Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Грибов, П. А. Золотых, А. В. Михалёв, Построение алгебраической крип-
тосистемы над квазигрупповым кольцом, *Матем. вопр. криптогр.*, 2010, том 1,
выпуск 4, 23–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk19>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:45:48

Построение алгебраической криптосистемы над квазигрупповым кольцом

А. В. Грибов, П. А. Золотых, А. В. Михалёв

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Получено 22.IV.2010

Наиболее распространенными криптосистемами с открытым ключом являются RSA, криптосистема Эль-Гамала, а также схемы шифрования, в основе которых лежит проблема Диффи–Хеллмана. Мы строим аналогичную криптосистему с помощью неассоциативного квазигруппового кольца. Описаны модификации, увеличивающие стойкость этой схемы относительно возможных атак. Анализируются конкретные неассоциативные алгебраические структуры, пригодные для построения криптосистем.

Ключевые слова: квазигрупповое кольцо, автоморфизмы квазигруппового кольца, криптосистема с открытым ключом

A construction of algebraic cryptosystem over the quasigroup ring

A. V. Gribov, P. A. Zolotikh, A. V. Mikhalev

Lomonosov Moscow state university

Abstract. Nowadays the most popular public key cryptosystems are RSA, the ElGamal cryptosystem and encryption schemes based on the Diffie-Hellman problem. We construct a similar cryptosystem by means of a non-associative structure, namely, quasigroup ring. Some modifications increasing the security of this scheme against possible attacks are described. Several concrete non-associative algebraic structures acceptable for cryptosystem constructions were considered and analyzed also.

Key words: quasigroup ring, automorphism of quasigroup, public-key cryptosystem

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2010, vol. 1, no. 4, pp. 23–32 (Russian).

1. Вводные понятия

Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей, L — лупа (квазигруппа с единицей). Рассмотрим множество KL , состоящее из всех формальных сумм вида $\sum_{l \in L} \alpha_l \cdot l$ ($\alpha_l \in K$), в которых конечное число α_l отлично от нуля. Два элемента $a, b \in KL$ считаются равными тогда и только тогда, когда $\alpha_l = \beta_l$ для всех $l \in L$.

На множестве KL определены операции сложения и умножения следующим образом: если $a = \sum_{l \in L} \alpha_l \cdot l$ и $b = \sum_{l \in L} \beta_l \cdot l$ — элементы KL , то

$$a + b = \sum_{l \in L} (\alpha_l + \beta_l) \cdot l, \quad ab = \sum_{l \in L} \left(\sum_{m, h \in L: mh=l} \alpha_m \beta_h \right) l.$$

Таким образом, относительно этих операций множество KL является неассоциативным кольцом с единицей. Удобно отождествить $l \in L$ с элементом $1 \cdot l \in KL$, а $\alpha \in K$ — с элементом $\alpha \cdot e$, где e — единица лупы, тогда K и L являются подмножествами в KL . Предполагаем, что группы автоморфизмов $\text{Aut } K$ и $\text{Aut } L$ некоммутативны, причем $|\text{Aut } K| \geq t_1$, $|\text{Aut } L| \geq t_2$, где t_1 и t_2 — параметры безопасности. Также предполагаем, что в KL достаточно элементов с нулевым левым аннулятором.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть R — кольцо или лупа, A — некоторое подмножество автоморфизмов в $\text{Aut } R$, α — случайно выбранный элемент из A . Предположим, что известно некоторое множество пар $(x_i, \alpha(x_i))$, $i = 1, \dots, n$, где $x_i \in R$. Требуется найти такой автоморфизм $\alpha' \in A$, что $\alpha'(x_i) = \alpha(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим эту задачу через $\Omega_n(A, R)$.

Заметим, что при отсутствии существенной информации о множествах A и R задача $\Omega_n(A, R)$ является вычислительно трудной, поскольку она разрешима только полным перебором всех элементов множества A и для каждого выбранного $\alpha' \in A$ — проверкой условия $\alpha'(x_i) = \alpha(x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

2. Построение алгебраической криптосистемы над кольцом и лупой

Построим на задаче Ω_n криптосистему.

