k)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) = \dots = Y_{i_k}(s)\right\} = \\ &= \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \{1, \dots, N\}^s} \pi_{x_1}^k \cdot p_{x_1, x_2}^k \cdot p_{x_2, x_3}^k \cdot \dots \cdot p_{x_{s-1}, x_s}^k (1 + O(e^{-c_2 s^3})). \end{aligned} \quad (15)$$

По аналогии с (15), используя также (1) и соотношение $e^{-c_2 s^3} = O(e^{-c_1 s})$ при $s \rightarrow \infty$, нетрудно получить записанное в векторном виде равенство

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) = \dots = Y_{i_k}(s), X_{i_1+s-1} = a\right\}, a = 1, \dots, N\right) = \\ &= \rho_k^{s-1} (1 + O(e^{-c_1 s})) \left(\pi'_{k,r} z_{k,r}^{-1} \sum_{l=1}^N \pi_l^k z_{k,l}, r = 1, \dots, N\right). \end{aligned}$$

Тогда (сразу заменяем s на $s + m - 1$)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s + m - 1) = Y_{i_2}(s + m - 1) = \dots = Y_{i_k}(s + m - 1)\right\} = \\ &= \rho_k^{s+m-2} \sum_{r=1}^N \pi'_{k,r} z_{k,r}^{-1} \sum_{l=1}^N \pi_l^k z_{k,l} \cdot (1 + O(e^{-c_1(s+m-1)})). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{E_{i_1, \dots, i_k}^{(m)}\right\} = \mathbf{P}\left\{\bar{E}_{i_1-1, \dots, i_k-1} \cap \bigcap_{j=0}^{m-1} E_{i_1+j, \dots, i_k+j} \cap \bar{E}_{i_1+m, \dots, i_k+m}\right\} = \\ &= \mathbf{P}\left\{\bigcap_{j=0}^{m-1} E_{i_1+j, \dots, i_k+j}\right\} - \mathbf{P}\left\{\bigcap_{j=-1}^{m-1} E_{i_1+j, \dots, i_k+j}\right\} - \\ & - \mathbf{P}\left\{\bigcap_{j=0}^m E_{i_1+j, \dots, i_k+j} \cap E_{i_1+m, \dots, i_k+m}\right\} + \mathbf{P}\left\{\bigcap_{j=-1}^m E_{i_1+j, \dots, i_k+j}\right\} \end{aligned}$$

получаем (используя обозначения (3)), что равномерно по $\bar{i} \in J^{(s^3)}(k)$ и по $m \geq 1$

$$\mathbf{P}\left\{E_{i_1, \dots, i_k}^{(m)}\right\} = \rho_k^{s+m-2} (1 - \rho_k)^2 (\pi'_{k,r} z_{k,r}^{-1}) (\pi^k, z_k) (1 + O(e^{-c_1 s})).$$

Следовательно (опять см. (3)), равномерно по $m \geq 1$

$$\mathbf{E}\delta_{n,k}^{(m)}(s) = \Lambda_{s,n}(k)\rho_k^{m-1}(1 - \rho_k) \left(1 + O\left(\frac{s^3}{n} + e^{-c_1 s}\right) \right). \quad (16)$$

Из соотношения (16) и условий теоремы следует, что

$$\mathbf{E}\delta_{n,k}^{(m)}(s) \rightarrow \lambda\rho_k^{m-1}(1 - \rho_k) \quad (17)$$

равномерно по $m \geq 1$. Поэтому

$$\varphi_{\mathbf{E}\delta_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \mathbf{E}\delta_{n,k}^{(M)}(s)}(z_1, \dots, z_M) \rightarrow \varphi_M(z_1, \dots, z_M),$$

а значит, выполнено (10).

6. Доказательство соотношения (9)

Рассмотрим множество

$$U = \{\alpha = (\bar{i}, m) : \bar{i} \in J^{(s^3)}(k), m = 1, \dots, M\}$$

и наборы случайных величин

$$W = \{\eta^{(m)}(\bar{i})\}_{(\bar{i}, m) \in U}, \quad \Pi = \{\pi_{\bar{i}, m}\}_{(\bar{i}, m) \in U},$$

где случайные величины $\pi_{\bar{i}, m}$, образующие набор Π , независимы в совокупности и имеют распределения Пуассона с параметрами $\mathbf{E}\eta^{(m)}(\bar{i}) = \mathbf{P}\{E_{i_1, \dots, i_k}^{(m)}\}$ соответственно.

