Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тарасов, Стабилизаторы некоторых семейств булевых функций, образующих Галуа-замкнутые подалгебры алгебры Шефера, *Матем. вопр. криптогр.*, 2015, том 6, выпуск 4, 99–125

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:47:22

УДК: 519.571

Стабилизаторы некоторых семейств булевых функций, образующих Галуа-замкнутые подалгебры алгебры Шефера

А. В. Тарасов

Московский государственный университет информационных технологий,
радиотехники и электроники, Москва

Получено 20.IV.2015

Исследуются некоторые семейства булевых функций, образующих Галуа-замкнутые подалгебры алгебры Шефера. В каждом семействе рассматриваются множества функций, зависящих от n переменных. Строятся максимальные группы инвариантных преобразований данных множеств функций в симметрической группе подстановок двоичных n -мерных векторов.

Ключевые слова: булева функция, классы Шефера, классы Поста, соответствия Галуа

Stabilizers of some families of Boolean functions constituting Galois-closed subalgebras of the Schaefer algebra

A. V. Tarasov

Moscow State University of Information Technologies, Radioengineering and Electronics, Moscow

Abstract. Several families of Boolean functions constituting Galois-closed subalgebras of the Schaefer algebra are investigated. For each family we consider sets of functions depending on n variables. Maximal groups of invariant transformations of sets of these functions is the symmetry substitution group of binary n -dimensional vectors are constructed.

Key words: Boolean function, Schaefer classes, Post classes, Galois correspondencies

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2015, vol. 6, no. 4, pp. 99–125 (Russian).

1. Введение

Проблематика решаемой задачи берет начало с работ Т. Шефера [1] и С. П. Горшкова [2], в которых были введены классы булевых функций, порождающие так называемые классы систем булевых уравнений без ограничений на выбор неизвестных с полиномиально распознаваемой совместностью. Основными такими классами булевых функций являются классы 0-выполнимых, 1-выполнимых, буюнктивных, мультиаффинных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций, известные в литературе как классы Шефера (см. также [3]).

Важной характеристикой класса булевых функций является группа преобразований множества n -мерных двоичных векторов, стабилизирующих данный класс (стабилизатор множества функций). В [4] изучены стабилизаторы классов буюнктивных, мультиаффинных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций от n переменных.

В [5] на основе результатов работ [6–11] введена универсальная алгебра Шефера, основное множество которой составляет множество всех булевых функций, а множество операций состоит из операций конъюнкции функций, перестановок переменных и проектирования функции по переменной. Решетка подалгебр этой алгебры состоит в основном из классов Шефера и их всевозможных пересечений. В [5] показана связь этой алгебры с итеративной алгеброй Поста, осуществляемая посредством пары соответствий Галуа. Выделены подалгебры алгебры Шефера, являющиеся Галуа-замкнутыми классами.

Целью настоящей работы является описание стабилизаторов множеств булевых функций от n переменных, лежащих в некоторых Галуа-замкнутых подалгебрах алгебры Шефера.

1. Основные определения, обозначения и факты

Обозначения введем в соответствии с работами [1, 2, 12]. Положим:
 V_n — множество n -мерных двоичных векторов, $1_n = \underbrace{(1, \dots, 1)}_n$, $0_n = \underbrace{(0, \dots, 0)}_n$;
 $\|\alpha\|$ — вес Хемминга вектора $\alpha \in V_n$;
 P_2 — множество всех булевых функций;
 $P_2(n)$ — множество булевых функций от n переменных;
 $E_f = \{\alpha \in V_n : f(\alpha) = 1\}$ — носитель (множество выполняющих векторов) функции $f \in P_2(n)$;

$\|f(x_1, \dots, x_n)\|$ — вес булевой функции $f \in P_2(n)$.

Для произвольного класса функций $K \subset P_2$ обозначим

$$K(n) = K \cap P_2(n) = \{f(x_1, \dots, x_n) \in K\}.$$

Введем обозначения:

$\text{Sym}(X)$ — симметрическая группа подстановок на конечном множестве X ;

$$S_n = \text{Sym}(\{1, 2, \dots, n\}).$$

Введем основные группы обратимых преобразований пространства V_n :

$\text{Sym}(V_n)$ — симметрическая группа подстановок на множестве V_n (изоморфна симметрической группе степени 2^n);

$\tilde{S}_n < \text{Sym}(V_n)$ — группа, индуцированная действием группы перестановок координат векторов из V_n (изоморфна симметрической группе S_n); она состоит из всех подстановок $\tilde{s}$, задаваемых равенством

$$\tilde{s}((a_1, \dots, a_n)) = (a_{s(1)}, \dots, a_{s(n)}), \quad s \in S_n;$$

Σ_n — группа сдвигов, изоморфная прямой сумме n элементарных абелевых 2-групп; она состоит из всех подстановок $\tilde{\beta}$, $\beta = (b_1, \dots, b_n) \in V_n$, где

$$\tilde{\beta}((a_1, \dots, a_n)) = (a_1 \oplus b_1, \dots, a_n \oplus b_n);$$

Q_n — группа Джевонса, порождаемая группами $\tilde{S}_n$ и Σ_n и являющаяся их полупрямым произведением;

$CS_n = \langle \tilde{S}_n, \tilde{I}_n \rangle$ — подгруппа группы Джевонса, порождаемая группой $\tilde{S}_n$ и подстановкой $\tilde{I}_n$, инвертирующей векторы из V_n ;

$\overline{CS}_n = \langle CS_n, (0_n, 1_n) \rangle$ — группа, порожденная группой CS_n и транспозицией $(0_n, 1_n)$;

$GL(n, 2)$ — полная линейная группа на пространстве V_n ;

$AGL(n, 2)$ — полная аффинная группа на пространстве V_n ;

изоморфизм групп обозначим символом $\cong$.

Введенные группы естественным образом задают свое действие на множестве функций $P_2(n)$: для $s \in \text{Sym}(V_n)$ и функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2(n)$ определим функцию $s(f) = f^s(x_1, \dots, x_n)$, задаваемую равенством $E_{fs} = s(E_f)$ или, что равносильно, равенством $f^s(a_1, \dots, a_n) = f(s^{-1}(a_1, \dots, a_n))$ (см. [4]).

Для произвольного класса функций $M \subset P_2(n)$ и группы $G < \text{Sym}(V_n)$ пусть $G_M = \{g \in G : \forall f \in M, g(f) = f\}$ — поточечный стабилизатор множества M , а $G_{\{M\}} = \{g \in G : \forall f \in M, g(f) \in M\}$ — стабилизатор множества M . Ясно, что $G_M < G_{\{M\}}$.

Введем важные классы функций. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется:

- 1) 0-выполнимой, если $f(0, \dots, 0) = 1$;
- 2) 1-выполнимой, если $f(1, \dots, 1) = 1$;
- 3) бинктивной, если $f \equiv 1$ или существует представление функции f в виде 2-КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{j \in J} x_j^{b_j} \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_{i2}}); \quad (1)$$

- 4) слабо положительной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i2}} \vee \dots \vee x_{s_{i k_i}}), \quad k_i \geq 1, \quad i = \overline{1, t}; \quad (2)$$

- 5) слабо отрицательной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee \bar{x}_{s_{i2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{i k_i}}), \quad k_i \geq 1, \quad i = \overline{1, t}; \quad (3)$$

- 6) мультиаффинной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t l_i(x_1, \dots, x_n), \quad (4)$$

где $l_1(x_1, \dots, x_n), \dots, l_t(x_1, \dots, x_n)$ — аффинные функции.

Множества всех функций соответственно классов 1)–6) обозначим θ -S, I -S, Bi , WP , WN , A . Данные классы называются классами Шефера. Формулы (1)–(4) для функций классов Bi , WP , WN , A будем называть приведенными представлениями.

Следуя [5, 7], булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ назовем C -замкнутой, если выполнено равенство

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Класс всех таких функций обозначим CL . Через $WP_{m,2}$ обозначим подкласс класса слабо положительных функций, представимых в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (x_{r_{j,1}} \vee \dots \vee x_{r_{j,m}}).$$

Аналогичным образом введем класс $WN_{m,2}$. В качестве их естественных расширений введем классы

$$WP_{\infty,2} = \bigcup_{m=0}^{\infty} WP_{m,2}, \quad WN_{\infty,2} = \bigcup_{m=0}^{\infty} WN_{m,2}.$$

Для векторов $\alpha, \beta \in V_n$ через $\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta$ (или $\alpha \cdot \beta$), $\alpha \oplus \beta$ обозначим векторы, получающиеся из векторов α, β покоординатным применением соответствующих операций. Определим тернарное преобразование v пространства V_n равенством

$$v(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma \in V_n.$$

Известны следующие критерии мультиаффинности, бионктивности, слабой положительности и слабой отрицательности, которые будут использованы в дальнейшем.

Теорема ([1, 3]).

1. $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ тогда и только тогда, когда для любых трех векторов $\alpha, \beta, \gamma \in E_f$ вектор $\delta = \alpha \oplus \beta \oplus \gamma \in E_f$.
2. $f(x_1, \dots, x_n) \in Bi$ тогда и только тогда, когда для любых трех векторов $\alpha, \beta, \gamma \in E_f$ вектор $\delta = v(\alpha, \beta, \gamma) \in E_f$.
3. $f(x_1, \dots, x_n) \in WP$ тогда и только тогда, когда для любых двух векторов $\alpha, \beta \in E_f$ вектор $\delta = \alpha \vee \beta \in E_f$.
4. $f(x_1, \dots, x_n) \in WN$ тогда и только тогда, когда для любых трех векторов $\alpha, \beta, \gamma \in E_f$ вектор $\delta = \alpha \wedge \beta \in E_f$.

Для произвольного класса функций $K \subset P_2$ положим

$$K^0 = K \cap 0 - S, \quad K^1 = K \cap 1 - S, \quad K^{01} = K \cap 0 - S \cap 1 - S.$$

В таблице 1 описан ряд классов функций, образующих Галуа-замкнутые подалгебры алгебры Шефера [5].