Участник A :

1. Конструирует такой автоморфизм $\sigma \in \text{Aut } K$, что $|\sigma| \geq t_3$, σ имеет нетривиальный централизатор $C(\sigma)$ и $|C(\sigma) \setminus \langle \sigma \rangle| \geq t_4$, где t_3, t_4 — параметры безопасности.

2. Конструирует такой автоморфизм $\eta \in \text{Aut } L$, что $|\eta| \geq t_5$, η имеет нетривиальный централизатор $C(\eta)$ и $|C(\eta) \setminus \langle \eta \rangle| \geq t_6$, где t_5, t_6 — параметры безопасности.
3. Случайно выбирает автоморфизм $\tau \in C(\sigma) \setminus \langle \sigma \rangle$.
4. Случайно выбирает автоморфизм $\omega \in C(\eta) \setminus \langle \eta \rangle$.
5. По τ и ω строит автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } KL$ (назовем его секретным автоморфизмом) так:

$$\varphi(h) = \tau(a_{l_1})\omega(l_1) + \dots + \tau(a_{l_n})\omega(l_n)$$

для любого $h \in KL$ вида $h = a_{l_1}l_1 + \dots + a_{l_n}l_n$, где $L = \{l_1, \dots, l_n\}$, $a_{l_1}, \dots, a_{l_n} \in K$.

6. Выбирает элементы $a \in KL$, $x \in KL$.
7. Вычисляет $\varphi(x)$ и $\varphi(a)$.

В результате получается открытый ключ участника A

$$(\sigma, \eta, x, \varphi(x), a, \varphi(a)).$$

Участник B :

1. Выбирает натуральные числа (i, j, k, l) .
2. Используя открытый ключ участника A , получает пары автоморфизмов (σ^i, η^j) , (σ^k, η^l) и по ним строит автоморфизмы $\psi, \chi \in \text{Aut } KL$ таким же способом, как и участник A , т. е.

$$\begin{aligned}\psi(h) &= \sigma^i(a_{l_1})\eta^j(l_1) + \dots + \sigma^i(a_{l_n})\eta^j(l_n), \\ \chi(h) &= \sigma^k(a_{l_1})\eta^l(l_1) + \dots + \sigma^k(a_{l_n})\eta^l(l_n)\end{aligned}$$

для любого $h \in KL$ вида $h = a_{l_1}l_1 + \dots + a_{l_n}l_n$. Автоморфизмы ψ, χ будем называть сеансовыми. Так как $\tau \in C(\sigma) \setminus \langle \sigma \rangle$ и $\omega \in C(\eta) \setminus \langle \eta \rangle$, то автоморфизмы τ и σ , ω и η попарно коммутируют. Поэтому коммутируют и построенные по ним автоморфизмы φ и ψ , φ и χ .

3. Вычисляет $\chi(a) \cdot \psi(x)$.
4. Вычисляет $\chi(\varphi(a)) \cdot \psi(\varphi(x))$ и левый аннулятор $\text{Ann}(\chi(\varphi(a)) \cdot \psi(\varphi(x)))$.

5. Если полученный аннулятор $Ann(\chi(\varphi(a)) \cdot \psi(\varphi(x)))$ ненулевой, то проводится новый сеанс связи с выбором новых элементов a и x или же выбираются другие сеансовые автоморфизмы.
6. Записывает исходный текст, который надо передать, в виде $m \in KL$ и вычисляет $m \cdot [\chi(\varphi(a)) \cdot \psi(\varphi(x))]$.
7. Отправляет A криптограмму

$$(\chi(a) \cdot \psi(x), m \cdot [\chi(\varphi(a)) \cdot \psi(\varphi(x))]).$$

Получив криптограмму, участник A расшифровывает ее:

1. Используя секретный автоморфизм φ , вычисляет $\varphi(\chi(a) \cdot \psi(x))$.
2. Расшифровывает посланный текст пользуясь тем, что χ , ψ и φ коммутируют, поскольку сеансовые автоморфизмы ψ , χ построены на степенях выбранных автоморфизмов σ , η , а секретный автоморфизм φ построен с помощью элементов из централизаторов σ , η . Таким образом, участник A знает $m \cdot [\varphi(\chi(a) \cdot \psi(x))]$ и $\varphi(\chi(a) \cdot \psi(x))$; следовательно, для получения сообщения m ему достаточно решить линейную систему с коэффициентами из кольца K . Для этого элемент $\chi(\varphi(a)) \cdot \psi(\varphi(x))$ выбирается с нулевым левым аннулятором. Это нетрудно сделать, если в качестве K взять конечномерную алгебру над полем. Можно в качестве K брать и другие кольца, главное, чтобы можно было решать систему линейных уравнений с коэффициентами из этого кольца.