Заметим, что вектор $\Delta_{n,k,M}(s)$ может быть записан как результат применения к набору W некоторого отображения $\Psi : \{0, 1\}^{|U|} \rightarrow \{0, 1, \dots\}^M$, а вектор $\Psi(\Pi)$ (с тем же самым Ψ) имеет распределение $\text{Po}((\mathbf{E}\delta_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \mathbf{E}\delta_{n,k}^{(M)}(s)))$. Поэтому

$$d\left(\mathcal{L}(\Delta_{n,k,M}(s)), \text{Po}((\mathbf{E}\delta_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \mathbf{E}\delta_{n,k}^{(M)}(s)))\right) \leq d(W, \Pi), \quad (18)$$

и для проверки (9) достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда $d(W, \Pi) \rightarrow 0$.

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся функциональным вариантом метода Чена–Стейна (см. [12], гл. 10). Введем множества $G_l(\alpha)$, $l = 1, \dots, M$, таких пар $\bar{j} \in J^{(s^3)}(k)$, для которых хотя бы один из отрезков

$$[j_1 - 1, j_1 + s + l], [j_2 - 1, j_2 + s + l], \dots, [j_k - 1, j_k + s + l]$$

лежит на расстоянии менее s^2 от какого-либо из отрезков

$$[i_1 - 1, i_1 + s + m], [i_2 - 1, i_2 + s + m], \dots, [i_k - 1, i_k + s + m].$$

Каждой паре $\alpha = (\bar{i}, m) \in U$ сопоставим множество пар $\beta = (\bar{j}, l)$ из U

$$\Gamma(\alpha) = \bigcup_{l=1}^M \Gamma_l(\alpha) \cup \bigcup_{l \neq m} \{(\bar{i}, l)\}, \quad (19)$$

где

$$\Gamma_l(\alpha) = \{(\bar{j}, l) : \bar{j} \in G_l(\alpha) \setminus \{\bar{i}\}\}.$$

Отметим сразу, что при любом $\alpha \in U$

$$|G_l(\alpha)| < kC_n^{k-1}(s^2 + s + l),$$

$$|\Gamma(\alpha)| = \sum_{l=1}^M |\Gamma_l(\alpha)| + M - 1 < M \left(kC_n^{k-1}(s^2 + s + M) + 1 \right). \quad (20)$$

Пусть

$$V_\alpha = \sum_{\beta=(\bar{j}, l) \in U \setminus (\Gamma(\alpha) \cup \{\alpha\})} \eta^{(l)}(\bar{j}).$$

Согласно теореме 10.A из [12]

$$\begin{aligned} d(W, \Pi) &\leq \sum_{\alpha \in U} \left(\mathbf{E} \eta^{(m)}(\bar{i}) \left(\mathbf{E} \eta^{(m)}(\bar{i}) + \sum_{\beta \in \Gamma(\alpha)} \mathbf{E} \eta^{(l)}(\bar{j}) \right) \right) + \\ &+ \sum_{\alpha \in U} \sum_{\beta \in \Gamma(\alpha)} \mathbf{E} \left(\eta^{(m)}(\bar{i}) \eta^{(l)}(\bar{j}) \right) + \sum_{\alpha \in U} \mathbf{E} \left| \mathbf{E} \eta^{(m)}(\bar{i}) - \mathbf{E}(\eta^{(m)}(\bar{i}) | V_\alpha) \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая (20), (16) и условия теоремы, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in U} \left(\mathbf{E} \eta^{(m)}(\bar{i}) \left(\mathbf{E} \eta^{(m)}(\bar{i}) + \sum_{\beta \in \Gamma(\alpha)} \mathbf{E} \eta^{(l)}(\bar{j}) \right) \right) = \\ = O \left(\frac{s^2}{n} \left(\sum_{m=1}^M \mathbf{E} \delta_{n,k}^{(m)}(s) \right)^2 \right) = o(1). \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, для любой пары $\alpha \in U$ разобьем каждое множество $G_l(\bar{i})$ на несколько подмножеств. Определим их свойствами входящих в них наборов $\bar{j}$ следующим образом:

