Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Камловский, Нелинейность одного класса булевых функций, построенных с использованием двоичных разрядных последовательностей линейных рекуррент над кольцом $\mathbb{Z}_2^n$, *Матем. вопр. криптогр.*, 2016, том 7, выпуск 3, 29–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 04:56:30

**Нелинейность одного класса булевых функций,
построенных с использованием
двоичных разрядных последовательностей
линейных рекуррент над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$**

О. В. Камловский

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 30.V.2016

Аннотация. В работе с использованием двоичных разрядных последовательностей линейных рекуррент над кольцом вычетов по модулю 2^n строится класс булевых функций. Для этого класса функций получены оценки снизу их коэффициентов нелинейности.

Ключевые слова: булевы функции, коэффициенты Уолша – Адамара, нелинейность, линейные рекуррентные последовательности

**Nonlinearity of a class of Boolean functions constructed using
significant bits of linear recurrences over the ring $\mathbb{Z}_{2^n}$**

O. V. Kamlovskiy

Sertification Research Center, LLC, Moscow

Abstract. We construct a class of Boolean functions defined by the significant bits of linear recurrent sequences over the ring $\mathbb{Z}_{2^n}$. For this class of functions bounds for nonlinearity coefficients are obtained.

Keywords: Boolean functions, Walsh coefficients, nonlinearity, linear recurrent sequences

1. Введение

Пусть $R = \mathbb{Z}_{2^n} = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ — кольцо вычетов по модулю 2^n . Для каждого элемента $a \in R$ справедливо двоичное разложение

$$a = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^{n-1}a_{n-1},$$

где $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Рассмотрим отображения $f : R \rightarrow \{0, 1\}$, построенные по правилу

$$f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t_1} \oplus a_{n-t_2} \oplus \dots \oplus a_{n-t_k}, \quad a \in R, \quad (1)$$

где $0 \leq k \leq n-1$, $2 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq n$, $a_{n-1}, a_{n-t_1}, a_{n-t_2}, \dots, a_{n-t_k}$ — соответствующие двоичные разряды числа a .

Выберем произвольный примитивный многочлен $F(x)$ степени m над полем $\mathbb{Z}_2$ (см. [1–2]). Для его периода справедливо равенство $T(F) = 2^m - 1$. Рассмотрим отмеченный многочлен $G(x) \in R[x]$, соответствующий многочлену $F(x)$, т. е. многочлен, удовлетворяющий двум следующим условиям:

- 1) многочлен, полученный из $G(x)$ приведением всех его коэффициентов по модулю 2, совпадает с $F(x)$;
- 2) $T(G) = T(F)$.

А. А. Нечаев [3] показал, что такой многочлен $G(x)$ существует и что он единствен, причем имеется довольно простой рекурсивный способ его построения по многочлену $F(x)$.

Пусть v — такая линейная рекуррентная последовательность (ЛРП) порядка m над кольцом R с характеристическим многочленом $G(x)$, что последовательность $\bar{v}$, полученная из v приведением всех ее элементов по модулю 2, является ненулевой. Рассмотрим булеву функцию $g = g_{v,f}$ от m переменных, определенную по правилу: $g(0, 0, \dots, 0) = 0$ и для всех $i = 0, 1, \dots, 2^m - 2$

$$g(\bar{v}(i), \bar{v}(i+1), \dots, \bar{v}(i+m-1)) = f(v(i)). \quad (2)$$

Последовательность $\bar{v}$ является ЛРП максимального периода над полем $\mathbb{Z}_2$, поэтому среди элементов $(\bar{v}(i), \bar{v}(i+1), \dots, \bar{v}(i+m-1))$, $i = 0, 1, \dots, 2^m - 2$, появляются по одному разу все ненулевые двоичные векторы длины m . Таким образом, правило (2) однозначно задает булеву функцию g . Таблицу данной функции легко построить с использованием линейного регистра сдвига над кольцом R , вырабатывающего последовательность v в качестве выходной последовательности.

Нелинейностью $\text{nl}(g)$ булевой функции g (см., например, [4]) называется расстояние Хэмминга от булевой функции g до класса всех аффинных булевых функций от m переменных. Для произвольной булевой функции g от m переменных верна оценка

$$\text{nl}(g) \leq 2^{m-1} - 2^{\frac{m}{2}-1},$$

которая достижима только для бент-функций.