В [4] доказан ряд утверждений, которые во введенных обозначениях формулируются следующим образом:

- 1) если $M \subset P_2(n)$ — класс функций, содержащих все функции $\{x_1, \dots, x_n\}$ ($\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$), $G < \text{Sym}(V_n)$ и $s \in G_{\{M\}}$, то все координатные функции $s_1, \dots, s_n$ подстановки s лежат в M (все инверсии $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n$ координатных функций $s_1, \dots, s_n$ подстановки s лежат в M);

Таблица 1

№	Класс	Описание класса
1	P_2	Класс всех булевых функций
2	$0 - S$	$\bar{f}(0, \dots, 0) = 1$
3	$1 - S$	$\bar{f}(1, \dots, 1) = 1$
4	CL	Класс C -замкнутых функций
5	$1 - S \cap 0 - S$	$\bar{f}(1, \dots, 1) = \bar{f}(0, \dots, 0) = 1$
6	CL^1	$CL \cap 1 - S \cap 0 - S, \bar{f}(x_1, \dots, x_n) \equiv \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \bar{f}(1, \dots, 1) = 1$
7	A	Класс мультиаффинных функций (4)
8	A^0	$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus \dots \oplus x_{s_{l,k_l}} \oplus 1)$
9	A^1	$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus \dots \oplus x_{s_{l,k_l}}) \bigwedge_{m=1}^p (x_{r_{m,1}} \oplus \dots \oplus x_{r_{m,q_m}} \oplus 1),$ где k_l нечетны, q_m четны, $l = \overline{1, t}, m = \overline{1, p}$
10	Bi	Класс бинктивных функций (1)
11	M_2	$A \cap Bi: \bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus a_l)$
12	M_3	$WP \cap WN = Bi \cap WP \cap WN:$ $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}})$
13	M_3^0	$M_3^0 = M_4^0: \bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}})$
14	M_3^1	$M_3^1 = M_5^1: \bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}})$
15	M_3^{01}	$M_3^{01} = M_4^{01} = M_5^{01} = Bi^{01}: \bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}})$
16	M_1	$A \cap WP = A \cap WN = A \cap WP \cap WN = A \cap Bi \cap WP = A \cap Bi \cap WN:$ $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus 1)$
17	M_1^0	$M_1^0 = M_2^0: \bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus 1)$
18	M_1^1	$M_1^1 = M_2^1: \bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus 1)$
19	WP	Класс слабо положительных функций (2)
20	WP^0	$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}} \vee \dots \vee x_{s_{l,k_l}})$
21	WP^1	$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}}^{a_l} \vee x_{s_{l,2}} \vee \dots \vee x_{s_{l,k_l}}),$ $2 \leq k_l \leq n, l = \overline{1, t}$
22	WP^{01}	$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}} \vee \dots \vee x_{s_{l,k_l}}), 2 \leq k_l \leq n, l = \overline{1, t}$

№	Класс	Описание класса
23	$WP_{\infty,2}$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (x_{r_{j,1}} \vee \dots \vee x_{r_{j,m_j}})$
24	$WP_{m,2}, m \geq 3$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l \in J} x_l^{a_l} \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (x_{r_{j,1}} \vee \dots \vee x_{r_{j,m}})$
25	M_4	$Bi \cap WP : f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} x_j^{b_j} \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i,2}})$
26	Bi^1	$Bi^1 = WP_{2,2}^1 : f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} x_j \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (x_{r_{j,1}} \vee x_{r_{j,2}})$
27	WN	Класс слабо отрицательных функций (3)
28	WN^0	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} x_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \vee \bar{x}_{s_{l,2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{l,k_l}})$
29	WN^1	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in J} \bar{x}_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}}^{a_{l1}} \vee \bar{x}_{s_{l,2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{l,k_l}}),$ $2 \leq k_l \leq n, l = \overline{1, t}$
30	WN^{01}	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \vee \bar{x}_{s_{l,2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{l,k_l}}),$ $2 \leq k_l \leq n, l = \overline{1, t}$
31	$WN_{\infty,2}$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (\bar{x}_{r_{j,1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{r_{j,m_j}})$
32	$WN_{m,2}, m \geq 3$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l \in J} x_l^{a_l} \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (\bar{x}_{r_{j,1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{r_{j,m}})$
33	M_5	$Bi \cap WN : f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} x_j^{b_j} \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}}^{a_{i1}} \vee \bar{x}_{s_{i,2}})$
34	Bi^0	$Bi^0 = WN_{2,2}^0 : f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (\bar{x}_{r_{j,1}} \vee \bar{x}_{r_{j,2}})$

- 2) $\text{Sym}(V_n)_{\{A(n)\}} = \text{AGL}(n, 2);$
- 3) $\text{Sym}(V_n)_{\{Bi(n)\}} = Q_n;$
- 4) $\text{Sym}(V_n)_{\{WP(n)\}} = \text{Sym}(V_n)_{\{WN(n)\}} = \tilde{S}_n.$

В дальнейшем группу $\text{Sym}(V_n)$ будем обозначать через G . Легко доказать следующие соотношения:

$$G_{\{P_2\}} = \text{Sym}(V_n) \cong S_{2^n}, G_{\{0-S\}} \cong G_{\{1-S\}} \cong S_{2^n-1},$$

$$G_{\{CL\}} \cong S_{2^n-1}, G_{\{0-S \cap 1-S\}} \cong S_{2^n-2}, G_{\{CL^1\}} \cong S_{2^n-1-1}.$$

2. Стабилизаторы подклассов класса биюнктивных функций

В данном разделе исследуются стабилизаторы классов $Bi^0(n)$, $Bi^1(n)$, $Bi^{01}(n)$, $M_3(n)$, $M_4(n)$, $M_5(n)$, $M_3^0(n)$ и $M_3^1(n)$. Сначала рассмотрим классы $Bi^0(n)$ и $Bi^1(n)$. Для них верен следующий результат.

Теорема А. При $n \geq 3$ выполняются равенства

$$G_{\{Bi^0(n)\}} = G_{\{Bi^1(n)\}} = \tilde{S}_n.$$

Доказательство теоремы проведем только для класса $Bi^0(n)$, поскольку для класса $Bi^1(n)$ все рассуждения проводятся аналогично. Прежде чем перейти к доказательству, докажем ряд лемм.

Лемма 1. Если $s \in G_{\{Bi^0(n)\}}$, то $s(0_n) = 0_n$.

Доказательство. В $Bi^0(n)$ входит только одна функция веса 1. Это $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$, $E_f = \{0_n\}$. Поэтому $f^s = f$, если $s \in G_{\{Bi^0(n)\}}$. Следовательно, $s(0_n) = 0_n$.

Лемма 2. Множество функций веса 3 в классе $Bi^0(n)$ исчерпывается функциями $f(x_1, \dots, x_n)$ с носителями вида $E_f = \{0_n, \alpha, \beta\}$, где либо $0 < \alpha < \beta \leq 1$, либо $\alpha \cdot \beta = 0_n$.

Множество функций веса 4 в классе $Bi^0(n)$ исчерпывается функциями $f(x_1, \dots, x_n)$ с носителями вида $E_f = \{0_n, \alpha, \beta, \gamma\}$, где, с точностью до перестановки, векторы α, β, γ удовлетворяют ровно одному из пяти условий:

- а) $\alpha = \beta \cdot \gamma$;
- б) $0 < \alpha < \beta < \gamma \leq 1$;
- в) $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma = 0_n$;
- г) $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma = 0_n$, $\beta < \gamma$;
- д) $\alpha \cdot \beta = 0_n$, $\gamma = \alpha \vee \beta$.

Доказательство. Докажем первую часть леммы. Ясно, что если $E_f = \{0_n, \alpha, \beta\}$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$, то $f \in Bi^0$. Обратно, если $f \in Bi^0$, то $E_f = \{0_n, \alpha, \beta\}$. При этом по критерию биюнктивности $\alpha \cdot \beta \in E_f$, откуда и следует утверждение леммы.

Докажем вторую часть. Легко видеть, что если функция f удовлетворяет любому из условий (5), то она лежит в классе $Bi^0(n)$. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция из $Bi^0(n)$ веса 4. Тогда $E_f = \{0_n, \alpha, \beta, \gamma\}$ и по критерию биюнктивности выполняются включения $\alpha \cdot \beta$, $\alpha \cdot \gamma$, $\beta \cdot \gamma$, $\alpha \cdot \beta \vee \alpha \cdot \gamma \vee \beta \cdot \gamma \in E_f$.

Без ограничения общности будем считать, что $0 < \|\alpha\| \leq \|\beta\| \leq \|\gamma\|$. Тогда $\alpha \cdot \beta \in \{0_n, \alpha\}$, $\alpha \cdot \gamma \in \{0_n, \alpha\}$, $\beta \cdot \gamma \in \{0_n, \alpha, \beta\}$. Рассмотрим все необходимые случаи.

Пусть $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma = 0_n$. Если $\beta \cdot \gamma = 0_n$, то выполнено условие в) формулы (5). Если же $\beta \cdot \gamma = \alpha$, то $\alpha \leq \beta$, $\alpha \leq \gamma$, что противоречит исходному предположению. Если $\beta \cdot \gamma = \beta$, то $\beta \leq \gamma$ и выполнено условие г) в (5).

Пусть $\alpha \cdot \beta = \alpha$. Тогда $\alpha \leq \beta$. Предположим, что $\alpha \cdot \gamma = 0_n$. Рассмотрим вектор $\beta \cdot \gamma$. Случай $\beta \cdot \gamma = 0_n$ соответствует условию в) формулы (5). Случаи $\beta \cdot \gamma = \alpha$ и $\beta \cdot \gamma = \beta$ противоречат предположению $\alpha \cdot \gamma = 0_n$. Теперь предположим, что $\alpha \cdot \gamma = \alpha$. В этом случае $\alpha \leq \gamma$. Тогда $\beta \cdot \gamma = \{\alpha, \beta\}$. В случае $\beta \cdot \gamma = \alpha$ получаем условие а) леммы. В случае $\beta \cdot \gamma = \beta$ получаем условие б) леммы.