$G_{l,a}(\alpha)$ — ровно a отрезков $[j_1 - 1, j_1 + s + l], \dots, [j_k - 1, j_k + s + l]$ лежат на расстоянии менее s^2 от одного из отрезков $[i_1 - 1, i_1 + s + m], \dots, [i_k - 1, i_k + s + m]$, а остальные отрезки лежат на расстоянии не менее s^2 друг от друга, здесь $0 \leq a \leq k - 1$,

$G'_{l,k}(\alpha)$ — каждый из k отрезков $[j_1 - 1, j_1 + s + l], \dots, [j_k - 1, j_k + s + l]$ лежит на расстоянии менее s^2 от соответствующего отрезка среди $[i_1 - 1, i_1 + s + m], \dots, [i_k - 1, i_k + s + m]$, при этом хотя бы один не пересекается с этим отрезком более чем на одну позицию,

$G''_{l,k}(\alpha)$ — для $\bar{j}$ выполнена система соотношений

$$-l < j_1 - i_1 = \dots = j_k - i_k < m,$$

$$G'''_{l,k}(\alpha) = G_{l,k}(\alpha) \setminus (G'_{l,k}(\alpha) \cup G''_{l,k}(\alpha)).$$

Аналогичным образом разобьем множества $\Gamma_l(\alpha)$:

$$\Gamma_{l,a}(\alpha) = G_{l,a}(\alpha) \times \{l\}, \quad \Gamma'_{l,k}(\alpha) = G'_{l,k}(\alpha) \times \{l\},$$

$$\Gamma''_{l,a}(\alpha) = G''_{l,a}(\alpha) \times \{l\}, \quad \Gamma'''_{l,k}(\alpha) = G'''_{l,k}(\alpha) \times \{l\}.$$

Из определений следует, что

$$|G_{l,a}(\alpha)| = O(s^{2a} n^{2k-a}), \quad 1 \leq a \leq k - 1,$$

$$|G'_{l,k}(\alpha)| = O(s^{2k} n^k), \quad |\Gamma'''_{l,k}(\alpha)| = O(s^{2k} n^k).$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}\{\eta^{(l)}(\bar{j}) = 1 | \eta^{(m)}(\bar{i}) = 1\} \leq p^{(k-a)s}, \quad \bar{j} \in \Gamma_{l,a}(\alpha),$$

$$\mathbf{P}\{\eta^{(l)}(\bar{j}) = 1 | \eta^{(m)}(\bar{i}) = 1\} \leq p^{2s}, \quad \bar{j} \in \Gamma'_{l,k}(\alpha),$$

$$\mathbf{P}\{\eta^{(l)}(\bar{j}) = \eta^{(m)}(\bar{i}) = 1\} = 0, \quad \bar{j} \in \Gamma''_{l,k}(\alpha), \quad l \neq m,$$

$$\mathbf{P}\{\eta^{(l)}(\bar{j}) = \eta^{(m)}(\bar{i}) = 1\} \leq p^{ks}, \quad \bar{j} \in \Gamma'''_{l,k}(\alpha).$$

Первые три оценки вытекают непосредственно из определений. Последняя оценка доказывается индукцией по $k \geq 2$.

По аналогии с рассуждениями в [2, 9] и [11], используя приведенные выше оценки и (3), получаем оценки

$$\sum_{\alpha \in U} \sum_{\beta \in \Gamma_{l,a}(\alpha)} \mathbf{E}(\eta^{(m)}(\bar{i}) \eta^{(l)}(\bar{j})) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\alpha \in U} \mathbf{P}\{\eta^{(m)}(\bar{i}) = 1\} \sum_{\beta \in \Gamma_{l,a}(\alpha)} \mathbf{P}\{\eta^{(l)}(\bar{j}) = 1 | \eta^{(m)}(\bar{i}) = 1\} = \\
 &= O\left(\left(\sum_{m=1}^M \mathbf{E}\delta_n^{(m)}(s)\right) s^{2a} (np^s)^{k-a}\right), \quad a = 1, \dots, k-1, \\
 &\quad \sum_{\alpha \in U} \sum_{\beta \in \Gamma'_{l,k}(\alpha)} \mathbf{E}\left(\eta^{(m)}(\bar{i})\eta^{(l)}(\bar{j})\right) = \\
 &= \sum_{\alpha \in U} \mathbf{P}\{\eta^{(m)}(\bar{i}) = 1\} \sum_{\beta \in \Gamma'_{l,k}(\alpha)} \mathbf{P}\{\eta^{(l)}(\bar{j}) = 1 | \eta^{(m)}(\bar{i}) = 1\} = \\
 &= O\left(\left(\sum_{m=1}^M \mathbf{E}\delta_n^{(m)}(s)\right) s^{2k} p^{2s}\right), \\
 &\quad \sum_{\alpha \in U} \sum_{l \neq m} \sum_{\beta \in \Gamma''_{l,a}(\alpha)} \mathbf{E}\left(\eta^{(m)}(\bar{i})\eta^{(l)}(\bar{j})\right) = 0, \\
 &\quad \sum_{\alpha \in U} \sum_{\beta \in \Gamma'''_{l,k}(\alpha)} \mathbf{E}\left(\eta^{(m)}(\bar{i})\eta^{(l)}(\bar{j})\right) = O\left(s^{2k} (np^s)^k\right).
 \end{aligned}$$