В [5] был получен следующий результат. Пусть $n > 1$ и $f(a) = a_{n-1} \oplus \eta(a_0, a_1, \dots, a_{n-2})$, где $\eta : \{0, 1\}^{n-1} \rightarrow \{0, 1\}$ — произвольное отображение, тогда для нелинейности булевой функции g , построенной по правилу (2), справедлива оценка

$$\text{nl}(g) \geq 2^{m-1} - (2^{n-1} - 1) 2^{\frac{m+n-3}{2}}. \quad (3)$$

Таким образом, $\text{nl}(g) \geq 2^{m-1} - h_1(n) 2^{m/2}$, где $h_1(n) = O(2^{3n/2})$ при $n \rightarrow \infty$.

Параметр n существенно влияет на степень $\deg g$ многочлена Жегалкина рассматриваемых функций. Так, в [6] показано, что при тождественно нулевой функции η и $m > 2^n$ выполнено равенство $\deg g = 2^{n-1}$.

Представляет интерес уточнение оценки (3) для класса отображений f вида (1). В этой работе показано, что если $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t}$ или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t+1} \oplus a_{n-t}$, то

$$\text{nl}(g) \geq 2^{m-1} - (2^{n-1} - 1) 2^{\frac{m}{2}-1} \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right) \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{t-2}) + 1 \right).$$

Таким образом, для функций $g = g_{v,f}$, соответствующих данным отображениям, имеет место неравенство $\text{nl}(g) \geq 2^{m-1} - h_2(n) 2^{m/2}$, где $h_2(n) = O(n 2^n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что с помощью линейных рекуррент над полями удается строить булевы функции, для которых гарантируются значительно худшие значения нелинейности (теоретические обоснования того, какие они на самом деле, отсутствуют). Например, в [7] построены булевы функции g от m переменных с нелинейностью

$$\text{nl}(g) \geq 2^{m-1} - h_3(m) 2^{\frac{m}{2}},$$

где $h_3(m) = O(2^{3m/8} m^{1/4})$ при $m \rightarrow \infty$.

2. Суммы модулей спектральных коэффициентов

Рассмотрим произвольное отображение $f : R \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Пусть χ есть характер группы $(\mathbb{Z}_{2^n}, +)$, определенный равенством $\chi(x) = e^{2\pi i x/2^n}$, $x \in \mathbb{Z}_{2^n}$. Множество всех характеров рассматриваемой группы имеет вид $\{\chi_a : a \in \mathbb{Z}_{2^n}\}$, где $\chi_a(x) = \chi(ax)$, $x \in \mathbb{Z}_{2^n}$. Согласно результатам работ [8–9] найдутся однозначно определенные комплексные числа $\nu_j = \nu_j(f)$, для которых

$$(-1)^{f(a)} = \sum_{j=0}^{2^n-1} \nu_j \chi(aj), \quad a = 0, 1, \dots, 2^n - 1. \quad (4)$$

Числа ν_j будем называть спектральными коэффициентами. Они вычисляются по формуле

$$\nu_j = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{2^n-1} (-1)^{f(s)} \chi(-sj), \quad j = 0, 1, \dots, 2^n - 1. \quad (5)$$

Введем обозначение

$$\sigma(f) = \sum_{j=0}^{2^n-1} |\nu_j|.$$

В [5] показано, что

$$\text{nl}(g) \geq \sigma(f)(2^{n-1} - 1)2^{\frac{m}{2}-1}. \quad (6)$$

Изучим параметр $\sigma(f)$ для отображений f вида (1).

Теорема 1 ([10]). *Если в равенстве (1) $k = 0$, т. е. $f(a) = a_{n-1}$, то*

$$|\nu_j| = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ — четное число,} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{2^n}}, & \text{если } j \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

При этом для величины

$$\sigma_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1,3,\dots,2^n-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{j=1,3,\dots,2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{2^n}} \quad (7)$$

справедлива оценка

$$\sigma_n \leq \frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1.$$

Величина $\delta_n = \frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1$, указанная в теореме 1, линейна по параметру n . Вопрос о точности оценки $\sigma_n \leq \delta_n$ остается пока открытым. Приведем таблицу нескольких первых значений величин σ_n и δ_n (с точностью до трех десятичных знаков после запятой), полученных с использованием ЭВМ:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
σ_n	1	1,414	1,847	2,287	2,727	3,168	3,610	4,051	4,492	4,933	5,375
δ_n	1	1,441	1,882	2,323	2,765	3,206	3,647	4,088	4,530	4,971	5,412

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
σ_n	5,816	6,257	6,699	7,140	7,581	8,022	8,464	8,905	9,346	9,787
δ_n	5,853	6,295	6,736	7,177	7,619	8,060	8,501	8,942	9,384	9,825

n	22	23	24	25	26	27	28	29	30
σ_n	10,229	10,670	11,111	11,553	11,994	12,435	12,876	13,318	13,759
δ_n	10,266	10,707	11,149	11,590	12,031	12,473	12,914	13,355	13,796

Эта таблица показывает, что для рассмотренных значений n приведенная оценка является достаточно точной.

