Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ролдугин, Об одном методе построения булевых функций малого веса, не имеющих имплицент от фиксированного числа переменных, *Матем. вопр. криптогр.*, 2016, том 7, выпуск 3, 73–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:13:49

**Об одном методе построения булевых функций
малого веса, не имеющих имплицент от
фиксированного числа переменных**

П. В. Ролдугин

Московский государственный университет информационных технологий,
радиотехники и электроники, Москва

Получено 20.IV.2014

Аннотация. Задача построения булевых функций без имплицент от k переменных сведена к построению такого множества M булевых функций от $k - 1$, что для любых различных векторов $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k \in V_{k-1}$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{0, 1\}$ существует $f \in M: f(\bar{\beta}_1) = \alpha_1, \dots, f(\bar{\beta}_k) = \alpha_k$. Это позволяет строить функции без имплицент от k переменных, имеющие вес, близкий к минимально возможному значению. Построено несколько семейств таких булевых функций.

Ключевые слова: булевы функции, имплиценты, двоичные матрицы

**On a method for constructing low-weight Boolean functions without
majorants of the given number of variables**

P. V. Roldugin

*Moscow State University of Information Technologies, Radioengineering and Electronics,
Moscow*

Abstract. The problem of constructing Boolean functions without majorants of k variables is reduced to the construction of a set M of Boolean functions of $k - 1$ variables such that for any different vectors $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k \in V_{k-1}$ and for any $a_1, \dots, a_k \in \{0, 1\}$ there exists a function $f \in M: f(\bar{\beta}_1) = a_1, \dots, f(\bar{\beta}_k) = a_k$. This approach permits to construct functions f of small weight having no k -variable majorants. Several families of such Boolean functions f are constructed.

Key words: Boolean functions, majorants, Boolean matrices

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2016, v. 7, № 3, pp. 73–92 (Russian)

© Академия криптографии Российской Федерации, 2016 г.

Введение

Множество всех булевых функций от n переменных обозначим через F_n , пространство k -мерных векторов над $GF(2)$ — через V_k , множество выполняющих векторов функции $f(x_1, \dots, x_n)$ — через E_f . Число переменных функции будем называть также ее длиной.

Настоящая работа является продолжением исследований ([1–3]) класса булевых функций, не имеющих имплицент от фиксированного числа переменных. Напомним ([6]), что имплицентой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется такая булева функция $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, что $f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = f(x_1, \dots, x_n)$ для любых значений аргументов $x_1, \dots, x_n$. Обозначим через $G_n^{(k)} \subset F_n$ множество булевых функций от n переменных, не имеющих имплицент длины k или меньше. Далее считаем, что $n > k$. У отличной от константы функции от n переменных всегда есть имплицента длины n — это она сама. Кроме того, случай $k = 1$ несложен и полностью разобран в [2], поэтому везде далее предполагаем $k \geq 2$.

Отметим одно из возможных применений исследуемых имплицент. Допустим, что необходимо проверить совместность системы булевых уравнений $\{f(q_i(x_1, \dots, x_n)) = 1, i = 1, 2, \dots\}$, где $f: V_n \rightarrow V_1$, $q_i: V_n \rightarrow V_n$. Если у функции $f(x_1, \dots, x_n)$ есть имплицента $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, где $k < n$, то из несовместности системы $\{g(q_i(x_1, \dots, x_n)) = 1, i = 1, 2, \dots\}$ следует несовместность исходной системы. Вторая система может допускать более простой способ проверки совместности за счет того, что каждое уравнение зависит не от n , а не более чем от k переменных. Системы уравнений, в которых $f \in G_n^{(k)}$, заведомо не допускают подобного сведения.

В [2] доказана теорема, которая позволяет представлять функции из $G_n^{(k)}$ как двоичные матрицы со свойством комбинаторной полноты порядка k . Более подробно: двоичная матрица A размера $m \times n$ называется комбинаторно полной порядка k , если для любого набора $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ матрица, составленная из столбцов матрицы A с номерами $i_1, \dots, i_k$, содержит все 2^k возможных векторов из V_k в качестве строк.