3. Анализ атак на криптосистему

Рассмотрим некоторые атаки на криптосистему.

1. Атака только с криптограммой.

Пусть криптоаналитик располагает открытым ключом участника A и криптограммой. Перед ним стоит следующая задача: по известным парам $(a, \varphi(a))$, $(x, \varphi(x))$ найти такой $\alpha \in \text{Aut } KL$, индуцированный автоморфизмами (σ', η') , что $\varphi(a) = \alpha(a)$, $\varphi(x) = \alpha(x)$. К тому же необходимо, чтобы $\sigma' \in C(\sigma) \setminus \langle \sigma \rangle$, а $\eta' \in C(\eta) \setminus \langle \eta \rangle$.

Построим α . Положим $\alpha(a) := \varphi(a)$, $\alpha(x) := \varphi(x)$. Тогда определяются

$$\alpha(ax) = \alpha(a) \cdot \alpha(x) := \varphi(a) \cdot \varphi(x) \quad \text{и} \quad \alpha(xa) = \alpha(x) \cdot \alpha(a) := \varphi(x) \cdot \varphi(a).$$

Но доопределить действие α на элемент $\chi(a) \cdot \psi(x)$ можно лишь перебором его образа с последующей проверкой того, что $\sigma' \in C(\sigma) \setminus \langle \sigma \rangle$, а $\eta' \in C(\eta) \setminus \langle \eta \rangle$.

Это вычислительно не легче перебора всех автоморфизмов, индуцированных парами $(\sigma', \eta') \in (C(\sigma) \setminus \langle \sigma \rangle) \times (C(\eta) \setminus \langle \eta \rangle)$, удовлетворяющих начальным условиям $\alpha(a) = \varphi(a)$ и $\alpha(x) = \varphi(x)$. В итоге получаем задачу $\Omega_2(Y, KL)$, где Y — это множество автоморфизмов KL , полученных с помощью пар $(\sigma', \eta') \in \left[(C(\sigma) \setminus \langle \sigma \rangle) \times (C(\eta) \setminus \langle \eta \rangle) \right]$.

Для оценки сложности вскрытия криптосистемы злоумышленниками будем использовать отношение объема передаваемой информации ко всему объему, из которого она была выбрана, т. е. $\frac{2}{t_4 \cdot t_6}$. Поэтому при надлежащем выборе параметров безопасности данная задача является вычислительно трудной.

2. Атака на сеансовые автоморфизмы ψ и χ .

Другой способ атаки — найти автоморфизмы ψ и χ , а затем решить относительно t уравнение $t \cdot [\chi(\varphi(a)) \cdot \psi(\varphi(x))] = h$, где h известен из криптограммы. Пусть ψ был построен с помощью автоморфизмов (σ_1, η_1) , а автоморфизм χ — с помощью (σ_2, η_2) . Чтобы найти ψ и χ , криптоаналитику придется перебрать пары $(\sigma_1, \eta_1) \in (\langle \sigma \rangle, \langle \eta \rangle)$ и $(\sigma_2, \eta_2) \in (\langle \sigma \rangle, \langle \eta \rangle)$ с последующей проверкой условия $\chi(a)\psi(x) = h_1$, где h_1 известен из криптограммы. Следовательно, определенная выше сложность атаки характеризуется величиной $\frac{1}{t_3 \cdot t_5^2}$. Опять видим, что при правильном выборе соответствующих параметров безопасности эта задача является вычислительно трудной.

Поясним, почему для построения сеансового автоморфизма рассматривался не один автоморфизм, а произведение $\chi(a)\psi(x)$. В случае единственного автоморфизма открытый ключ участника — это $(\sigma, \eta, x, \varphi(x))$, а криптограмма — $(\psi(x), t \cdot \psi(\varphi(x)))$. В этом случае стали бы возможны следующие атаки.