Пусть $\alpha \cdot \beta = 0_n$ и $\alpha \cdot \gamma = \alpha$, т.е. $\alpha \leq \gamma$. Тогда если $\beta \cdot \gamma = 0_n$, то получаем случай г). Случай $\beta \cdot \gamma = \alpha$ невозможен. Пусть $\beta \cdot \gamma = \beta$. Тогда $\beta \leq \gamma$. В этом случае $\delta = \alpha \cdot \beta \vee \alpha \cdot \gamma \vee \beta \cdot \gamma = \alpha \vee \beta \in E_f$. Тогда очевидно, что $\gamma = \alpha \vee \beta$, и получаем условие д). Лемма доказана.

Лемма 3. Если $s \in G_{\{Bi^0(n)\}}$, то $\|s(\alpha)\| = \|\alpha\|$ для всякого $\alpha \in V_n \setminus \{0_n\}$.

Доказательство. Для всякого $\alpha \in V_n \setminus \{0_n\}$ и $r \in \{1, 2, \dots\}$ определим M_α^r как число таких функций $f \in Bi^0$ веса r , что $\alpha \in E_f$. Пусть $\|\alpha\| = k$. По лемме 2 множество M_α^3 состоит из функций $f : E_f = \{0_n, \alpha, \beta\}$, у которых либо $0_n < \alpha < \beta$, либо $0_n < \beta < \alpha$, либо $\alpha \cdot \beta = 0_n$. Отметим, что число таких функций составляет $2^{n-k+1} + 2^k - 4$.

Если $s \in G_{\{Bi^0(n)\}}$, $f \in M_\alpha^3$ и $E_f = \{0_n, \alpha, \beta\}$, то $s(E_f) = \{0_n, s(\alpha), s(\beta)\}$. Значит, $s(M_\alpha^3) = M_{s(\alpha)}^3$ и $|M_{s(\alpha)}^3| = |M_\alpha^3|$. Положим $k' = \|s(\alpha)\|$. Тогда получаем равенство $2^{n-k+1} + 2^k - 4 = 2^{n-k'+1} + 2^{k'} - 4$, или

$$2^{n-k+1} + 2^k = 2^{n-k'+1} + 2^{k'}, \quad 0 < k, \quad k' \leq n. \quad (6)$$

Положим $l = k' - k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Из (6) следует

$$2^{n-k+1} + 2^k = 2^{n-k-l+1} + 2^{k+l}, \quad 0 \leq l \leq n - k,$$

откуда

$$2^{n-2k+1} \cdot \frac{(2^l - 1)}{2^l} = (2^l - 1).$$

Тогда либо $2^l - 1 = 0$, что равносильно $l = 0$ и $k' = k$, либо

$$l = n - 2k + 1 \text{ и } k' = n - k + 1. \quad (7)$$

В первом случае лемма верна. Рассмотрим случай, когда выполнено (7).

Аналогичным образом рассмотрим величину $|M_\alpha^4|$ и заметим, что должно выполняться равенство $|M_\alpha^4| = |M_{s(\alpha)}^4|$. Поскольку вектор α фиксирован, значение $|M_\alpha^4|$ равно числу неупорядоченных пар $\{\beta, \gamma\}$, удовлетворяющих хотя бы одному из соотношений вида (5) (с учетом всех вариантов перестановок векторов α, β, γ). Таким образом,

$$|M_\alpha^4| = N_1(\alpha) + N_2(\alpha) + N_3(\alpha) + N_4(\alpha) + N_5(\alpha),$$

где $N_1(\alpha)$ — число функций, соответствующих п. а) в (5), $N_2(\alpha)$ — число функций, соответствующих п. б) в (5), и т. д. Везде далее обозначаем $l = \|\beta\|$, $m = \|\gamma\|$.

Для случая а) возможны следующие варианты: $\alpha = \beta\gamma$ и $\beta = \alpha\gamma$. В первом варианте получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \sum_{l=1}^{n-k-1} \binom{n-k}{l} \sum_{m=1}^{n-k-l} \binom{n-k-l}{m} = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \sum_{l=1}^{n-k-1} \binom{n-k}{l} (2^{n-k-l} - 1) = \frac{1}{2} \cdot (3^{n-k} - 2^{n-k+1} + 1) \end{aligned}$$

функций, а во втором варианте $2^n - 2$ функции. В итоге

$$N_1(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (3^{n-k} + 1) - 2^{n-k} + 2^n - 2. \quad (8)$$

В случае б) возможны следующие варианты: $\alpha < \beta < \gamma$, $\beta < \alpha < \gamma$, $\beta < \gamma < \alpha$. В первом варианте имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{n-k-1} \binom{n-k}{l} \cdot \sum_{m=1}^{n-k-l} \binom{n-k-l}{m} = \\ & = \sum_{l=1}^{n-k-1} \binom{n-k}{l} \cdot (2^{n-k-l} - 1) = 3^{n-k} - 2^{n-k+1} + 1 \end{aligned}$$

функций.

Во втором варианте получаем $(2^k - 2) \cdot (2^{n-k} - 1) = 2^n - 2^{n-k+1} - 2^k + 2$ функций.

В третьем варианте получаем $3^k - 2^{k+1} + 1$ функций аналогично первому варианту.

В итоге

$$\begin{aligned} N_2(\alpha) &= 3^{n-k} - 2^{n-k+1} + 1 + 2^n - 2^{n-k+1} - 2^k + 2 + 3^k - 2^{k+1} + 1 = \\ &= 3^{n-k} + 3^k - 2^{n-k+2} + 2^n - 3 \cdot 2^k + 4. \end{aligned} \quad (9)$$

Для случая в) необходимо найти число таких неупорядоченных пар векторов $\{\beta, \gamma\}$, что $\beta\gamma = 0_n$, а все единицы расположены в них на местах с $k+1$ -го по n -е. Это число равно

$$N_3(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^{n-k-1} \binom{n-k}{m} \cdot (2^{n-k-m} - 1) = \frac{1}{2} \cdot (3^{n-k} + 1) + 2^{n-k}. \quad (10)$$

Случай г). Здесь число функций равно числу неупорядоченных пар векторов $\{\beta, \gamma\}$, которые при заданном α допускают следующие варианты:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma = 0_n, \quad \beta < \gamma, \quad \beta \cdot \alpha = \beta \cdot \gamma = 0_n, \quad \alpha < \gamma, \\ \beta \cdot \alpha = \beta \cdot \gamma = 0_n, \quad \gamma < \alpha. \end{aligned}$$

Обозначим $\|\beta\| = l$, $\|\gamma\| = m$. В первом варианте получаем следующее число функций:

$$\sum_{l=1}^{n-k-1} \binom{n-k}{l} \cdot 2^{n-k-l} = 3^{n-k} - 2^{n-k} - 1.$$

Во втором варианте получаем

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{l=1}^{n-k-1} \binom{n-k}{l} \cdot 2^{n-k-l} = \frac{1}{2} \cdot (3^{n-k} - 2^{n-k} - 1)$$

функций. В третьем варианте получаем $(2^{n-k} - 1) \cdot (2^k - 2)$ функций. В итоге имеем

$$\begin{aligned} N_4(\alpha) &= 3^{n-k} - 2^{n-k} - 1 + \frac{1}{2} \cdot (3^{n-k} - 2^{n-k} - 1) + (2^{n-k} - 1) \cdot (2^k - 2) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 3^{n-k} - \frac{1}{2} + 2^n - 2^k - 7 \cdot 2^{n-k-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Наконец, в случае д)

$$N_5(\alpha) = 2^{n-k} - 1. \quad (12)$$

Суммируя правые части равенств (8)–(12), получаем

$$\begin{aligned}
 |M_\alpha^4| &= \frac{1}{2} \cdot (3^{n-k} + 1) - 2^{n-k} + 2^n - 2 + 3^{n-k} + \\
 &\quad + 3^k - 2^{n-k+2} + 2^n - 3 \cdot 2^k + 4 + \frac{1}{2} \cdot (3^{n-k} + 1) + \\
 &\quad + 2^{n-k} + \frac{3}{2} \cdot 3^{n-k} - \frac{1}{2} + 2^n - 2^k - 7 \cdot 2^{n-k-1} + 2^{n-k} - 1 = \\
 &= \frac{7}{2} \cdot 3^{n-k} + 3^k - 13 \cdot 2^{n-k-1} + 2^{n+1} - 2^{k+2} + \frac{3}{2}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Значение $|M_{s(\alpha)}^4|$ получается заменой в правой части (13) параметра k на $k' = n - k + 1$. Легко видеть, что при этом $|M_{s(\alpha)}^4| \neq |M_\alpha^4|$, что ведет к противоречию. Следовательно, $k' = k$, и лемма доказана.

Замечание 1. Из доказанной леммы, в частности, следует, что если $s \in G_{\{Bi^0(n)\}}$, то $s(1_n) = 1_n$.

Доказательство теоремы А. Включение $\tilde{S}_n < G_{\{Bi^0(n)\}}$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $s \in G_{\{Bi^0(n)\}}$. По леммам 1 и 3 выполняются равенства

$$s(0_n) = 0_n, \|s(\alpha)\| = \|\alpha\|.$$

В частности, это означает, что множество векторов $I = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ инвариантно относительно подстановки s . Рассмотрим подстановку $\pi \in S_n$, индуцированную действием s на I , и соответствующую ей подстановку $\tilde{\pi} \in \tilde{S}_n$. Ясно, что $\tilde{\pi} \in G_{\{Bi^0(n)\}}$. Тогда $s \cdot \tilde{\pi}^{-1} \in G_{\{Bi^0(n)\}}$ и на множестве I данная подстановка действует как тождественная. Положим $s' = s \cdot \tilde{\pi}^{-1}$. Подстановка s' тождественна на I , т. е. $s'(e_i) = e_i$, $i = \overline{1, n}$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что s' тождественна на всем V_n . Рассуждаем от противного.

Пусть для некоторого вектора $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$ $s'(\alpha) = \beta \neq \alpha$. Положим $k = \|\alpha\|$. Из леммы 3 следует, что $\|\beta\| = k$, где $2 \leq k \leq n - 1$ согласно замечанию 1 и построению подстановки s' . Рассмотрим сначала случай $k \leq n - 2$.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0)$.

Рассмотрим множество функций $f_i : E_{f_i} = \{0_n, e_i, \alpha, 1_n\}$, $i = \overline{1, k}$. Используя критерий биюнктивности, легко показать, что данные функции лежат в $Bi^0(n)$.