В дальнейшем мы используем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $2 \leq t \leq n$, $f(a) = h(a) \oplus a_{n-t}$, $a \in \mathbb{Z}_{2^n}$, где отображение $h : \mathbb{Z}_{2^n} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ фиктивно зависит от разряда a_{n-t} . Тогда для всех таких $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, что $j \neq 2^{t-1} + 2^t s$, где $s \in \mathbb{Z}$,

$$|\nu_j(f)| = |\nu_j(h)| \frac{|1 - e^{-2\pi i j/2^t}|}{|1 + e^{-2\pi i j/2^t}|}.$$

Доказательство. Из равенства (1) с использованием двоичного разложения $s = s_0 + 2s_1 + 2^2s_2 + \dots + 2^{n-1}s_{n-1}$ получим

$$\begin{aligned} \nu_j(f) &= \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{s_0, \dots, s_{n-1} \in \{0,1\}} (-1)^{\tilde{h}(s_0, \dots, s_{n-1}) \oplus s_{n-t}} \exp \left\{ -2\pi i \frac{(s_0 + \dots + 2^{n-1}s_{n-1})j}{2^n} \right\}, \end{aligned}$$

где $\tilde{h}$ — такая булева функция от n переменных, что

$$\tilde{h}(a_0, \dots, a_{n-1}) = h(a)$$

для любого $a \in \mathbb{Z}_{2^n}$.

В силу фиктивности зависимости $\tilde{h}$ от a_{n-t}

$$\nu_j(f) = S_j \sum_{s_{n-t} \in \{0,1\}} (-1)^{s_{n-t}} e^{-2\pi i s_{n-t} j/2^t},$$

где

$$\begin{aligned} S_j &= \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{s_i \in \{0,1\}: \\ i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-t\}}} (-1)^{\tilde{h}(s_0, \dots, s_{n-t-1}, 0, s_{n-t+1}, \dots, s_{n-1})} \exp \left\{ -2\pi i \frac{\sum_{i \neq n-t} 2^i s_i}{2^n} j \right\}. \end{aligned}$$

Значит,

$$|\nu_j(f)| = |S_j| |1 - e^{-2\pi i j/2^t}|. \quad (8)$$

С другой стороны, согласно равенству (5)

$$\begin{aligned} \nu_j(h) &= \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{s_0, \dots, s_{n-1} \in \{0,1\}} (-1)^{\tilde{h}(s_0, \dots, s_{n-1})} \exp \left\{ -2\pi i j \frac{s_0 + \dots + 2^{n-1} s_{n-1}}{2^n} \right\} = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{s_i \in \{0,1\}: \\ i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-t\}}} (-1)^{\tilde{h}(s_0, \dots, s_{n-t-1}, 0, s_{n-t+1}, \dots, s_{n-1})} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -2\pi i \frac{\sum_{i \neq n-t} 2^i s_i}{2^n} j \right\} \sum_{s_{n-t} \in \{0,1\}} (-1)^{\tilde{h}(s_0, \dots, s_{n-1})} e^{-2\pi i s_{n-t} j/2^t}, \end{aligned}$$

а следовательно,

$$|\nu_j(h)| = |S_j| |1 + e^{-2\pi i j/2^t}|. \quad (9)$$

Заметим, что $1 + e^{-2\pi i j/2^t} \neq 0$ при рассматриваемых значениях j , поэтому из равенств (8) и (9) следует требуемый результат. $\square$

Лемма 2. Пусть отображение f задано формулой (1), тогда для всех $j = 0, 2, 4, \dots, 2^n - 2$ имеет место равенство $\nu_j(f) = 0$.