а) *Атака на сеансовый автоморфизм.* Пусть автоморфизм ψ , как и раньше, построен с помощью (σ^i, η^j) . Для нахождения σ^i можно учесть тот факт, что любой автоморфизм лупы отображает единицу в единицу. Тогда из коэффициентов при единице лупы L для x и $\psi(x)$ получаем пару элементов кольца K вида $(a_e, \sigma^i(a_e))$; аналогичные рассуждения верны и для коэффициентов при единице кольца K . Таким образом, криптоаналитик получает дополнительную информацию о сеансовом автоморфизме ψ . В случае выбора произведения двух сеансовых автоморфизмов такая атака невозможна, так как коэффициент при единице у элемента $\psi(x) \in KL$ равен $\sum_{lh=e} \alpha_l \beta_h$, где $l, h \in L$, а это не позволяет получить пару вида $(a_e, \sigma^i(a_e))$.

б) *Атака на автоморфизм φ с известным исходным текстом.* Криптоаналитик вычисляет $x \cdot \psi(x) = y$. Тогда $\varphi(x) \cdot \psi(\varphi(x)) = \varphi(x \cdot \psi(x))$. Следовательно, у криптоаналитика имеется как пара $(x, \varphi(x))$, так и пара $(y, \varphi(y))$.

В случае выбора произведения двух сеансовых автоморфизмов такая атака существенно ослаблена, так как не удастся получить вторую пару подобным образом, и придется восстанавливать φ по одной паре.

Таким образом, выбор произведения двух сеансовых автоморфизмов в целом оправдан.

3. Атака с выбранным исходным текстом.

Эта атака основана на попытке криптоаналитика получить $\chi(\varphi(a))\psi(\varphi(x)) \in KL$ с последующим решением уравнения $m \times \chi(\varphi(a))\psi(\varphi(x))$ относительно m посредством нового сеанса связи с участником В в качестве участника А. Даже если участник В повторяет тот же исходный текст m , то он должен сконструировать новые сеансовые автоморфизмы $\psi' \neq \psi$ и $\chi' \neq \chi$. Поэтому криптоаналитик получит не $m \cdot \chi(\varphi(a))\psi(\varphi(x))$, а $m \cdot \chi'(\varphi(a))\psi'(\varphi(x))$. И даже если он решит новое уравнение относительно $\chi'(\varphi(a))\psi'(\varphi(x))$, никакой новой информации относительно $\chi(\varphi(a))\psi(\varphi(x))$ он не получит.

4. Поиск подходящих для шифрования колец и луп

Рассмотрим некоторые структуры, подходящие для построения криптосистемы. В качестве лупы будем брать прямое произведение нескольких групп и луп, варьируя их количество для подбора параметров безопасности.

Для построения примера рассмотрим следующую неассоциативную лупу Муфанг M порядка 16. Приведем ее таблицу Кэли:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	4	8	6	3	1	5	7	14	9	16	10	11	12	13	15
3	5	4	7	6	8	1	2	15	13	9	11	14	16	12	10
4	6	7	1	8	2	3	5	12	14	15	9	16	10	11	13
5	7	2	8	4	3	6	1	13	11	14	16	12	15	10	9
6	1	5	2	7	4	8	3	10	12	13	14	15	9	16	11
7	8	1	3	2	5	4	6	11	16	12	15	10	13	9	14
8	3	6	5	1	7	2	4	16	15	10	13	9	11	14	12
9	10	11	12	16	14	15	13	4	6	7	1	5	2	3	8
10	12	16	14	15	9	13	11	2	4	5	6	3	1	8	7
11	13	12	15	10	16	9	14	3	8	4	7	6	5	1	2
12	14	15	9	13	10	11	16	1	2	3	4	8	6	7	5
13	15	10	16	9	11	14	12	8	7	2	5	4	3	6	1
14	9	13	10	11	12	16	15	6	1	8	2	7	4	5	3
15	16	9	11	14	13	12	10	7	5	1	3	2	8	4	6
16	11	14	13	12	15	10	9	5	3	6	8	1	7	2	4

Отметим, что $|\text{Aut } M| = 1344$, причем система порождающих элементов в группе $\text{Aut } M$ (если ее представить в виде подгруппы группы перестановок) состоит из двух элементов:

$$\begin{aligned} a &= (2, 3)(5, 8)(6, 7)(10, 11)(13, 16)(14, 15), \\ b &= (2, 14, 13, 15, 8, 9, 3)(5, 12, 7, 6, 10, 16, 11). \end{aligned}$$

Заметим, что $|a| = 2$, $|b| = 7$, а $|C(a)| = 16$, $|C(b)| = 7$.