Из этих оценок, формулы (19) и условий теоремы (напомним, что из них, в частности, вытекает соотношение $s = O(\ln n)$) следует, что

$$\sum_{\alpha \in U} \sum_{\beta \in \Gamma(\alpha)} \mathbf{E}\left(\eta^{(m)}(\bar{i})\eta^{(l)}(\bar{j})\right) = O\left(s^{2k} \left((np^s)^k + p^{2s}\right)\right) \rightarrow 0. \quad (23)$$

Далее оценим величину

$$\sum_{\alpha \in U} \mathbf{E}\left|\mathbf{E}\eta^{(m)}(\bar{i}) - \mathbf{E}(\eta^{(m)}(\bar{i})|V_\alpha)\right|. \quad (24)$$

Отметим, что область суммирования в определении величины V_α допускает оценку

$$U \setminus (\Gamma(\alpha) \cup \{\alpha\}) \subseteq \bigcup_{l=1}^M (G_{l,0}(\alpha) \times \{l\}) \subseteq G_{1,0}(\alpha) \times \{1, \dots, M\}$$

(множество $G_{l,0}(\alpha)$ определено при выводе (23)). Значит, для каждого слагаемого в (24) выполнено неравенство

$$\mathbf{E}\left|\mathbf{E}\eta^{(m)}(\bar{i}) - \mathbf{E}(\eta^{(m)}(\bar{i})|V_\alpha)\right| \leq \mathbf{E}\left|\mathbf{E}\eta^{(m)}(\bar{i}) - \mathbf{E}(\eta^{(m)}(\bar{i})|\{X_t, t \in T(\alpha)\})\right|,$$

где

$$T(\alpha) = \bigcup_{u=1}^{k+1} T_u(\alpha), \quad T_u(\alpha) = \{i_{u-1} + s + s^2 + 1, \dots, i_u - s^2 - 1\}$$

(здесь и в следующих оценках считается, что $i_0 + s + s^2 = 0$, а $i_{k+1} - s^2 = n$). С учетом марковского свойства цепи $\mathbf{X}$ это приводит к неравенству

$$\mathbf{E} \left| \mathbf{E} \eta^{(m)}(\bar{i}) - \mathbf{E}(\eta^{(m)}(\bar{i}) | V_\alpha) \right| \leq \mathbf{E} \left| \mathbf{E} \eta^{(m)}(\bar{i}) - \mathbf{E}(\eta^{(m)}(\bar{i}) | \{X_t, t \in T'(\alpha)\}) \right|, \quad (25)$$

где

$$T'(\alpha) = \bigcup_{u=1}^{k+1} \{i_{u-1} + s + s^2 + 1, i_u - s^2 - 1\}.$$

Формула (25) позволяет при оценке величины (24) почти дословно повторить рассуждения, использованные при выводе формулы (20) в [9]. Единственное существенное изменение касается числа оцениваемых разностей в разложении для правой части (25) (подробности см. в [9]). Теперь оцениваются 2^k разностей. Повторив упомянутые рассуждения, получим неравенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left| \mathbf{E} \eta^{(m)}(\bar{i}) - \mathbf{E} \left(\eta^{(m)}(\bar{i}) | \{X_t, t \in T'(\alpha)\} \right) \right| \leq \\ & \leq 2^k \rho_k^{s-1} (1 - \rho_k) e^{-c_2(s^2-2s)} \sum_{r=1}^N \pi'_{k,r} z_{k,r}^{-1} \sum_{l=1}^N \pi_l^k z_{k,l}. \end{aligned}$$

Поэтому из (3) и оценки $|J^{(s^3)}(k)| < n^k$ следует, что

$$\sum_{\alpha \in U} \mathbf{E} \left| \mathbf{E} \eta^{(m)}(\bar{i}) - \mathbf{E}(\eta^{(m)}(\bar{i}) | V_\alpha) \right| = O \left(\Lambda_{s,n}(k) e^{-cs^2} \right) \quad (26)$$

при любом $0 < c < c_4$.