Доказательство. Соотношения непосредственно следуют из [11, предложение 2]. $\square$

Теорема 2. Если отображение f задано равенством (1), то

$$|\nu_j(f)| = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ — четное число,} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{2^n}} \left| \prod_{l=1}^k \operatorname{tg} \frac{\pi j}{2^{t_l}} \right|, & \text{если } j \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно применить метод математической индукции по параметру k , опираясь на теорему 1, леммы 1, 2 и равенство

$$\frac{|1 - e^{i\varphi}|}{|1 + e^{i\varphi}|} = \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right|. \quad \square$$

3. Функция $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t}$

Рассмотрим отображение $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t}$, в котором $2 \leq t \leq n$, $a = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^{n-1}a_{n-1} \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1\}$. По теореме 2 для спектральных коэффициентов $\nu_j = \nu_j(f)$ справедливо соотношение

$$|\nu_j| = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ — четное число,} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{2^n}} \left| \operatorname{tg} \frac{\pi j}{2^t} \right|, & \text{если } j \text{ — нечетное число.} \end{cases} \quad (10)$$

Утверждение 1. Пусть $c_{tj} = \left| \operatorname{tg} \frac{\pi j}{2^t} \right|$, где $j = 1, 3, \dots, 2^n - 1$. Тогда

- 1) $c_{tj} = c_{t2^t+j}$ для всех таких j , что $2^t + j \leq 2^{n-1}$,
- 2) $c_{t2^{t-1}-j} = c_{t2^{t-1}+j}$ для всех таких j , что $2^{t-1} + j \leq 2^{n-1}$ и $2^{t-1} - j \geq 1$,
- 3) числа c_{tj} монотонно возрастают при всех $j \leq 2^{t-1} - 1$,
- 4) справедливо равенство $(c_{t1} + c_{t3} + c_{t5} + \dots + c_{t2^{t-1}-1})/2^{t-2} = \sigma_{t-1}$, где величина σ_{t-1} определена равенством (7),
- 5) при $t \geq 3$ существует такое единственное число $s \in \{1, 3, 5, \dots, 2^{t-1} - 3\}$, что

$$c_{t1} \leq \sigma_{t-1}, \dots, c_{t2^{t-1}-s-2} \leq \sigma_{t-1}, \quad c_{t2^{t-1}-s} > \sigma_{t-1}, \dots, c_{t2^{t-1}-1} > \sigma_{t-1}.$$

Доказательство. Утверждения пп. 1–3 очевидны. Для доказательства п. 4 достаточно заметить, что

$$\frac{1}{2^{t-2}} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-1}-1\}} c_{tj} = \frac{1}{2^{t-2}} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-1}-2\}} (c_{tj} + c_{t2^{t-1}-j})$$

и

$$c_{tj} + c_{t2^{t-1}-j} = \frac{2}{\sin \frac{\pi j}{2^{t-1}}}.$$

Утверждение п. 5 непосредственно следует из пп. 3 и 4. $\square$

Лемма 3 ([12]). *Если функция $h(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a, b]$, то для всех таких $x, y \in [a, b]$ и $r \in \mathbb{R}$, что $x-r, y+r \in [a, b]$, выполнено неравенство $h(x-r) + h(y+r) \geq h(x) + h(y)$.*

Утверждение 2. *Если $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t}$, где $2 \leq t \leq n$, то*

$$\sigma(f) = \sum_{j=0}^{2^n-1} |\nu_j| \leq \sigma_n \sigma_{t-1}. \quad (11)$$

В частности, $\sigma(f) \leq (\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1)(\frac{2}{\pi} \ln(2^{t-2}) + 1)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно проверить справедливость оценки $\sigma(f) \leq \sigma_n \sigma_{t-1}$. Из теоремы 1 и равенства (10) следует, что при $t = 2$ доказываемая оценка справедлива. Пусть теперь $t \geq 3$, тогда в силу соотношения (10)

$$\sigma(f) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{n-1}\}} \frac{c_{tj}}{\sin \frac{\pi j}{2^n}}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma(f) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{n-1}\}} \frac{\sigma_{t-1}}{\sin \frac{\pi j}{2^n}} + \frac{R}{2^{n-1}}, \quad (12)$$

где

$$R = \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{n-1}\}} \frac{c_{tj} - \sigma_{t-1}}{\sin \frac{\pi j}{2^n}}. \quad (13)$$

Для доказательства неравенства (11) достаточно проверить, что $R \leq 0$. С использованием п. 1 утверждения 1 получим

$$R = \sum_{k=0}^{2^{n-t}-1} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^t-1\}} \frac{c_{tj} - \sigma_{t-1}}{\sin \frac{\pi(j+2^t k)}{2^n}}.$$

Пусть

$$R_k = \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^t-1\}} \frac{c_{tj} - \sigma_{t-1}}{\sin \frac{\pi(j+2^t k)}{2^n}}. \quad (14)$$