Теорема 1 ([2]). *Булева функция f , отличная от константы, не имеет имплицент от k переменных тогда и только тогда, когда матрица, составленная из векторов множества E_f , является комбинаторно полной порядка k .*

Отметим, что перестановка строк комбинаторно полной матрицы дает комбинаторно полную матрицу того же порядка, поэтому при составлении матрицы из векторов множества E_f порядок перечисления векторов не важен.

На основе теоремы 1 далее вместо методов построения функции $f \in G_n^{(k)}$ приводятся методы построения комбинаторно полной матрицы порядка k ; при этом вес функции f есть число строк этой матрицы, если она не содержит одинаковых строк.

Рассмотрим величину $m_{\min}^{(k)}(n)$ — минимально возможное число строк комбинаторно полной матрицы порядка k с n столбцами. Из теоремы 1 следует, что $m_{\min}^{(k)}(n) = \min_{f \in G_n^{(k)}} \|f\|$, где $\|f\|$ — вес функции f . В [1–3] доказаны следующие оценки: $2^k \cdot k \cdot \ln n \geq m_{\min}^{(k)}(n)$ для всех $n > k$ и $m_{\min}^{(k)}(n) > 2^{k-2} \cdot \log_2 n$ для всех значений n , начиная с некоторого значения n_0 .

На множестве F_n существует отношение частичного порядка « $\prec$ »: $f_1 \prec f_2$ для $f_1, f_2 \in F_n$ тогда и только тогда, когда $f_1(x_1, \dots, x_n) \leq f_2(x_1, \dots, x_n)$ для любых значений аргументов $x_1, \dots, x_n$. Это отношение превращает F_n в частично упорядоченное множество. Напомним ([7]), что идеалом, порожденным элементом f , в таком множестве называется $I(f) = \{f' \in F_n : f \prec f'\}$.

Утверждение 1. Если $f \in G_n^{(k)}$, то $I(f) \subset G_n^{(k)}$.

Доказательство. Пусть $f \in G_n^{(k)}$. Рассмотрим $f' \in I(f)$, тогда $E_f \subset E_{f'}$. Предположим, что у f' есть имплицинта g , что эквивалентно включению $E_{f'} \subset E_g$. Но тогда $E_f \subset E_g$, что эквивалентно равенству $f \cdot g = f$, а это противоречит условию $f \in G_n^{(k)}$. $\square$

Из утверждения 1 следует, что построение функции $f \in G_n^{(k)}$ дает возможность построения целого класса функций $\{f \vee f' : f' \in F_n\} \subset G_n^{(k)}$ без имплицинт от k переменных. Мощность этого класса тем больше, чем меньше вес функции f , что делает актуальным построение алгоритмов нахождения функций $f \in G_n^{(k)}$ как можно более малого веса.

В параграфе 1 введено понятие k -сюръективного семейства булевых функций и предложен способ построения комбинаторно полных матриц порядка k на основе такого семейства. В параграфе 2 построено несколько k -сюръективных семейств и найдены верхние оценки их мощностей. В параграфе 3 рассмотрен вопрос о возможности наличия повторяющихся строк в построенной по k -сюръективному семейству комбинаторно полной матрице.

1. Определение k -сюръективного семейства булевых функций и построение комбинаторно полных матриц порядка k

При $k \geq 2$ семейство M булевых функций от переменных $x_1, \dots, x_{k-1}$ назовем k -сюръективным, если для любых различных векторов $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k \in V_{k-1}$ и для любых $a_1, \dots, a_k \in \{0, 1\}$ найдется такая функция $f \in M$, что $f(\bar{\beta}_1) = a_1, \dots, f(\bar{\beta}_k) = a_k$.

Отметим, что $|V_{k-1}| = 2^{k-1} \geq k$ при $k \geq 2$, поэтому всегда существует хотя бы один набор различных векторов $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k \in V_{k-1}$.