Построим функции $s'(f_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Для таких функций $E_{s'(f_i)} = s'(E_{f_i}) = \{0_n, e_i, \beta, 1_n\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Так как $\beta \neq \alpha$, то $a_i = 1$ и $b_i = 0$ для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Без ограничения общности считаем, что $i = 1$. Рассмотрим функцию $s'(f_1)$. С одной стороны, так как $s' \in G_{\{Bi^0(n)\}}$, то $s'(f_1) \in Bi^0(n)$. Значит, для множества $E_{s'(f_1)}$ должен выполняться критерий бионктивности. Но $E_{s'(f_1)} = \{0_n, e_1, \beta, 1_n\}$. В этом случае вектор $\gamma = e_1\beta \vee e_11_n \vee \beta1_n$ имеет вес $k + 1$. Если $k \leq n - 2$, то $\gamma \notin E_{s'(f_1)}$ и функция $s'(f_1)$ не бионктивна. Следовательно, если $\|\alpha\| \leq n - 2$, то $s'(\alpha) = \alpha$.

Пусть $\|\alpha\| = n - 1$ и $s'(\alpha) = \beta \neq \alpha$. Без ограничения общности будем полагать, что $\alpha = (0, 1, 1, \dots, 1)$, $\beta = (1, 0, 1, \dots, 1)$. Рассмотрим функцию f с носителем $E_f = \{0_n, e_2, e_3, \alpha, 1_n\}$. Данная функция, очевидно, лежит в классе $Bi^0(n)$, а $E_{s(f)} = \{0_n, e_2, e_3, \beta, 1_n\}$.

Положим $\delta = e_2e_3 \vee e_2\beta \vee e_3\beta$. Тогда $\delta = (0, 0, 1, \dots, 1) \notin E_{s'(f)}$. Значит, функция $s'(f)$ не бионктивна, что приводит к противоречию.

Из указанных рассуждений следует, что подстановка s' тождественна и, следовательно, $s = \tilde{\pi} \in \tilde{S}_n$.

Перейдем к рассмотрению класса $Bi^{01}(n)$. Заметим, что этот класс функций является также подклассом класса $WP \cap WN$. Поэтому носители функций класса $Bi^{01}(n)$ замкнуты относительно покомпонентного применения операций $\vee$ и $\&$. Положим $\overline{CS}_n = \langle (0_n, 1_n), CS_n \rangle$.

Теорема 4. При $n \geq 3$ верно равенство

$$G_{\{Bi^{01}(n)\}} = \overline{CS}_n.$$

Доказательству теоремы 4 предпошлем три леммы.

Лемма 5. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in Bi^{01}(n)$, $\|f\| = 4$ и $E_f = \{0_n, \alpha, \beta, 1_n\}$, то либо $\alpha < \beta$, либо $\beta < \alpha$, либо $\beta = \alpha \oplus 1_n$.

Доказательство. Так как $Bi^{01}(n) \subset WP(n) \cap WN(n)$, то по критериям слабой положительности и слабой отрицательности $\alpha\beta \in E_f$ и $\alpha \vee \beta \in E_f$. Заметим, что $0_n \leq \alpha\beta \leq \alpha \vee \beta \leq 1_n$. Если $\alpha\beta = \alpha$, то $\alpha < \beta$, а если $\alpha\beta = \beta$, то $\beta < \alpha$. Случай $\alpha\beta = 1_n$ невозможен.

Предположим, что $\alpha\beta = 0_n$. Это означает, что $\beta \leq \alpha \oplus 1_n$. Если $\beta < \alpha \oplus 1_n$, то $\alpha \vee \beta < \alpha \vee (\alpha \oplus 1_n) = 1_n$. При этом не выполняется ни одно из равенств $\alpha \vee \beta = \alpha$, $\alpha \vee \beta = \beta$. Следовательно, вектор $\alpha \vee \beta \notin E_f$, что противоречит исходным предпосылкам. Значит, $\beta = \alpha \oplus 1_n$.

Лемма 6. Если $s \in G_{\{Bi^{01}(n)\}}$, то $\|s(\alpha)\| \in \{\|\alpha\|, n - \|\alpha\|\}$ для всякого $\alpha \in V_n \setminus \{0_n\}$.

Доказательство. Рассмотрим множество M_α функций из $Bi^{01}(n)$ веса 4, содержащих в носителе заданный вектор α . При действии подстановки s это множество перейдет в множество функций $M_{s(\alpha)}$ всех функций из $Bi^{01}(n)$ веса 4, содержащих в носителе вектор $s(\alpha)$. Поэтому $|M_\alpha| = |M_{s(\alpha)}|$. Тогда если $\|\alpha\| = k, 0 < k < n$, то $|M_\alpha| = 2^k + 2^{n-k} - 3$. Значит,

$$|M_{s(\alpha)}| = 2^{\|s(\alpha)\|} + 2^{n-\|s(\alpha)\|} - 3 = 2^k + 2^{n-k} - 3,$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 7. Если $n \geq 3$ и $s \in G_{\{Bi^{01}(n)\}}$, то либо $\|s(e_i)\| = 1, i = \overline{1, n}$, либо $\|s(e_i)\| = n - 1, i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\|s(e_i)\| = 1$, но $\|s(e_j)\| = n - 1, i, j \in \overline{1, n}$. Без ограничения общности можно считать, что $i = 1, j = 2$. Рассмотрим функцию $f \in Bi^{01}(n)$ минимального веса, носитель которой содержит векторы e_1 и e_2 . Тогда $E_f = \{0_n, e_1, e_2, \alpha = e_1 \vee e_2, 1_n\}, \|f\| = 5$.

Положим $g = f^s$. Тогда $E_g = \{0_n, s(e_1), s(e_2), s(\alpha), 1_n\}, \|g\| = 5$ и g — функция минимального веса, содержащая векторы $s(e_1), s(e_2)$. Поскольку $\|s(e_1)\| = 1$, можно считать, что $s(e_1) = e_1$.

Положим $\beta = s(e_2), \gamma = s(\alpha)$. Тогда $\|\beta\| = n - 1$ и, поскольку $n \geq 3, \beta \notin \{e_1, \dots, e_n\}$. Если $\beta = (0, 1, \dots, 1)$, то $e_1\beta = 0_n, e_1 \vee \beta = 1_n$. Если же $\beta \in \{(1, 0, 1, \dots, 1), (1, 1, 0, \dots, 1), \dots, (1, \dots, 1, 0)\}$, то $e_1\beta = e_1, e_1 \vee \beta = \beta$.

Определим функцию $h: E_h = \{0_n, e_1, \beta, 1_n\}$. Напомним, что носитель любой функции из $Bi^{01}(n)$ обязан быть замкнутым относительно покомпонентных операций $\vee$ и $\&$. Поэтому $h \in Bi^{01}(n)$. Но тогда носитель функции $h^{s^{-1}}$ состоит из векторов множества $E_h = \{0_n, e_1, e_2, 1_n\}$, и эта функция обязана лежать в $Bi^{01}(n)$, что неверно, так как в этом случае $\alpha = e_1 \vee e_2 \notin E_{h^{s^{-1}}}$.

Обозначим через $V_n(k)$ множество двоичных векторов веса k .

Доказательство теоремы 4. Включение $CS_n < G_{\{Bi^{01}(n)\}}$ очевидно. Кроме того, поскольку $0_n, 1_n \in E_f$ для всякой функции $f \in Bi^{01}(n)$, транспозиция $(0_n, 1_n)$ лежит в $G_{\{Bi^{01}(n)\}}$. Поэтому $\overline{CS_n} < G_{\{Bi^{01}(n)\}}$. Докажем обратное включение. Достаточно показать, что на множестве $V_n \setminus \{0_n, 1_n\}$ наша группа действует так же, как группа CS_n .

Пусть $s \in G_{\{Bi^{01}(n)\}}$. В соответствии с леммой 7 рассмотрим первый случай, когда $\|s(e_i)\| = 1, i = \overline{1, n}$. Аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 1, можно построить подстановку $\pi \in \tilde{S}_n$, индуцированную действием подстановки s на множестве V_n , и проводить рассуждения

для подстановки $s' = s \cdot \pi^{-1}$. С учетом этих рассуждений будем считать, что $s(e_i) = e_i$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть $\alpha \in V_n$ и $\|\alpha\| = k \geq 2$. Докажем индукцией по k , что в этом случае $s(\alpha) = \alpha$ для любого вектора $\alpha \in V_n \setminus \{0_n, 1_n\}$.

Пусть $k = 2$. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha = e_1 \vee e_2$. Рассмотрим функцию $f \in Bi^{01}$ с носителем $E_f = \{0_n, e_1, e_2, \alpha, 1_n\}$. Тогда $E_{fs} = \{0_n, e_1, e_2, s(\alpha), 1_n\}$, и это множество должно быть замкнуто относительно покоординатных операций $\vee$ и $\&$. В этом случае оно должно содержать вектор $\alpha = e_1 \vee e_2$. Следовательно, $s(\alpha) = \alpha$.

Пусть утверждение леммы верно для всех векторов веса, меньшего k . Докажем его для вектора $\alpha : \|\alpha\| = k$. Пусть $\alpha = e_1 \vee \dots \vee e_k$. Построим функцию $f \in Bi^{01}$ с носителем $E_f = \{0_n, e_1, e_2, \dots, e_k, e_1 \vee e_2, \dots, e_2 \vee \dots \vee e_k, \alpha, 1_n\}$, содержащим векторы $0_n, 1_n, \alpha$ и все векторы, меньшие α . Тогда по предположению индукции множество E_{fs} отличается от множества E_f лишь заменой вектора α на вектор $s(\alpha)$. При этом $\alpha \in E_{fs}$, поскольку $f^s \in Bi^{01}$. Следовательно, $s(\alpha) = \alpha$.

Рассмотрим второй случай, когда $\|s(e_i)\| = n-1$, $i = \overline{1, n}$. В этом случае можно умножить подстановку s на подстановку $\pi^{-1} \in CS_n$, добившись выполнения условия $\|s(e_i)\| = 1$, $i = \overline{1, n}$. Проведя аналогичные рассуждения, найдем, что $s(\alpha) = \alpha \oplus 1_n$ для всех $\alpha \in V_n \setminus \{0_n, 1_n\}$.