Неравенство $R \leq 0$ будет обосновано, если доказать, что $R_k \leq 0$ для всех $k = 0, 1, \dots, 2^{n-t} - 1$. Пусть

$$h_k(x) = \frac{1}{\sin \frac{\pi(x+2^t k)}{2^n}}. \quad (15)$$

Ввиду выбора параметров выполнено условие $x + 2^t k \leq 2^n - 1$, поэтому функция $h_k(x)$ выпукла вниз на отрезке $[1, 2^t - 1]$. С использованием п. 2 утверждения 1 получим

$$R_k = \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^t-1\}} (c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1}) (h_k(2^{t-1}-j) + h_k(2^{t-1}+j)).$$

Если число s подобрано так, как в п. 5 утверждения 1, то рассмотрим представление $R_k = R_k^{(1)} + R_k^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} R_k^{(1)} &= \sum_{j \in \{1, 3, \dots, s\}} (c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1}) (h_k(2^{t-1}-j) + h_k(2^{t-1}+j)), \\ R_k^{(2)} &= \sum_{j \in \{s+2, s+4, \dots, 2^t-1\}} (c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1}) (h_k(2^{t-1}-j) + h_k(2^{t-1}+j)). \end{aligned}$$

Так как $c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1} > 0$ для всех $j = 1, 3, \dots, s$, а $c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1} \leq 0$ для всех $j = s+2, s+4, \dots, 2^t-1$, то по лемме 3 при всех $j = 1, 3, \dots, 2^{t-1}-1$ верно неравенство

$$\begin{aligned} &(c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1}) (h_k(2^{t-1}-j) + h_k(2^{t-1}+j)) \leq \\ &\leq (c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1}) (h_k(2^{t-1}-s) + h_k(2^{t-1}+s)). \end{aligned}$$

Значит,

$$R_k^{(1)} \leq (h_k(2^{t-1}-s) + h_k(2^{t-1}+s)) \sum_{j \in \{1,3,\dots,s\}} (c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1}), \quad (16)$$

$$R_k^{(2)} \leq (h_k(2^{t-1}-s) + h_k(2^{t-1}+s)) \sum_{j \in \{s+2,s+4,\dots,2^t-1\}} (c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1}). \quad (17)$$

Согласно п. 4 утверждения 1, если

$$a = \sum_{j \in \{1,3,\dots,s\}} (c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1}),$$

то

$$\begin{aligned} a + \sum_{j \in \{s+2,s+4,\dots,2^t-1\}} (c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1}) &= \\ &= \sum_{j \in \{1,3,\dots,2^t-1\}} c_{t2^{t-1}-j} - 2^{t-2} \sigma_{t-1} = 0, \end{aligned}$$

значит,

$$\sum_{j \in \{s+2,s+4,\dots,2^t-1\}} (c_{t2^{t-1}-j} - \sigma_{t-1}) = -a$$

и в силу неравенств (16), (17)

$$\begin{aligned} R_k^{(1)} &\leq a (h_k(2^{t-1}-s) + h_k(2^{t-1}+s)), \\ R_k^{(2)} &\leq -a (h_k(2^{t-1}-s) + h_k(2^{t-1}+s)). \end{aligned}$$

Таким образом, $R_k = R_k^{(1)} + R_k^{(2)} \leq 0$. □

Непосредственно из неравенства (6) и утверждения 2 получим основной результат этого параграфа.

Теорема 3. Если $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t}$, где $2 \leq t \leq n$, то для булевой функции g , построенной по правилу (2),

$$\text{nl}(g) \geq 2^{m-1} - (2^{n-1} - 1) 2^{m/2-1} \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right) \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{t-2}) + 1 \right).$$

4. Функция $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t+1} \oplus a_{n-t}$

Рассмотрим отображение $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t+1} \oplus a_{n-t}$, в котором $3 \leq t \leq n$, $a = a_0 + 2a_1 + \dots + 2^{n-1}a_{n-1} \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1\}$. По теореме 2 для спектральных коэффициентов $\nu_j = \nu_j(f)$ справедливо соотношение

$$|\nu_j| = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ — четное число,} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{2^n}} \left| \operatorname{tg} \frac{\pi j}{2^t} \right| \left| \operatorname{tg} \frac{\pi j}{2^{t-1}} \right|, & \text{если } j \text{ — нечетное число.} \end{cases} \quad (18)$$

Утверждение 3. Пусть $d_{tj} = \left| \operatorname{tg} \frac{\pi j}{2^t} \right| \left| \operatorname{tg} \frac{\pi j}{2^{t-1}} \right|$, где $j = 1, 3, \dots, 2^n - 1$. Тогда при всех $t \geq 4$:

- 1) $d_{tj} = d_{t2^t+j}$ для всех таких j , что $2^t + j \leq 2^n - 1$,
- 2) $d_{tj} = d_{t2^t-j}$ для всех $j = 1, 3, \dots, 2^t - 1$,
- 3) справедливо равенство

$$d_{tj} = \left| \frac{1}{\cos \frac{\pi j}{2^{t-1}}} - 1 \right|, \quad j = 1, 3, \dots, 2^n - 1,$$