Для любого $k \geq 2$ существуют k -сюръективные семейства: очевидно, что k -сюръективным семейством является множество F_{k-1} . Другие примеры таких семейств приведены в следующем параграфе.

Укажем способ построения комбинаторно полных матриц порядка k . Пусть $k > 1$ и $R(k) \subset F_{k-1}$ — семейство булевых функций от переменных $x_1, \dots, x_{k-1}$. Рассмотрим произвольное $r \geq k$ и множество булевых переменных $y_1, \dots, y_r$. Построим семейство $R(k, r)$ булевых функций от этих переменных следующим образом: для каждого набора $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq r$ и каждой функции $f(x_1, \dots, x_{k-1}) \in R(k)$ в семейство $R(k, r)$ добавим функцию $F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(y_1, \dots, y_r) = f(y_{i_1}, \dots, y_{i_{k-1}})$. Очевидно, что $|R(k, r)| = \binom{r}{k-1} \cdot |R(k)|$.

Зададим вектором значений $(F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(0, \dots, 0), F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(0, \dots, 0, 1), F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(0, \dots, 1, 0), \dots, F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(1, \dots, 1))$, где аргументы (векторы длины r) перечислены в лексикографическом порядке, каждую из функций $F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f \in R(k, r)$. Используя все векторы $F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f, F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f \in R(k, r)$ в качестве строк, составим из них матрицу $M \langle R(k, r) \rangle$. Эта матрица имеет 2^r столбцов и $|R(k, r)|$ строк, назовем ее *построенной по семейству $R(k)$* .

Теорема 2. Если семейство $R(k)$, $k > 1$, есть k -сюръективное семейство функций, то матрица $M \langle R(k, r) \rangle$, построенная по семейству $R(k)$, является комбинаторно полной порядка k .

Доказательство. Используем следующее обозначение: для $(0, 1)$ -матрицы B из k строк и r столбцов через $B_{t \times \{i_1, \dots, i_s\}}$ обозначим подматрицу матрицы B , стоящую на пересечении первых t строк и столбцов с номерами $i_1, \dots, i_s$.

Лемма 1. Пусть в $(0, 1)$ -матрице B размера $k \times r$, $r \geq k > 1$, все строки различны. Тогда существует такое подмножество $\{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$, что в матрице $B_{k \times \{i_1, \dots, i_{k-1}\}}$ все строки также различны.

Доказательство. Применим индукцию по k . При $k = 2$ утверждение леммы очевидно, поскольку означает, что в матрице, состоящей из двух различных строк, найдется такой номер столбца i_1 , что на пересечении i_1 -го столбца с одной строкой стоит 0, а на пересечении с другой строкой стоит 1.

Пусть теперь лемма верна при всех $k' < k$, докажем ее для $k' = k$. Так как в матрице B все строки различны, то при отбрасывании из B последней строки это свойство сохранится, т. е. в матрице $B_{(k-1) \times \{1, 2, \dots, r\}}$ также все строки различны. По предположению индукции существует такое подмножество $\{i_1, i_2, \dots, i_{k-2}\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$, что в матрице $B_{(k-1) \times \{i_1, \dots, i_{k-2}\}}$ все строки различны.

Если последняя строка в матрице $B_{k \times \{i_1, \dots, i_{k-2}\}}$ не совпадает с другими строками этой матрицы, то в матрице $B_{k \times \{i_1, \dots, i_{k-2}\}}$ все строки различны и, следовательно, при любом $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i_1, \dots, i_{k-2}\}$ в матрице $B_{k \times \{i_1, \dots, i_{k-2}, j\}}$ все строки различны, т.е. $B_{k \times \{i_1, \dots, i_{k-2}, j\}}$ является искомой подматрицей.