Эти рассуждения означают, что если $s \in G_{\{Bi^{01}(n)\}}$, то на множестве $V_n \setminus \{0_n, 1_n\}$ группа $G_{\{Bi^{01}(n)\}}$ действует так же, как группа CS_n .

Рассмотрим задачу нахождения группы $G_{\{M_3(n)\}}$ — стабилизатора класса

$$M_3(n) = WP(n) \cap WN(n) = Bi(n) \cap WP(n) \cap WN(n).$$

Теорема 8. При $n \geq 3$ верно равенство $G_{\{M_3(n)\}} = CS_n$.

Доказательство. Включение $CS_n < G_{\{M_3(n)\}}$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $s < G_{\{M_3(n)\}}$.

Сначала заметим, что поскольку носители функций класса $M_3(n)$ замкнуты относительно покоординатного применения операций $\vee$ и $\&$, то в этом классе лежат все функции f веса 2 с носителями вида $E_f = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha < \beta$. Других функций веса 2 в классе $M_3(n)$ нет. Поэтому аналогично доказательству леммы 6 легко получить, что $\|s(\alpha)\| \in \{\|\alpha\|, n - \|\alpha\|\}$ для всякого $\alpha \in V_n \setminus \{0_n\}$. В частности, это свойство выполняется для векторов веса 0 и 1.

Пусть $\|s(0_n)\| = 0$, что равносильно равенству $s(0_n) = 0_n$. Докажем, что $\|s(e_i)\| = 1$, $i = \overline{1, n}$. Предположим противное, а именно: $\|s(e_i)\| = 1$, но $\|s(e_j)\| = n-1$, $i, j \in \overline{1, n}$. Без ограничения общности можно считать, что $i = 1, j = 2$.

Рассмотрим функцию $f \in M_3(n)$ минимального веса, носитель которой содержит векторы e_1 и e_2 . Тогда $E_f = \{0_n, e_1, e_2, \alpha = e_1 \vee e_2\}$, $\|f\| = 4$. Положим $g = f^s$. Тогда $E_g = \{0_n, s(e_1), s(e_2), s(\alpha)\}$, $\|g\| = 4$ и g — функция минимального веса, содержащая векторы $s(e_1)$ и $s(e_2)$.

Так как $\|s(e_1)\| = 1$, то можно считать, что $s(e_1) = e_1$. Пусть $\beta = s(e_2)$, $\gamma = s(\alpha)$. Тогда $\|\beta\| = n - 1$ и $\beta \notin \{e_1, \dots, e_n\}$, поскольку $n \geq 3$. Если $\beta = (0, 1, \dots, 1)$, то $e_1 \beta = 0_n$, $e_1 \vee \beta = 1_n$. В этом случае $s(\alpha) = 1_n$, $\|\alpha\| \in \{0, n\}$, что невозможно при $n \geq 3$.

Пусть $\beta \in \{(1, 0, 1, \dots, 1), (1, 1, 0, \dots, 1), \dots, (1, \dots, 1, 0)\}$. Тогда $e_1 < \beta$. В этом случае функцией минимального веса, содержащей векторы e_1 и β , является функция с носителем $\{e_1, \beta\}$, что противоречит минимальности веса функции g . Следовательно, если $s(0_n) = 0_n$, то $\|s(e_i)\| = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Аналогичным образом доказывается утверждение о том, что если $s(0_n) = 1_n$, то $\|s(e_i)\| = n - 1$, $i = \overline{1, n}$.

От подстановки s перейдем к подстановке s' , которая строится следующим образом. Если $s(0_n) = 1_n$, то умножим подстановку s на $\bar{1}_n$ и получим подстановку $\bar{1}_n \cdot s$, для которой выполняется условие $(\bar{1}_n \cdot s)(0_n) = 0_n$.

Построенная подстановка своим действием на множестве векторов $V_n(1)$ индуцирует перестановку координат π . Тогда $s' = \bar{1}_n \cdot s \cdot \pi^{-1}$. В случае $s(0_n) = 0_n$ положим $s' = s \cdot \pi^{-1}$.

Полученные выше факты означают, что подстановка s' обладает следующими свойствами:

$$s' \in G_{\{M_3\}}, \quad s'(0_n) = 0_n, \quad s'(1_n) = 1_n, \quad s'(e_i) = e_i, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда следует, что $\|s'(\alpha)\| = n - 1$ для всех векторов $\alpha \in V_n(n - 1)$.

Докажем от противного, что $s' = \varepsilon$. Пусть $s'(\alpha) = \beta \neq \alpha$ для некоторого вектора $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$. Положим $k = \|\alpha\|$, $2 \leq k \leq n - 1$. Тогда $\|\beta\| \in \{k, n - k\}$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0)$. Рассмотрим множество функций $f_i : E_{f_i} = \{0_n, e_i, \alpha\}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Легко показать, что эти функции лежат в $M_3(n)$.

Построим функции $f_i^{s'}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Для таких функций $E_{f_i^{s'}} = s'(E_{f_i}) = \{0_n, e_i, \beta\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Так как $\beta \neq \alpha$, то для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ имеем $a_i = 1$ и $b_i = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$. Рассмотрим функцию $s'(f_1)$. Так как $s' \in G_{\{M_3(n)\}}$, то $s'(f_1) \in M_3$. Значит, множество $E_{s'(f_1)}$ замкнуто

относительно покоординатного применения операций $\vee$ и $\&$. Поэтому множество $E_{f_1^{s'}} = \{0_n, e_1, \beta\}$ должно содержать вектор $\gamma = e_1 \vee \beta$ веса либо $k+1$, либо $n-k+1$, отличный от $0_n, e_1, \beta$. Тогда функция $f_1^{s'}$ не лежит в классе $M_3(n)$, что противоречит условию $s' \in G_{\{M_3(n)\}}$. Следовательно, если $\|\alpha\| \leq n-1$, то $s'(\alpha) = \alpha$, откуда вытекает, что $s' = \varepsilon$, и поэтому $s \in CS_n$.

Опишем стабилизаторы функций из классов $M_4(n) = Bi(n) \cap WP(n)$ и $M_5(n) = Bi(n) \cap WN(n)$.

Теорема 9. Для $n \geq 3$ верны равенства

$$G_{\{M_4(n)\}} = G_{\{M_5(n)\}} = \tilde{S}_n.$$

Доказательство теоремы 9 приведем для класса $M_4(n)$. Для класса $M_5(n)$ доказательство аналогично. Разобьем доказательство на несколько вспомогательных лемм. Следующий очевидный факт примем без доказательства.

Лемма 10. Множество функций веса 2 в классах $M_4(n)$ и $M_5(n)$ исчерпывается всеми функциями $f(x_1, \dots, x_n)$ с носителями.

На основе леммы 10 очевидным образом доказывается следующий факт.

Лемма 11. Если $s \in G_{\{M_4(n)\}}$, то $\|s(\alpha)\| \in \{\|\alpha\|, n - \|\alpha\|\}$ для всякого $\alpha \in V_n \setminus \{0_n\}$.

Лемма 12. Множество функций веса 3 в классе $M_4(n)$ исчерпывается всеми функциями $f(x_1, \dots, x_n)$ с носителями вида $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\} : \alpha < \beta < \gamma$ и вида $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\} : \gamma = \alpha \vee \beta, \alpha < \beta$, а в классе $M_5(n)$ — функциями $f(x_1, \dots, x_n)$ с носителями вида $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\} : \alpha < \beta < \gamma$ и вида $E_f = \{\alpha \oplus 1_n, \beta \oplus 1_n, \gamma \oplus 1_n\} : \gamma = \alpha \vee \beta, \alpha < \beta$.

Доказательство. Класс $M_4(n)$ замкнут относительно следующих операций на V_n : операции покоординатной дизъюнкции и операции покоординатного применения функции голосования от 3 переменных. Функции, обладающие свойствами, указанными в формулировке леммы, очевидно, лежат в $M_4(n)$. Пусть теперь $f(x_1, \dots, x_n) \in M_4(n)$, $\|f\| = 3$ и $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Пусть γ — вектор максимального веса среди векторов E_f , а α — вектор минимального веса и $\alpha < \beta < \gamma$. Тогда $\alpha \vee \gamma > \gamma$, что ведет к противоречию. Поэтому $\alpha < \gamma$. Аналогично $\beta < \gamma$. Если $\alpha < \beta$, то $\gamma = \alpha \vee \beta$. Если же $\alpha < \beta$, то получаем, что $\alpha < \beta < \gamma$.

Для класса $M_5(n)$ доказательство аналогично.

Доказательство теоремы 9. Включения $\tilde{S}_n < G_{\{M_4(n)\}}$, $\tilde{S}_n < G_{\{M_5(n)\}}$ очевидны. Покажем обратное включение для класса $M_4(n)$. Для класса $M_5(n)$ доказательство аналогично. Пусть $s \in G_{\{M_4(n)\}}$.

В силу лемм 10–11 для любого $\alpha \in V_n$ выполнено $\|s(\alpha)\| \in \{\|\alpha\|, n - \|\alpha\|\}$. В частности, $\{s(0_n), s(1_n)\} = \{0_n, 1_n\}$.

Для произвольного $\alpha \in V_n$, $\|\alpha\| = k$, найдем число функций веса 3 из класса $M_4(n)$, содержащих α в своем носителе. Это число, очевидно, зависит только от веса вектора α . Поэтому обозначим его $F(n, k)$. Для удобства будем считать, что $\alpha = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$. Данное число представляет собой сумму чисел:

$$F(n, k) = F_1(n, k) + F_2(n, k) + F_3(n, k) + F_4(n, k) + F_5(n, k),$$

где

$F_1(n, k)$ — число функций f с носителями $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\}$: $\alpha < \beta < \gamma$,

$F_2(n, k)$ — число функций f с носителями $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\}$: $\beta < \alpha < \gamma$,

$F_3(n, k)$ — число функций f с носителями $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\}$: $\beta < \gamma < \alpha$,

$F_4(n, k)$ — число функций f с носителями $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\}$: $\alpha < \gamma$, $\gamma = \alpha \vee \beta$,

$F_5(n, k)$ — число функций f с носителями $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\}$: $\beta < \gamma$, $\alpha = \beta \vee \gamma$.