Усложним структуру. Теперь представим $S = \text{Aut}(M \times M)$, $|S| = 231211008$ в виде подгруппы группы перестановок. Система порождающих:

$$\begin{aligned} a &= (129, 145, 177, 209)(130, 146, 178, 210)(131, 147, 179, 211)(132, 148, 180, 212) \\ &\quad (133, 149, 181, 213)(134, 150, 182, 214)(135, 151, 183, 215)(136, 152, 184, 216) \\ &\quad (137, 153, 185, 217)(138, 154, 186, 218)(139, 155, 187, 219)(140, 156, 188, 220) \\ &\quad (141, 157, 189, 221)(142, 158, 190, 222)(143, 159, 191, 223)(144, 160, 192, 224) \\ &\quad (161, 241, 225, 193)(162, 242, 226, 194)(163, 243, 227, 195)(164, 244, 228, 196) \\ &\quad (165, 245, 229, 197)(166, 246, 230, 198)(167, 247, 231, 199)(168, 248, 232, 200) \\ &\quad (169, 249, 233, 201)(170, 250, 234, 202)(171, 251, 235, 203)(172, 252, 236, 204) \\ &\quad (173, 253, 237, 205)(174, 254, 238, 206)(175, 255, 239, 207)(176, 256, 240, 208), \\ b &= (17, 132, 36, 20, 129, 33)(18, 134, 38, 22, 130, 34)(19, 135, 39, 23, 131, 35) \\ &\quad (21, 136, 40, 24, 133, 37)(25, 140, 44, 28, 137, 41)(26, 142, 46, 30, 138, 42) \\ &\quad (27, 143, 47, 31, 139, 43)(29, 144, 48, 32, 141, 45)(65, 212, 161)(66, 214, 162) \\ &\quad (67, 215, 163)(68, 209, 164)(69, 216, 165)(70, 210, 166)(71, 211, 167)(72, 213, 168) \\ &\quad (73, 220, 169)(74, 222, 170)(75, 223, 171)(76, 217, 172)(77, 224, 173)(78, 218, 174) \\ &\quad (79, 219, 175)(80, 221, 176)(81, 180, 100, 84, 177, 97)(82, 182, 102, 86, 178, 98) \\ &\quad (83, 183, 103, 87, 179, 99)(85, 184, 104, 88, 181, 101)(89, 188, 108, 92, 185, 105) \\ &\quad (90, 190, 110, 94, 186, 106)(91, 191, 111, 95, 187, 107)(93, 192, 112, 96, 189, 109), \\ c &= (113, 148, 225)(114, 150, 226)(115, 151, 227)(116, 145, 228)(117, 152, 229) \\ &\quad (118, 146, 230)(119, 147, 231)(120, 149, 232)(121, 156, 233)(122, 158, 234) \\ &\quad (123, 159, 235)(124, 153, 236)(125, 160, 237)(126, 154, 238)(127, 155, 239) \\ &\quad (128, 157, 240)(193, 196)(194, 198)(195, 199)(197, 200)(201, 204)(202, 206) \\ &\quad (203, 207)(205, 208)(241, 244)(242, 246)(243, 247)(245, 248)(249, 252) \\ &\quad (250, 254)(251, 255)(253, 256)(2, 17)(3, 33)(4, 49)(5, 65)(6, 81)(7, 97) \\ &\quad (8, 113)(9, 129)(10, 145)(11, 161)(12, 177)(13, 193)(14, 209)(15, 225) \\ &\quad (16, 241)(19, 34)(20, 50)(21, 66)(22, 82)(23, 98)(24, 114)(25, 130)(26, 146) \\ &\quad (27, 162)(28, 178)(29, 194)(30, 210)(31, 226)(32, 242)(36, 51)(37, 67)(38, 83) \\ &\quad (39, 99)(40, 115)(41, 131)(42, 147)(43, 163)(44, 179)(45, 195)(46, 211) \end{aligned}$$