- 4) при $j = 1, 3, \dots, 2^{t-2} - 1$

$$d_{tj} = \frac{1}{\cos \frac{\pi j}{2^{t-1}}} - 1,$$

- 5) $d_{t2^{t-1}-j} = d_{t2^{t-1}+j}$ для всех $j = 1, 3, \dots, 2^{t-1} - 1$,
- 6) $d_{tj} = d_{t2^t-j}$ для всех $j = 1, 3, \dots, 2^t - 1$,
- 7) $d_{t2^{t-1}-j} = d_{tj} + 2$ для всех $j = 1, 3, \dots, 2^{t-2} - 1$,
- 8) справедливо равенство

$$\frac{1}{2^{t-3}} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-1\}} (d_{tj} + 1) = \sigma_{t-1},$$

где величина σ_{t-1} определена равенством (7),

- 9) числа d_{tj} монотонно возрастают при всех $j \leq 2^{t-2} - 1$,
- 10) существует такое единственное число $s \in \{3, 5, \dots, 2^{t-2} - 1\}$, что

$$d_{t1} + 1 < \sigma_{t-1}, \dots, d_{t2^{t-2}-s+2} + 1 \leq \sigma_{t-1},$$

$$d_{t2^{t-2}-s+1} + 1 > \sigma_{t-1}, \dots, d_{t2^{t-2}-1} + 1 > \sigma_{t-1}.$$

Доказательство. Утверждения пп. 1, 2 и 3 очевидны. Утверждения пп. 4, 5, 6 и 7 следуют из п. 3. Докажем п. 8. Согласно п. 4

$$\frac{1}{2^{t-3}} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-1\}} (d_{tj} + 1) = \frac{1}{2^{t-3}} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-1\}} \frac{1}{\cos \frac{\pi j}{2^{t-1}}},$$

тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{t-3}} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-1\}} (d_{tj} + 1) = \\ & = \frac{1}{2^{t-3}} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-1\}} \frac{1}{\sin \frac{\pi(2^{t-2}-j)}{2^{t-1}}} = \sigma_{t-1}. \end{aligned}$$

Утверждение п. 9 следует из п. 4, а п. 10 следует из пп. 8 и 9. $\square$

Утверждение 4. Если $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t+1} \oplus a_{n-t}$, где $3 \leq t \leq n$, то

$$\sigma(f) = \sum_{j=0}^{2^n-1} |\nu_j| \leq \sigma_n \sigma_{t-1}. \quad (19)$$

В частности,

$$\sigma(f) \leq \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right) \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{t-2}) + 1 \right).$$

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно доказать справедливость оценки $\sigma(f) \leq \sigma_n \sigma_{t-1}$. Из утверждения 2 и равенства (18) следует, что при $t = 3$ доказываемая оценка справедлива. Пусть теперь $t \geq 4$, тогда в силу соотношения (18)

$$\sigma(f) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^n-1\}} \frac{d_{tj}}{\sin \frac{\pi j}{2^n}}$$

и согласно п. 1 утверждения 3

$$\sigma(f) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-t}-1} \sum_{j=1, 3, \dots, 2^t-1} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^t-1\}} \frac{d_{tj}}{\sin \frac{\pi(j+2^t k)}{2^n}}.$$

С использованием равенства (15) получим

$$\sigma(f) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-t}-1} Q_k, \quad (20)$$

где

$$Q_k = \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^t-1\}} d_{tj} h_k(j), \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-t}-1.$$

Используя пп. 5, 6 и 7 утверждения 3, находим, что

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-1\}} (d_{tj} h_k(j) + d_{t2^{t-1}-j} h_k(2^{t-1}-j) + \\ &\quad + d_{t2^{t-1}+j} h_k(2^{t-1}+j) + d_{t2^t-j} h_k(2^t-j)) = \\ &= \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-1\}} \left(d_{tj} (h_k(j) + h_k(2^t-j)) + \right. \\ &\quad \left. + (d_{tj}+2) (h_k(2^{t-1}-j) + h_k(2^{t-1}+j)) \right). \end{aligned}$$

Запишем величину Q_k следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-1\}} (d_{tj}+1) (h_k(j) + h_k(2^{t-1}-j) + \\ &\quad + h_k(2^{t-1}+j) + h_k(2^t-j)) + \\ &+ \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-1\}} (-h_k(j) + h_k(2^{t-1}-j) + h_k(2^{t-1}+j) - h_k(2^t-j)). \end{aligned}$$