Найдем эти числа. Легко видеть, что

$$F_1(n, k) = \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} (2^{n-k-j} - 1) = 3^{n-k} - 2^{n-k+1} + 1,$$

$$F_2(n, k) = (2^k - 1) \cdot (2^{n-k} - 1),$$

$$F_3(n, k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (2^{k-j} - 2) = 3^k - 2^{k+1} + 1,$$

$$F_4(n, k) = (2^k - 1) \cdot (2^{n-k} - 1).$$

Найдем значение $F_5(n, k)$. Надо определить число таких неупорядоченных пар векторов $\{\beta, \gamma\}$, что $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\alpha = \beta \vee \gamma$. Для этого выбираем вектор $\beta < \alpha$ веса j : $0 < j < k$, после чего выбираем вектор $\gamma < \beta$: $\beta \vee \gamma = \alpha$. Выбор вектора γ происходит следующим образом: из j единичных координат выбираем $i < j$ координат, на которых у вектора γ стоят единицы, и присваиваем значение 1 всем $k - j$ координатам, на которых у вектора β

стоят нули. Так как каждая пара $\{\beta, \gamma\}$ в этом случае считается дважды, то умножаем результат на $\frac{1}{2}$. В итоге получаем выражение

$$F_5(n, k) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \left(\binom{k}{j} \cdot \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \right) = \frac{1}{2} \cdot (3^k - 2^k + 1).$$

Сложив выведенные равенства, получим

$$F(n, k) = 3^{n-k} + \frac{1}{2} \cdot 3^{k+1} - 2^{n-k+1} - 2^{k+1} - 2^{k-1} + 2, 5 + 2 \cdot (2^k - 1) \cdot (2^{n-k} - 1).$$

Легко видеть, что $F(n, k) \neq F(n, n - k)$. Следовательно, как и в ранее доказанных теоремах, $\|s(\alpha)\| = \|\alpha\|$ для всех $\alpha \in V_n$. В частности, $s(0_n) = 0_n$, $s(1_n) = 1_n$. Дальнейшее доказательство того, что $s \in \tilde{S}_n$, проводится по той же схеме, что и в доказательстве теоремы А.

Рассмотрим задачу описания стабилизаторов для классов $M_3^0 = Bi \cap WP \cap WN \cap 0 - S$ и $M_3^1 = Bi \cap WP \cap WN \cap 1 - S$. Покажем, что $G_{\{M_3^0(n)\}} = G_{\{M_3^1(n)\}} = \tilde{S}_n$.

Теорема 13. Для $n \geq 3$ верны равенства

$$G_{\{M_3^0(n)\}} = G_{\{M_3^1(n)\}} = \tilde{S}_n.$$

Доказательство. Включения $\tilde{S}_n < G_{\{M_3^0(n)\}}$, $\tilde{S}_n < G_{\{M_3^1(n)\}}$ очевидны. Докажем обратные включения. Достаточно показать первое включение. Второе доказывается аналогично. Пусть $s \in G_{\{M_3^0(n)\}}$. Поскольку функция $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ — единственная функция из $M_3^0(n)$ веса 1, ясно, что $s(0_n) = 0_n$. Далее аналогично доказательству леммы 3 показываем, что $\|s(\alpha)\| = \|\alpha\|$ для всех $\alpha \in V_n$. В частности, $s(1_n) = 1_n$.

Без ограничения общности будем считать, что подстановка s на векторах $e_1, \dots, e_n$ действует так же, как тождественная (в противном случае аналогично доказательству теоремы 1 рассматриваем соответствующую подстановку $\pi \in \tilde{S}_n$ и проводим рассуждения для подстановки $s' = s \cdot \pi^{-1}$). Покажем, что в этом случае подстановка s тождественна. Действительно, пусть это не так.

Пусть $s(\alpha) = \beta \neq \alpha$ для некоторого вектора $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$. Положим $k = \|\alpha\| = \|\beta\|$, где $2 \leq k \leq n - 1$.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0)$.

Рассмотрим множество функций $f_i : E_{f_i} = \{0_n, e_i, \alpha\}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Легко видеть, что данные функции лежат в $M_3^0(n)$.

Построим функции $s(f_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Для таких функций $E_{s(f_i)} = s(E_{f_i}) = \{0_n, e_i, \beta\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Так как $\beta \neq \alpha$, то $a_i = 1$ и $b_i = 0$ для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Без ограничения общности считаем, что $i = 1$. Рассмотрим функцию $s(f_1)$. С одной стороны, $s(f_1) \in M_3^0(n)$, поскольку $s \in G_{\{M_3^0(n)\}}$. Значит, для множества $E_{s(f_1)}$ должны выполняться критерии биюнктивности, слабой положительности и слабой отрицательности. В частности, множество $E_{s(f_1)}$ должно содержать вектор $e_1 \vee \beta$, отличный от $0_n, e_1, \beta$, что приводит к противоречию.

Из проведенных рассуждений следует, что подстановка s тождественна, что и требовалось доказать.

3. Стабилизаторы подклассов классов слабо положительных и слабо отрицательных функций

В настоящем разделе построены стабилизаторы для классов $WP^0(n)$, $WP^1(n)$, $WP^{01}(n)$, $WP_{m,2}(n)$, $WP_{\infty,2}(n)$ и стабилизаторы для классов $WN^0(n)$, $WN^1(n)$, $WN^{01}(n)$, $WN_{m,2}(n)$, $WN_{\infty,2}(n)$.

Теорема 14. При $n \geq 3$ и $m = 3, 4, \dots$ верны равенства

$$\begin{aligned} G_{\{WP^0(n)\}} &= G_{\{WP^1(n)\}} = G_{\{WP^{01}(n)\}} = G_{\{WP_{m,2}(n)\}} = G_{\{WP_{\infty,2}(n)\}} = \tilde{S}_n, \\ G_{\{WN^0(n)\}} &= G_{\{WN^1(n)\}} = G_{\{WN^{01}(n)\}} = G_{\{WN_{m,2}(n)\}} = G_{\{WN_{\infty,2}(n)\}} = \tilde{S}_n. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы понадобится ряд лемм. Включение группы $\tilde{S}_n$ в указанные стабилизаторы очевидно. Покажем обратные включения. Начнем с класса $WP^0(n)$. Сначала заметим, что функция $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ с единственным выполняющим вектором 0_n является единственной функцией веса 1 в классе $WP^0(n)$. Поэтому если $s \in G_{\{WP^0(n)\}}$, то $s(0_n) = 0_n$. Далее сформулируем аналог леммы 2 для класса $WP^0(n)$.

Лемма 15. Множество функций веса 3 из класса $WP^0(n)$ исчерпывается функциями $f(x_1, \dots, x_n)$ с носителями вида $E_f = \{0_n, \alpha, \beta\}$, где $0 < \alpha < \beta \leq 1$.

Доказательство. Ясно, что если $E_f = \{0_n, \alpha, \beta\}$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$, то $f \in WP^0$. Обратно, если $f \in WP^0$ и $E_f = \{0_n, \alpha, \beta\}$, то по критерию слабой положительности $\alpha \vee \beta \in E_f$. Следовательно, либо $\alpha \vee \beta = \alpha$, либо $\alpha \vee \beta = \beta$, откуда и следует утверждение леммы.

Ввиду доказанной леммы получаем следующий факт.

Лемма 16. Если $s \in G_{\{WP^0(n)\}}$, то $\|s(\alpha)\| = \|\alpha\|$ для всякого $\alpha \in V_n \setminus \{0_n\}$.

Доказательство леммы практически дословно совпадает с доказательством леммы 3.

Из леммы 16, в частности, следует, что $s(1_n) = 1_n$.

Лемма 17. Если $s \in G_{\{WP^0(n)\}}$, то $s \in \tilde{S}_n$.

Доказательство данной леммы аналогично доказательству теоремы 2, и мы его не приводим.

Перейдем к классу $WP^1(n)$. Заметим, что функция $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$ с единственным выполняющим вектором 1_n является единственной функцией веса 1 в классе $WP^1(n)$.

Лемма 18. Множество функций веса 3 из класса $WP^1(n)$ исчерпывается функциями $f(x_1, \dots, x_n)$ с носителями вида $E_f = \{\alpha, \beta, 1_n\}$, где либо $0 \leq \alpha < \beta < 1$, либо $\alpha \vee \beta = 1_n$.

Доказательство. Функции рассматриваемого вида лежат в классе $WP^1(n)$. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in WP^1(n)$, $\|f\| = 3$ и $E_f = \{\alpha, \beta, 1_n\}$. Без ограничения общности будем считать, что α — вектор минимального веса из E_f . Тогда $\alpha \vee \beta \in E_f$. Если $\alpha \vee \beta = \beta$, то $\alpha < \beta$. В противном случае $\alpha \vee \beta = 1_n$.

Лемма 19. Если $s \in G_{\{WP^1(n)\}}$, то $\|s(\alpha)\| = \|\alpha\|$ для всякого $\alpha \in V_n$.

Доказательство. Рассмотрим множество функций веса 3 в классе $WP^1(n)$, содержащих в своем носителе заданный вектор $\alpha \in V_n$. Обозначим его через $F(\alpha)$. Ясно, что при действии подстановки s данное множество должно перейти в $F(s(\alpha))$. Поэтому $|F(s(\alpha))| = |F(\alpha)|$. Пусть $\|\alpha\| = k$, $\|s(\alpha)\| = l$. Тогда

$$|F(\alpha)| = |\{\beta : \alpha < \beta < 1_n\}| + |\{\beta : 0_n \leq \beta < \alpha\}| + |\{\beta : \alpha \vee \beta = 1_n\}|.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} |\{\beta : \alpha < \beta < 1_n\}| &= 2^{n-k} - 2, & |\{\beta : 0_n \leq \beta < \alpha\}| &= 2^k - 1, \\ |\{\beta : \alpha \vee \beta = 1_n\}| &= 2^k - 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|F(\alpha)| = 2^{k+1} + 2^{n-k} - 4.$$

Аналогично, $|F(s(\alpha))| = 2^{l+1} + 2^{n-l} - 4$. Следовательно, верно равенство $2^{k+1} + 2^{n-k} = 2^{l+1} + 2^{n-l}$, из которого легко заключить, что $l = k$.