(47, 227)(48, 243)(53, 68)(54, 84)(55, 100)(56, 116)(57, 132)(58, 148)(59, 164)
 (60, 180)(61, 196)(62, 212)(63, 228)(64, 244)(70, 85)(71, 101)(72, 117)
 (73, 133)(74, 149)(75, 165)(76, 181)(77, 197)(78, 213)(79, 229)(80, 245)
 (87, 102)(88, 118)(89, 134)(90, 150)(91, 166)(92, 182)(93, 198)(94, 214)
 (95, 230)(96, 246)(104, 119)(105, 135)(106, 151)(107, 167)(108, 183)
 (109, 199)(110, 215)(111, 231)(112, 247)(121, 136)(122, 152)(123, 168)
 (124, 184)(125, 200)(126, 216)(127, 232)(128, 248)(138, 153)(139, 169)
 (140, 185)(141, 201)(142, 217)(143, 233)(144, 249)(155, 170)(156, 186)
 (157, 202)(158, 218)(159, 234)(160, 250)(172, 187)(173, 203)(174, 219)
 (175, 235)(176, 251)(189, 204)(190, 220)(191, 236)(192, 252)(206, 221)
 (207, 237)(208, 253)(223, 238)(224, 254)(240, 255),

причем $|a| = 4$, $|b| = 6$, $|c| = 2$.

Рассмотрим централизаторы этих элементов: $|C(a)| = 1376256$, $|C(b)| = 129024$, $|C(c)| = 21504$. Как видим, даже на структурах такого маленького порядка получаются достаточно большие централизаторы. Итак, если включить несколько таких луп M в прямое произведение, то это будет лупа с большим количеством автоморфизмов, среди которых есть элементы с большими централизаторами.

Чтобы увеличить порядок самих автоморфизмов, сделаем следующее. Рассмотрим циклическую группу $H = \langle a \rangle$, порожденную элементом a . Как известно, $|\text{Aut } H| = \varphi(a)$, где φ — функция Эйлера. Мы всегда можем подобрать порядок a таким образом, чтобы в $\text{Aut } H$ существовали автоморфизмы большого порядка. Итак, если взять лупу вида $S = M \times M \times \dots \times M \times H \times \dots \times H$, то в группе ее автоморфизмов будет достаточно много элементов, подходящих для построения криптосистемы.

В качестве кольца рассмотрим $K = M_2(Z_5)$ — кольцо квадратных матриц второго порядка над Z_5 . Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^*$ и σ — внутренний автоморфизм кольца K , индуцированный матрицей A . Понятно, что степени автоморфизма индуцированы соответствующими степенями матрицы A , а значит, $|\sigma| = 5$. Для простоты будем рассматривать централизатор $C'(\sigma)$ автоморфизма σ в группе $\text{Int } K$ внутренних автоморфизмов кольца K , и тогда $|C'(\sigma)| = 20$.

Для построения квазигруппового кольца возьмем, например, $K = M_2(Z_5)$ и $S = M \times M$. Так как $|K| = 625$, $|S| = 256$, то $|KS| = 625^{256} > 2^{2304}$. Заметим, что и автоморфизмов довольно много:

$$|\text{Aut } K| > |\text{Int } K| = |GL_2(Z_5)| = 480, \quad |\text{Aut } S| = 231211008,$$

а число автоморфизмов KS равно $|\text{Aut } K| \cdot |\text{Aut } S| = 11098128384$. Если брать в качестве S прямое произведение большего количества M и H , то получим большое число автоморфизмов при сравнительно небольшом размере структуры KS .