В силу выпуклости вниз функции $h_k(x)$ на отрезке $[1, 2^t - 1]$ и леммы 2

$$-h_k(j) + h_k(2^{t-1} - j) + h_k(2^{t-1} + j) - h_k(2^t - j) \leq 0,$$

поэтому

$$Q_k \leq \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2} - 1\}} (d_{tj} + 1) (h_k(j) + h_k(2^{t-1} - j) + h_k(2^{t-1} + j) + h_k(2^t - j)).$$

Из равенства (20) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma(f) &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-t}-1} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2} - 1\}} (d_{tj} + 1) (h_k(j) + h_k(2^{t-1} - j) + \\ &\quad + h_k(2^{t-1} + j) + h_k(2^t - j)) = \\ &= \frac{\sigma_{t-1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-t}-1} \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2} - 1\}} (h_k(j) + h_k(2^{t-1} - j) + \\ &\quad + h_k(2^{t-1} + j) + h_k(2^t - j)) + \frac{D}{2^{n-1}} = \\ &= \sigma_{t-1} \sigma_n + \frac{D}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

где

$$D = \sum_{k=0}^{2^{n-t}-1} (D_k^{(1)} + D_k^{(2)}),$$

а

$$\begin{aligned} D_k^{(1)} &= \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2} - 1\}} (d_{tj} + 1 - \sigma_{t-1}) (h_k(j) + h_k(2^t - j)), \\ D_k^{(2)} &= \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2} - 1\}} (d_{tj} + 1 - \sigma_{t-1}) (h_k(2^{t-1} - j) + h_k(2^{t-1} + j)). \end{aligned}$$

Докажем, что при всех $k = 0, 1, \dots, 2^{n-t} - 1$ выполнены неравенства

$$D_k^{(1)} \leq 0, \quad D_k^{(2)} \leq 0.$$

Этим будет доказано, что $D \leq 0$, а значит, $\sigma(f) \leq \sigma_{t-1} \sigma_n$.

Используя пп. 8, 10 утверждения 3 и лемму 2, получаем:

$$\begin{aligned}
 D_k^{(1)} &= \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-s\}} (d_{tj} + 1 - \sigma_{t-1})(h_k(j) + h_k(2^t - j)) + \\
 &+ \sum_{j \in \{2^{t-2}-s+2, \dots, 2^{t-2}-1\}} (d_{tj} + 1 - \sigma_{t-1})(h_k(j) + h_k(2^t - j)) \leqslant \\
 &\leqslant \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-s\}} (d_{tj} + 1 - \sigma_{t-1})(h_k(2^{t-2} - s) + h_k(2^t - 2^{t-2} + s)) + \\
 &+ \sum_{j \in \{2^{t-2}-s+2, \dots, 2^{t-2}-1\}} (d_{tj} + 1 - \sigma_{t-1})(h_k(2^{t-2} - s) + h_k(2^t - 2^{t-2} + s)) = \\
 &= (h_k(2^{t-2} - s) + h_k(2^t - 2^{t-2} + s)) \sum_{j \in \{1, 3, \dots, 2^{t-2}-1\}} (d_{tj} + 1 - \sigma_{t-1}) = 0.
 \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $D_k^{(2)} \leqslant 0$. □

Из неравенства (6) и утверждения 4 вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Если*

$$f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-t+1} \oplus a_{n-t},$$

где $3 \leqslant t \leqslant n$, то для булевой функции g , построенной по правилу (2),

$$\text{nl}(g) \geqslant 2^{m-1} - (2^{n-1} - 1) 2^{m/2-1} \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right) \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{t-2}) + 1 \right).$$

5. Функции, линейные относительно старших четырех битов

В этом параграфе рассматриваются функции f , задаваемые выражением $f(a) = a_{n-1} \oplus c_1 a_{n-2} \oplus c_2 a_{n-3} \oplus c_3 a_{n-4}$, где $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$ суть фиксированные элементы.

Утверждение 5. Пусть σ_n — величина, заданная выражениями (7). Тогда:

1) если $f(a) = a_{n-1}$ или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-2}$, то

$$\sigma(f) \leq \sigma_n \leq \frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1,$$

2) если $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus a_{n-3}$ или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-3}$, то

$$\sigma(f) \leq \sqrt{2} \sigma_n \leq \sqrt{2} \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right),$$

3) если $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-4}$ или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-3} \oplus a_{n-4}$, или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus a_{n-4}$, или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus a_{n-3} \oplus a_{n-4}$, то

$$\sigma(f) \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sigma_n \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}} \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right).$$

Доказательство. 1) Используя теорему 2 и равенство $|\operatorname{tg} \frac{\pi j}{4}| = 1$, $j = 1, 3, \dots, 2^n - 1$, получим

$$|\nu_j| = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ — четное число,} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{2^n}}, & \text{если } j \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Остается воспользоваться теоремой 1.