Из доказанной леммы, в частности, вытекают равенства

$$s(0_n) = 0_n, \quad s(1_n) = 1_n.$$

Лемма 20. Если $s \in G_{\{WP^1(n)\}}$, то $s \in \tilde{S}_n$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что подстановка s на векторах $e_1, \dots, e_n$ действует как тождественная (в противном случае аналогично доказательству теоремы 1 рассматриваем соответствующую подстановку $\pi \in \tilde{S}_n$ и проводим рассуждения для подстановки $s' = s \cdot \pi^{-1}$). Покажем, что в данном случае подстановка s тождественна.

Если $n = 2$, то тождественность подстановки следует из ее тождественности на векторах e_1, e_2 .

Пусть $n > 2$. Рассмотрим произвольную функцию из $WP^1(n)$ вида $f_{ij} : E_{f_{ij}} = \{e_i, e_j, e_i \vee e_j, 1_n\}$, $1 \leq i < j \leq n$. Тогда $s(E_{f_{ij}}) = \{e_i, e_j, s(e_i \vee e_j), 1_n\}$. По критерию слабой положительности множество $s(E_{f_{ij}})$ содержит вектор $e_i \vee e_j$ веса 2. Тогда выполняется равенство $s(e_i \vee e_j) = e_i \vee e_j$, откуда следует, что подстановка s тождественна на векторах веса 2. Аналогичным образом доказывается, что подстановка s тождественна на векторах веса 3, 4, $\dots$, $n-1$.

Значит, подстановка s тождественна, что и требовалось доказать.

Аналогично леммам 15 и 18 доказывается следующая лемма.

Лемма 21. Множество функций веса 4 из класса $WP^{01}(n)$ исчерпывается функциями $f(x_1, \dots, x_n)$ с носителями вида $E_f = \{0_n, \alpha, \beta, 1_n\}$, где либо $0 \leq \alpha < \beta < 1$, либо $\alpha \vee \beta = 1_n$.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 19.

Лемма 22. Если $s \in G_{\{WP^{01}(n)\}}$, то $\|s(\alpha)\| = \|\alpha\|$ для всякого $\alpha \in V_n$. В частности, $s(0_n) = 0_n$, $s(1_n) = 1_n$.

Лемма 23. Если $s \in G_{\{WP^{01}(n)\}}$, то $s \in \tilde{S}_n$.

Доказательство. Представим класс $WP^1(n)$ в виде объединения непесекающихся классов: $WP^1(n) = WP^{01}(n) \cup (WP^1(n) \setminus WP^{01}(n))$. При этом

$$\begin{aligned} WP^{01}(n) &= \{f(x_1, \dots, x_n) \in WP^1(n) : f(0, \dots, 0) = 1\}, \\ WP^1(n) \setminus WP^{01}(n) &= \{f(x_1, \dots, x_n) \in WP^1(n) : f(0, \dots, 0) = 0\}. \end{aligned}$$

Пусть $s \in G_{\{WP^{01}(n)\}}$. Изучим действие этой подстановки на функциях из класса $WP^1(n) \setminus WP^{01}(n)$. Возьмем $f \in WP^1(n) \setminus WP^{01}(n)$ и построим функцию f' с носителем $E_{f'} = E_f \cup \{0_n\}$. В этом случае $f' \in WP^{01}(n)$. Тогда если $g' = s(f')$, то $E_{g'} = s(E_{f'})$ и $g' \in WP^{01}(n)$. Положим $g : E_g = E_{g'} \setminus \{0_n\}$. Поскольку $s(0_n) = 0_n$, получаем, что $s(E_f) = E_g$. Но очевидно, что $g \in WP^1(n) \setminus WP^{01}(n)$. Следовательно, $s \in G_{\{WP^1(n)\}}$ и по лемме 20 получаем, что $s \in \tilde{S}_n$.

Перейдем к исследованию групп $G_{\{WP_{m,2}(n)\}}$, $m \geq 3$, и $G_{\{WP_{\infty,2}(n)\}}$. Для $m \geq 3$ определим $m + 1$ -местную операцию v_{m+1} на пространстве V_n следующим образом:

$$v_{m+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}) = \alpha_1 \alpha_2 \vee \alpha_1 \alpha_3 \vee \dots \vee \alpha_1 \alpha_{m+1} \vee \dots \vee \alpha_m \alpha_{m+1},$$

а также 3-местную операцию $\omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 \vee \alpha_2 \alpha_3$. В соответствии с результатами работ [5, 8] $f \in WP_{m,2}(n)$ тогда и только тогда, когда множество E_f замкнуто относительно операции v_{m+1} , и $f \in WP_{\infty,2}(n)$ тогда и только тогда, когда множество E_f замкнуто относительно операции ω . Поскольку оба класса являются подклассами класса WP , имеет место следующая лемма.

Лемма 24. *Множество функций веса 2 в классах $WP_{m,2}(n)$ и $WP_{\infty,2}(n)$ исчерпывается функциями $f(x_1, \dots, x_n)$ с носителями вида $E_f = \{\alpha, \beta\}$, где $\alpha \leq \beta$.*

Лемма 25. *Множество функций веса 3 в классах $WP_{m,2}(n)$ и $WP_{\infty,2}(n)$ исчерпывается функциями $f(x_1, \dots, x_n)$ с носителями вида $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, где либо $\alpha \vee \beta = \gamma$, либо $\alpha < \beta < \gamma$.*

Доказательство. Принадлежность функций указанного вида классам $WP_{m,2}(n)$ и $WP_{\infty,2}(n)$ очевидна ввиду замкнутости множества $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ относительно операций v_{m+1} и ω . Докажем обратное включение. Поскольку $WP_{m,2}(n) \subset WP_{\infty,2}(n)$, достаточно рассмотреть функции веса 3 из класса $WP_{\infty,2}(n)$.

Пусть $E_f = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, γ — вектор максимального веса, а α — вектор минимального веса в E_f . Множество E_f обязано содержать векторы $\alpha \vee \beta$, $\alpha \vee \gamma$, $\beta \vee \gamma$, $\alpha \vee \beta\gamma$, $\beta \vee \alpha\gamma$, $\gamma \vee \alpha\beta$. Рассмотрим вектор $\alpha \vee \gamma$. Из определения векторов α и γ следует, что $\alpha \vee \gamma \neq \alpha$. Поэтому $\alpha \vee \gamma \in \{\beta, \gamma\}$. Если $\alpha \vee \gamma = \beta$, то $\|\beta\| \geq \|\gamma\|$. Но тогда $\|\beta\| = \|\gamma\|$, и в этом случае $\beta = \gamma$, что невозможно. Следовательно, $\alpha \vee \gamma = \gamma$ и $\alpha \leq \gamma$. Аналогичным образом $\beta \leq \gamma$.

Очевидно, что $\alpha \vee \beta \in \{\beta, \gamma\}$. Если $\alpha \vee \gamma = \beta$, то $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Во втором случае $\alpha \vee \beta = \gamma$, что доказывает лемму.

Лемма 26. *Если $s \in G_{\{WP_{m,2}(n)\}}$ или $s \in G_{\{WP_{\infty,2}(n)\}}$, то $\|s(\alpha)\| = \|\alpha\|$ для всякого $\alpha \in V_n$. В частности, $s(0_n) = 0_n$, $s(1_n) = 1_n$.*

Доказательство. Из леммы 25 очевидным образом следует, что $\|s(\alpha)\| \in \{\|\alpha\|, n - \|\alpha\|\}$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству соответствующего этапа теоремы 9.

Аналогично теореме 9 доказывается следующий факт.

Лемма 27. *Если $s \in G_{\{WP_{m,2}(n)\}}$ или $s \in G_{\{WP_{\infty,2}(n)\}}$, то $s \in \tilde{S}_n$.*

Доказательство теоремы 14 следует из лемм 17, 20, 23 и 27.

4. Стабилизаторы некоторых подклассов класса мультиаффинных функций

В [4] было доказано равенство $G_{\{A(n)\}} = AGL(n, 2)$. В этом разделе строятся стабилизаторы для классов $A^0(n)$, $A^1(n)$, $M_1(n) = A(n) \cap Bi(n)$, $M_2(n) = A(n) \cap WP(n)$, $M_1^0(n)$, $M_1^1(n)$.

Теорема 28. При $n \geq 2$ верны равенства

$$G_{\{A^0(n)\}} = GL(n, 2), \quad G_{\{A^1(n)\}} = AGL(n, 2)_{1_n}.$$

Доказательство. Рассмотрим группу $G_{\{A^0(n)\}}$. Заметим, что $f(x_1, \dots, x_n) \in A^0$ тогда и только тогда, когда функция f представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigotimes_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus \dots \oplus x_{s_{l,k_l}} \oplus 1) = \bigotimes_{l=1}^t (\langle \vec{a}_l, \vec{x} \rangle \oplus 1),$$

где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{a}_i = (0, \dots, 0, \underset{i_1}{1}, 0, \dots, 0, \underset{i_t}{1}, 0, \dots)$, $i = 1, 2, \dots, t$.

Положим $C = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_t \end{pmatrix}$. Соотношение $\alpha \in E_f$ будет иметь место тогда

и только тогда, когда $C\alpha^T \oplus 1_t = 1_t$, т. е. когда α^T — решение однородной системы линейных уравнений $Cx^\downarrow = 0_t^\downarrow$. Это означает, что носители функций из $A^0(n)$ суть подпространства пространства V_n . Поэтому $GL(n, 2) < G_{\{A^0(n)\}}$.

Пусть теперь $s \in G_{\{A^0(n)\}}$. Покажем, что $s \in GL(n, 2)$. Так как в $A^0(n)$ есть только одна функция веса 1 с выполняющим вектором 0_n , то $s(0_n) = 0_n$. Для произвольных векторов $\alpha, \beta \in V_n \setminus \{0_n\}$ рассмотрим такую функцию $f \in A^0(n)$ веса 4, что $E_f = \{0_n, \alpha, \beta, \alpha \oplus \beta\}$. При действии отображения s данная функция перейдет в $f^s : E_{f^s} = \{0_n, s(\alpha), s(\beta), s(\alpha \oplus \beta)\}$. Поскольку E_{f^s} — подпространство в V_n , получаем, что $s(\alpha) \oplus s(\beta) = s(\alpha \oplus \beta)$. Это означает, что s — линейное преобразование V_n . Так как s — биекция, то $s \in GL(n, 2)$.