Подставляя оценки (16), (22)–(26) в (21) и используя условие $s^3 < n$, убеждаемся в том, что $d(W, \Pi) \rightarrow 0$. Теорема 2 доказана. $\square$

Этим доказательство утверждения 1) теоремы 1 завершено.

7. Доказательство утверждений 2) и 3) теоремы 1

Воспользуемся вытекающими из определений формулами

$$\tilde{\xi}_{n,k}(s) = \sum_{m \geq 1} \xi_{n,k}^{(m)}(s), \quad \xi_{n,k}(s) = \sum_{m \geq 1} m \xi_{n,k}^{(m)}(s). \quad (27)$$

Заметим, что

$$\mathbf{P} \left\{ \tilde{\xi}_{n,k}(s) \neq \sum_{m=1}^M \xi_{n,k}^{(m)}(s) \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \sum_{m \geq M+1} \xi_{n,k}^{(m)}(s) \geq 1 \right\}, \quad (28)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \xi_{n,k}(s) \neq \sum_{m=1}^M m \xi_{n,k}^{(m)}(s) \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \sum_{m \geq M+1} \xi_{n,k}^{(m)}(s) \geq 1 \right\}. \quad (29)$$

Оценим выражение в правых частях этих неравенств. Для этого воспользуемся неравенством

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sum_{m \geq M+1} \xi_{n,k}^{(m)}(s) \geq 1 \right\} \leq \\ & \leq \sum_{m \geq M+1} \mathbf{P} \left\{ \xi_{n,k}^{(m)}(s) \neq \delta_{n,k}^{(m)}(s) \right\} + \sum_{m \geq M+1} \mathbf{P} \left\{ \delta_{n,k}^{(m)}(s) \geq 1 \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

оценками (14) и (16) и условиями теоремы:

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq M+1} \mathbf{P} \left\{ \xi_{n,k}^{(m)}(s) \neq \delta_{n,k}^{(m)}(s) \right\} &= O \left(\sum_{m \geq M+1} (s+m-1)^{3k} \left(\frac{p}{\rho_k^{1/k}} \right)^{s+m-1} \right) = \\ &= O \left(\left(\frac{p(1+\varepsilon)}{\rho_k^{1/k}} \right)^{s+M} \right) \quad \forall \varepsilon > 0, \\ \sum_{m \geq M+1} \mathbf{P} \left\{ \delta_{n,k}^{(m)}(s) \geq 1 \right\} &\leq \sum_{m \geq M+1} \mathbf{E} \delta_{n,k}^{(m)}(s) = \\ &= \sum_{m \geq M+1} \Lambda_{s,n}(k) \rho_k^{m-1} (1 - \rho_k) \left(1 + O \left(\frac{s^3}{n} + e^{-c_1 s} \right) \right) = \\ &= O \left(\sum_{m \geq M+1} \rho_k^{m-1} (1 - \rho_k) \right) = O \left(\rho_k^M \right). \end{aligned}$$

Последние две оценки и (30) означают, что найдется такое число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству $p(1 + \varepsilon) < \rho_k^{1/k}$, и такое число $C < \infty$, что

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{m \geq M+1} \xi_{n,k}^{(m)}(s) \geq 1 \right\} \leq C \left(\left(\frac{p(1 + \varepsilon)}{\rho_k^{1/k}} \right)^{s+M} + \rho_k^M \right). \quad (31)$$