2) Согласно теореме 2 в этом случае

$$|\nu_j| = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ — четное число,} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{2^n}} \left| \operatorname{tg} \frac{\pi j}{8} \right|, & \text{если } j \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

По утверждению 2 имеем $\sigma(f) \leq \sigma_2 \sigma_n$. Остается заметить, что $\sigma_2 = \sqrt{2}$.

3) Применяя теорему 2 к отображениям $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus a_{n-4}$ и $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-4}$, получим

$$|\nu_j| = \begin{cases} 0, & \text{если } j - \text{четное число,} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{2^n}} \left| \operatorname{tg} \frac{\pi j}{16} \right|, & \text{если } j - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

Аналогично, для отображений $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus a_{n-3} \oplus a_{n-4}$ и $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-3} \oplus a_{n-4}$ получаем

$$|\nu_j| = \begin{cases} 0, & \text{если } j - \text{четное число,} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi j}{2^n}} \left| \operatorname{tg} \frac{\pi j}{16} \right| \left| \operatorname{tg} \frac{\pi j}{8} \right|, & \text{если } j - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

Согласно утверждениям 2 и 4 в этих случаях $\sigma(f) \leq \sigma_3 \sigma_n$. Остается заметить, что $\sigma_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. $\square$

Таким образом, неравенство (6) и утверждение 5 обосновывают следующую теорему.

Теорема 5. Пусть булева функция g построена по правилу (2). Тогда:

1) если $f(a) = a_{n-1}$ или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-2}$, то

$$\operatorname{nl}(g) \geq 2^{m-1} - (2^{n-1} - 1) 2^{m/2-1} \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right),$$

2) если $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus a_{n-3}$ или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-3}$, то

$$\operatorname{nl}(g) \geq 2^{m-1} - (2^{n-1} - 1) 2^{m/2-1} \sqrt{2} \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right),$$

3) если $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-4}$ или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-3} \oplus a_{n-4}$, или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus a_{n-4}$, или $f(a) = a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus a_{n-3} \oplus a_{n-4}$, то

$$\operatorname{nl}(g) \geq 2^{m-1} - (2^{n-1} - 1) 2^{m/2-1} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right).$$

Список литературы

- [1] Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А., *Алгебра*, **2**, М.: Гелиос АРВ, 2003, 416 с.
- [2] Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*, М.: Мир, 1988, 824 с.
- [3] Нечаев А. А., “Цикловые типы линейных подстановок над конечными коммутативными кольцами”, *Матем. сборник*, **184**:3 (1993), 21–56.
- [4] Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*, М.: МЦНМО, 2012, 584 с.
- [5] Камловский О. В., “Расстояние между двоичными представлениями линейных рекуррент над полем $GF(2^k)$ и кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$ ”, *Математические вопросы криптографии*, **7**:1 (2016), 71–82.
- [6] Былков Д. Н., “Об одном классе булевых функций, построенных с использованием старших разрядных последовательностей линейных рекуррент”, *Прикладная дискретная математика. Приложение*, № 7 (2014), 59–60.
- [7] Shparlinski I. E., Winterhof A., “On the nonlinearity of linear recurrence sequences.”, *Applied Math. Letters*, **19**:4 (2006), 340–344.
- [8] Амбросимов А. С., “Свойства бент-функций q -значной логики над конечными полями”, *Дискретная математика*, **6**:3 (1994), 50–60.
- [9] Солодовников В. И., “Бент-функции из конечной абелевой группы в конечную абелеву группу”, *Дискретная математика*, **14**:1 (2002), 99–113.
- [10] Камловский О. В., “Метод тригонометрических сумм для исследования частот r -грамм в старших координатных последовательностях линейных рекуррент над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$ ”, *Математические вопросы криптографии*, **1**:4 (2010), 33–62.
- [11] Камловский О. В., “Равномерные последовательности над простыми полями, построенные из одного класса линейных рекуррент над кольцами вычетов”, *Проблемы передачи информации*, **50**:2 (2014), 60–76.
- [12] Камловский О. В., “Частотные характеристики разрядных последовательностей линейных рекуррент над кольцами Галуа”, *Изв. РАН*, **77**:6 (2013), 71–96.