5. Некоторые модификации криптосистемы

Для повышения устойчивости к атакам описанную криптосистему можно модифицировать следующим образом: записывая исходный текст m для передачи, можно домножать его не только справа, но и слева на заданные автоморфизмами лупы и кольца элементы (аналогично сконструировав дополнительные автоморфизмы и домножив m). Зашифрованный текст будет иметь вид

$$\chi'(\varphi'(a')) \cdot \psi'(\varphi'(x')) \cdot [m \cdot \chi(\varphi(a)) \cdot \psi(\varphi(x))].$$

Конечно, здесь предполагается, что у $\chi'(\varphi'(a')) \cdot \psi'(\varphi'(x'))$ есть нулевой правый аннулятор.

Эта модификация значительно ослабит возможности атаки с известным исходным текстом, так как, даже зная m , мы не сможем решить уравнение относительно него.

Другая модификация заключается в следующем. Вместо одного элемента a можно взять r штук: $a_1, \dots, a_r$, и аналогично построить для них автоморфизмы $\chi_1, \dots, \chi_r$. Криптограмма для A в таком случае будет иметь вид

$$(\chi_1(a_1) \cdot \dots \cdot \chi_r(a_r) \cdot \psi(x), m \cdot [\chi_1(\varphi(a_1)) \cdot \dots \cdot \chi_r(\varphi(a_r)) \cdot \psi(\varphi(x))]).$$

В этой криптограмме в элементах $\chi_1(\varphi(a_1)) \cdot \dots \cdot \chi_r(\varphi(a_r)) \cdot \psi(\varphi(x))$ и $\chi_1(a_1) \cdot \dots \cdot \chi_r(a_r) \cdot \psi(x)$ намеренно не расставлены скобки, так как нам не важно, в каком порядке перемножать. Главное, чтобы полученный элемент имел нулевой левый аннулятор. Тогда участник A сможет просто решить систему уравнений для нахождения обратного. Для взломщика же усложнится атака на сеансовые автоморфизмы, так как придется перебирать не только степени автоморфизмов, но и всевозможные порядки умножения элементов. Действительно, элементы $a_1, \dots, a_r$ и автоморфизмы $\chi_1, \dots, \chi_r$ выбраны независимо. Поэтому, атакуя сеансовые автоморфизмы, мы сталкиваемся с $r + 1$ задачами $\Omega_1(L(\langle \sigma \rangle, \langle \eta \rangle), KL)$, к тому же вынуждены перепробовать всевозможную расстановку скобок. Это существенно усложняет атаку на сеансовые автоморфизмы. С другой стороны, в атаке только с криптограммой мы имеем задачу уже не $\Omega_2(L, KL)$, а $\Omega_{r+1}(L, KL)$. Заметим, что

характеристика сложности атаки на сеансовый автоморфизм будет равна $\frac{1}{t_3^{r+1} \cdot t_5^{r+1}} \cdot \frac{r!(r+1)!}{(2r)!}$, а характеристика сложности атаки на секретный автоморфизм равна $\frac{r+1}{t_4 \cdot t_6}$. Это дает возможность выбирать элементы (σ, η) из групп $\text{Aut } K$ и $\text{Aut } L$ меньших порядков, но с большими централизаторами. Важную роль здесь играет параметр r . С его помощью можно сбалансировать нашу криптосистему, делая одинаково сложными атаки на φ и $\psi, \chi_1, \dots, \chi_r$.

Авторы благодарны М. М. Глухову за внимание к работе и С. В. Полину за замечания, способствующие улучшению изложения.

Список литературы

1. *Росошек С. К.* Криптосистемы групповых колец. — Вестник Томского гос. ун-та, 2003, № 6, с. 57–62.
2. *Ламбек И.* Кольца и модули. — М.: Факториал Пресс, 2005, с. 283.
3. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967, с. 223.
4. *Smith J. D. H.* Representation Theory of Infinite Groups and Finite Quasigroups. — Montreal: Univ. Montreal, 1986.
5. *The GAP Group.* GAP — Groups, Algorithms and Programming. Ver. 4.4.9, 2006. — <http://www.gap-system.org>.
6. *Vojtechovsky P.* Loops — a GAP package. Version 1.4.0, 2007. — <ftp://ftp.gap-system.org/pub/gap/gap4/win.zip/packages/loops-1.4.0-win.zip>.
7. *Goodaire E. G.* Advances in loop rings and their loops. — Quasigroups and relat. syst., 2007, v. 15, № 1, p. 1–18.