Перейдем к рассмотрению группы $G_{\{A^1(n)\}}$. Заметим, что $f(x_1, \dots, x_n) \in A^1$ тогда и только тогда, когда $E_f = 1_n \oplus E_g = \{1_n \oplus \alpha, \alpha \in E_g\}$ для некоторой функции $g \in A^0$. Поставим каждому $\alpha \in E_f$ в соответствие вектор $\alpha' = 1_n \oplus \alpha \in E_g$.

Если $s \in AGL(n, 2)_{1_n}$, то $s(\alpha) = \alpha C \oplus \beta$ для невырожденной матрицы C и вектора β , удовлетворяющего условию $\beta = \vec{1}_n \oplus \vec{1}_n \cdot C$. Тогда для любого вектора $\alpha \in E_f$

$$s(\alpha) = s(1_n \oplus \alpha') = (1_n \oplus \alpha')C \oplus \beta = (1_n \oplus \alpha')C \oplus 1_n \oplus 1_n \cdot C = 1_n \oplus \alpha'C.$$

Поэтому выполняется равенство $s(E_f) = 1 \oplus E_h$ для некоторой функции $h \in A^0$. Таким образом, $AGL(n, 2)_{1_n} < G_{\{A^1(n)\}}$.

Докажем обратное включение. Заметим, что класс A^1 содержит функции $x_1, \dots, x_n$. В соответствии с леммой 1 из [4] координатные функции подстановки s обязаны лежать в A^1 . Следовательно, $s \in AGL(n, 2)$. А так как $s(1_n) = 1_n$, то $s \in AGL(n, 2)_{1_n}$.

Теорема 29. При $n \geq 2$ верны равенства

$$G_{\{M_1(n)\}} = CS_n, \quad G_{\{M_2(n)\}} = Q_n.$$

Доказательство. Включения $CS_n < G_{\{M_1(n)\}}$, $Q_n < G_{\{M_2(n)\}}$ очевидны.

Пусть $s \in G_{\{M_1(n)\}}$ и $s_1, \dots, s_n$ — координатные функции отображения s . Поскольку функции $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ лежат в классе $M_1(n)$, то по лемме 2 из [4] функции $s_1, \dots, s_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n$ являются равновероятными функциями из класса $M_1(n)$. Все равновероятные функции этого класса исчерпываются функциями вида $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ и вида $x_i \oplus x_j \oplus 1$, $1 \leq i < j \leq n$. Однако тем свойством, что и функция, и ее отрицание лежат в $M_1(n)$, обладают только функции $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Следовательно, для всякого $i : 1 \leq i \leq n$ $s_i \in \{x_j, \bar{x}_j, 1 \leq j \leq n\}$, откуда получаем, что $s \in Q_n$.

Это означает, что подстановку s можно задать такой парой (σ, β) , $\sigma \in S_n$, $\beta \in V_n$, что $s(\alpha) = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) \oplus \beta$ для всякого $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$. Тогда

$$f^s(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)} \oplus b_1, \dots, x_{\sigma(n)} \oplus b_n).$$

Пусть вектор $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ отличен от векторов 0_n и 1_n . Без ограничения общности можно считать, что подстановка σ тождественная, а $\beta = (0, 1, b_2, \dots, b_n)$. Рассмотрим действие преобразования s на функцию $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. В этом случае $f^s(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \notin M_1(n)$. Следовательно, $\beta \in \{0_n, 1_n\}$ и $s \in CS_n$, т. е. $G_{\{M_1(n)\}} = CS_n$.

Равенство $G_{\{M_2(n)\}} = Q_n$ доказывается аналогичным образом.

Теорема 30. При $n \geq 2$ верны равенства

$$G_{\{M_1^0(n)\}} = G_{\{M_1^1(n)\}} = \tilde{S}_n.$$

Доказательство. Включение группы $\tilde{S}_n$ в искомые группы очевидно. Докажем обратное включение. Рассмотрим группу $G_{\{M_1^1(n)\}}$. Пусть $s \in G_{\{M_1^1(n)\}}$, $s = (s_1, \dots, s_n)$. Тогда по лемме 2 из [4] $s_1, \dots, s_n$ — равновероятные функции из класса $M_1^0(n)$. В этом случае для каждой координатной функции s_i либо $s_i = x_j$, либо $s_i = x_j \oplus x_k \oplus 1$. Пусть $s \notin \tilde{S}_n$. Тогда среди функций $s_1, \dots, s_n$

найдется функция вида $s_i = x_j \oplus x_k \oplus 1$. Без ограничения общности можно считать, что $s_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

Рассмотрим действие подстановки s на функцию $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Возможны два случая: либо $s_2 = x_i \oplus x_j \oplus 1$, $1 \leq i < j \leq n$, $(i, j) \neq (1, 2)$, либо $s_2 = x_i$, $1 \leq i \leq n$. В первом случае $f^s(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_i \oplus x_j$ и функция $f^s(x_1, x_2)$ ни при каких значениях i и j не может лежать в классе $M_1^1(n)$. Во втором случае $f^s(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_i \oplus 1$ и для всех возможных значений i имеем $f^s(x_1, x_2) \notin M_1^1(n)$. Следовательно, все координатные функции подстановки s зависят от одной переменной, а значит, $s \in \tilde{S}_n$.

Рассмотрим класс $M_1^0(n)$. Он связан с классом $M_1^1(n)$ соотношением

$$f(x_1, \dots, x_n) \in M_1^0(n) \Leftrightarrow f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in M_1^1(n).$$

Пусть $s = (s_1, \dots, s_n) \in G_{\{M_1^0(n)\}}$. Для произвольной функции $f(x_1, \dots, x_n) \in M_1^0(n)$ положим

$$g(x_1, \dots, x_n) = f^s(x_1, \dots, x_n) = f(s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Тогда

$$g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(s_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \dots, s_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)) = f^s(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in M_1^1(n).$$

Следовательно, $s \in G_{\{M_1^1(n)\}} = \tilde{S}_n$.

Заключение

Резюмируя полученные результаты, приведем таблицу стабилизаторов в группе $\text{Sym}(V_n)$ для некоторых классов функций от n переменных из Галуа-замкнутых подклассов классов Шефера.

Таблица 2.

№	Класс	Группа	№	Класс	Группа	№	Класс	Группа
1	P_2	$\text{Sym}(V_n)$	13	M_3^0	$\tilde{S}_n$	25	$M4$	$\tilde{S}_n$
2	$0 - S$	S_{2^n-1}	14	M_3^1	$\tilde{S}_n$	26	Bi^1	$\tilde{S}_n$
3	$1 - S$	S_{2^n-1}	15	M_3^{01}	$\overline{CS}_n$	27	WN	$\tilde{S}_n$
4	CL	S_{2^n-1}	16	MI	CS_n	28	WN^0	$\tilde{S}_n$
5	$1 - S \cap$ $\cap 0 - S$	S_{2^n-1}	17	M_1^0	$\tilde{S}_n$	29	WN^1	$\tilde{S}_n$
6	CL^1	S_{2^n-1-1}	18	M_1^1	$\tilde{S}_n$	30	WN^{01}	$\tilde{S}_n$

№	Класс	Группа	№	Класс	Группа	№	Класс	Группа
7		$AGL(n, 2)$	19	WP	$\bar{S}_n$	31	$WN_{\infty, 2}$	$\bar{S}_n$
8	A^0	$GL(n, 2)$	20	WP^0	$\bar{S}_n$	32	$WN_{m, 2},$ $m \geq 3$	$\bar{S}_n$
9	A^1	$AGL(n, 2)_{1_n}$	21	WP^1	$\bar{S}_n$	33	$M5$	$\bar{S}_n$
10	Bi	Q_n	22	WP^{01}	$\bar{S}_n$	34	Bi^0	$\bar{S}_n$
11	M_2	Q_n	23	$WP_{\infty, 2}$	$\bar{S}_n$			
12	M_3	CS_n	24	$WP_{m, 2},$ $m \geq 3$	$\bar{S}_n$			

Список литературы

- [1] Schaefer T., "Complexity of satisfiability problems", Proc. 10 Annual ACM Symp. Theory of Comput. Machinery, 1978, 216–226.
- [2] Горшков С. П., Применение теории NP-полных задач для оценки сложности решения систем булевых уравнений", *Обозр. прикл. промышл. матем.*, **2:3** (1995), 325–398.
- [3] Гизунов С. А., Носов В. А., "О классификации всех булевых функций четырех переменных по классам Шефера", *Обозр. прикл. промышл. матем.*, **2:3** (1995), 440–467.
- [4] Горшков С. П., Тарасов А. В., "О максимальных группах инвариантных преобразований мультиаффинных, бионктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций", *Дискретная математика*, **21:2** (2009), 94–101.
- [5] Литвиненко В. С., Тарасов А. В., "Классы Шефера, классы Поста и соответствия Галуа", *Математические вопросы криптографии*, **6:1** (2015), 81–108.
- [6] Горшков С. П., "О пересечениях классов мультиаффинных, бионктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций", *Обозр. прикл. промышл. матем.*, **4:2** (1997), 238–259.
- [7] Creighnou N., Khanna S., Sudan M., *Complexity classifications of Boolean constraint satisfaction problems*, SIAM Press, Philadelphia, USA, 2001.
- [8] Тарасов А. В. "Обобщение критерия бионктивности Шефера", *Дискретная математика*, **24:2** (2012), 91–99.
- [9] Бондарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А., "Теория Галуа для классов Поста", *Кибернетика*, **3** (1969), 1–10; **5** (1969), 1–9.
- [10] Марченков С. С., "Инварианты классов Поста", *Фундам. и прикл. матем.*, **4: 4** (1998), 1385–1404.
- [11] Марченков С. С., *Замкнутые классы булевых функций*, М.: Физматлит, 2001, 126 с.