Рассуждения, аналогичные приведенным при выводе оценки (18), показывают, что при любом фиксированном $M \geq 1$

$$d \left(\mathcal{L} \left(\sum_{m=1}^M \xi_{n,k}^{(m)}(s) \right), \text{Po} \left(\sum_{m=1}^M \mathbf{E} \delta_{n,k}^{(m)}(s) \right) \right) \leq d(W, \Pi), \quad (32)$$

$$d \left(\mathcal{L} \left(\sum_{m=1}^M m \xi_{n,k}^{(m)}(s) \right), \text{Po} \left(\mathbf{E} \delta_{n,k}^{(1)}(s), \dots, \mathbf{E} \delta_{n,k}^{(M)}(s) \right) \right) \leq d(W, \Pi). \quad (33)$$

Из (28), (29) и (31) следует, что выбором достаточно большого M можно сделать вероятности

$$\mathbf{P} \left\{ \tilde{\xi}_{n,k}(s) \neq \sum_{m=1}^M \xi_{n,k}^{(m)}(s) \right\}, \quad \mathbf{P} \left\{ \xi_{n,k}(s) \neq \sum_{m=1}^M m \xi_{n,k}^{(m)}(s) \right\}$$

сколь угодно малыми. В свою очередь, из (17), (32), (33) и теоремы 2 следует, что при таком M при переходе к пределу по $n, s \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L} \left(\sum_{m=1}^M \xi_{n,k}^{(m)}(s) \right) \rightarrow \text{Po} \left(\sum_{m=1}^M \lambda \rho_k^{m-1} (1 - \rho_k) \right), \quad (34)$$

$$\mathcal{L} \left(\sum_{m=1}^M m \xi_{n,k}^{(m)}(s) \right) \rightarrow \text{Po} \left(\lambda (1 - \rho_k), \dots, \lambda \rho_k^{M-1} (1 - \rho_k) \right). \quad (35)$$

Наконец, выбором достаточно большого M можно сделать величины

$$d \left(\text{Po} \left(\sum_{m=1}^M \lambda \rho_k^{m-1} (1 - \rho_k) \right), \text{Po} \left(\sum_{m \geq 1} \lambda \rho_k^{m-1} (1 - \rho_k) \right) \right),$$

$$d \left(\text{Po}(\lambda(1 - \rho_k), \dots, \lambda \rho_k^{M-1} (1 - \rho_k)), \text{Po}(\lambda(1 - \rho_k), \lambda \rho_k (1 - \rho_k), \dots) \right)$$

сколь угодно малыми.

Из всего перечисленного следуют утверждения 2) и 3) теоремы 1, что проверяется стандартными рассуждениями.

Авторы признательны А. М. Зубкову и Андрею В. Иванову за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Беляев П. Ф., “О совместном распределении частот длинных s -цепочек в мультиномиальной схеме с равновероятными исходами”, *Теория вероятн. и примен.*, **14**:3 (1969), 540–546.
- [2] Зубков А. М., Михайлов В. Г., “Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний”, *Теория вероятн. и примен.*, **19**:1 (1974), 173–181.
- [3] Зубков А. М., Михайлов В. Г., “О повторениях s -цепочек в последовательности независимых величин”, *Теория вероятн. и примен.*, **24**:2 (1979), 267–279.
- [4] Михайлов В. Г., “Предельные распределения случайных величин, связанных с многократными длинными повторениями в последовательности независимых испытаний”, *Теория вероятн. и примен.*, **19**:1 (1974), 182–187.
- [5] Hansen N. R., “Local alignment of Markov chains”, *Ann. Appl. Probab.*, **16**:3 (2006), 1262–1296.
- [6] Беляев П. Ф., “К вопросу о совместном распределении частот s -цепочек в сложных цепях Маркова с большим числом состояний”, *Теория вероятн. и примен.*, **14**:2 (1969), 333–339.
- [7] Беляев П. Ф. О совместном распределении частот исходов в цепях Маркова с большим числом состояний, *Теория вероятн. и примен.*, **22**:3 (1977), 534–545.
- [8] Зубков А. М., “Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения”, *Матем. сб.*, **109(151)**:4(8) (1979), 491–532.
- [9] Михайлов В. Г., Шойтов А. М., “О длинных повторениях цепочек в цепи Маркова”, *Дискретная математика*, **26**:3 (2014), 79–89.
- [10] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*, 5-е изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 560 с.
- [11] Шойтов А. М., “Пуассоновское приближение для числа повторений значений дискретной функции от цепочек”, *Дискретная математика*, **17**:2 (2005), 56–69.
- [12] Barbour A. D., Holst L., Janson S., *Poisson Approximation*, Oxford: Oxford University Press, 1992, 277 pp.