Обозначим строки матрицы $B_{k \times \{i_1, \dots, i_{k-2}\}}$ через $\vec{T}_1, \dots, \vec{T}_k$. Если, в отличие от предыдущего случая, последняя строка $\vec{T}_k$ совпадает с некоторой строкой $\vec{T}_u$, $u \in \{1, \dots, k-1\}$, то в силу того, что в матрице $B_{(k-1) \times \{i_1, \dots, i_{k-2}\}}$ все строки различны, $\vec{T}_u$ не совпадает с $\vec{T}_v$ при $u \neq v$, $v \in \{1, \dots, k-1\}$. Найдем среди номеров столбцов $\{1, \dots, r\} \setminus \{i_1, \dots, i_{k-2}\}$ матрицы B такой номер j , что строки с номерами k и u на пересечении с j -м столбцом содержат различные значения (такой номер найдется, поскольку в координатах с номерами из $\{i_1, \dots, i_{k-2}\}$ указанные строки совпадают, а матрица B не содержит одинаковых строк). Тогда в матрице $B_{k \times \{i_1, \dots, i_{k-2}, j\}}$ нет одинаковых строк, т.е. она является искомой подматрицей. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Проиндексируем столбцы матрицы $M \langle R(k, r) \rangle$ битовыми векторами длины r в лексикографическом порядке. Тогда по определению матрицы $M \langle R(k, r) \rangle$ на пересечении столбца с номером $\bar{\gamma} \in V_r$ и строки, равной $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f = (F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(0, \dots, 0), F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(0, \dots, 0, 1), \dots, F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(1, \dots, 1))$, стоит элемент, равный $F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(\bar{\gamma})$. Проверим, выполняются ли для матрицы $M \langle R(k, r) \rangle$ условия комбинаторной полноты порядка k . Возьмем k различных столбцов матрицы $M \langle R(k, r) \rangle$, индексированных векторами $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_k \in V_r$. Столбцы различны, значит, и векторы различны. Применим к матрице $B = (\bar{\gamma}_1 \dots \bar{\gamma}_k)^T$ лемму и получим, что существует такое подмножество $\{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$, что в матрице $B_{k \times \{i_1, \dots, i_{k-1}\}}$ все строки также различны. Без ограничения общности считаем, что числа в подмножестве упорядочены по возрастанию, т.е. $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq r$. Обозначим $B_{k \times \{i_1, \dots, i_{k-1}\}} = (\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_k)^T$. Теперь рассмотрим произвольный набор $a_1, \dots, a_k \in \{0, 1\}$. Поскольку семейство $R(k)$ является k -сюръективным семейством и набор $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k$ состоит из различных векторов, по определению найдется такая функция $f \in R(k)$, что $f(\bar{\beta}_1) = a_1, \dots, f(\bar{\beta}_k) = a_k$. Рассмотрим в семействе $R(k, r)$ функцию $F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$, которая согласно своему определению задается следующим образом: $F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = f(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{k-1}})$ для любого $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in V_r$. Отсюда следует, что $F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(\bar{\gamma}_i) = f(\bar{\beta}_i) = a_i$, $i = 1, k$.

Таким образом, в строке матрицы $M\langle R(k, r) \rangle$, равной вектору значений функции $F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$, на пересечении со столбцами, проиндексированными векторами $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_k \in V_r$, стоят значения $a_1, \dots, a_k$ соответственно. Поскольку строка $(a_1, \dots, a_k)$ может принимать все 2^k возможных значений, матрица $M\langle R(k, r) \rangle$ является комбинаторно полной порядка k . $\square$

Из проведенных выше рассуждений получаем следующий метод построения комбинаторно полных матриц порядка k с n строками. Выберем значение $r = \max \{ \lceil \log_2 n \rceil, k \}$, где $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее x . Далее возьмем переполненное семейство булевых функций $R(k)$ и матрицу $M\langle R(k, r) \rangle$, построенную по этому семейству. По теореме 2 эта матрица комбинаторно полная порядка k и число столбцов в этой матрице равно $2^r \geq n$. Если $r > \log_2 n$, то, отбросив произвольные $2^r - n$ столбцов, получим комбинаторно полную матрицу A порядка k с n столбцами. Число строк в матрице A равно $|R(k, r)| = \binom{r}{k-1} \cdot |R(k)|$.

Сделаем несколько замечаний. В матрицах A и $M\langle R(k, r) \rangle$ могут оказаться совпадающие строки; очевидно, что повторы можно удалить без ущерба для комбинаторной полноты матрицы. Критерий того, что матрица $M\langle R(k, r) \rangle$ содержит повторяющиеся строки, приведен в параграфе 3. Необходимо заметить, что, вообще говоря, даже если матрица $M\langle R(k, r) \rangle$ не имеет повторов, то после отбрасывания некоторых столбцов в матрице A повторы могут появиться; поэтому даже в случаях, когда удастся точно вычислить количество несовпадающих строк в матрице $M\langle R(k, r) \rangle$, это количество может служить только оценкой сверху для аналогичного параметра матрицы A . Кроме того, вполне естественно искать k -сюрьективное семейство как можно меньшей мощности, чтобы уменьшить размер матрицы $M\langle R(k, r) \rangle$.

2. Примеры k -сюрьективных семейств булевых функций

Как видно из предыдущего параграфа, используемое при построении комбинаторно полной матрицы k -сюрьективное семейство должно быть как можно меньшей мощности. Поэтому сначала приведем некоторые оценки минимально возможного значения мощности k -сюрьективного семейства. Нижняя оценка получается довольно просто.

Утверждение 2. Любое k -сюрьективное семейство имеет мощность не менее 2^k .

Доказательство. В определении k -сюрьективного семейства $R(k)$ зафиксируем набор различных векторов $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k \in V_{k-1}$ и рассмотрим 2^k различных наборов $a_1, \dots, a_k$. Каждому варианту $(a_1, \dots, a_k)$ соответствует такая функция f из $R(k)$, что $f(\bar{\beta}_1) = a_1, \dots, f(\bar{\beta}_k) = a_k$; очевидно, разным наборам соответствуют разные функции. Следовательно, в семействе $R(k)$ содержится не менее 2^k функций. $\square$

Следующее утверждение показывает, что минимальное значение мощности k -сюръективного семейства достаточно близко к доказанной нижней оценке.

Утверждение 3. *Существует k -сюръективное семейство мощности не более $2^k \cdot (k^2 - k + 2)$.*

Доказательство. Рассмотрим булеву матрицу $G(k)$, строки которой проиндексированы функциями из F_{k-1} , столбцы — упорядоченными парами $((\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k), (a_1, \dots, a_k))$, где $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k \in V_{k-1}$ различны и $a_1, \dots, a_k \in \{0, 1\}$. Тогда число строк матрицы $G(k)$ равно $2^{2^{k-1}}$, число столбцов равно $\binom{2^{k-1}}{k} \cdot k! \cdot 2^k$. На пересечении строки, соответствующей функции $f(x_1, \dots, x_{k-1})$, и столбца, индексированного парой $((\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k), (a_1, \dots, a_k))$, поставим единицу тогда и только тогда, когда $f(\bar{\beta}_1) = a_1, \dots, f(\bar{\beta}_k) = a_k$. Тогда каждый столбец содержит $2^{2^{k-1}-k}$ единиц, поскольку в столбце стоят единицы в строках, соответствующих функциям, у которых k значений из всех 2^{k-1} возможных значений зафиксированы.

Напомним ([8]), что в произвольной булевой матрице B строка и столбец называются *пересекающимися*, если на месте их пересечения стоит 1; также говорят, что строка *покрывает* столбцы, с которыми пересекается. Кроме того, *покрытием* булевой матрицы B называется такое подмножество M ее строк, что для любого столбца матрицы B найдется строка из M , пересекающаяся с этим столбцом. Пусть матрица B имеет p строк, s столбцов и в каждом столбце не менее $p \cdot \gamma$ единиц, $0 < \gamma \leq 1$. В [4] доказана теорема о том, что если $s \cdot \gamma \geq 1$, то «жадный» алгоритм построения покрытия, т. е. алгоритм, добавляющий на каждом шаге в строящееся покрытие строку, пересекающуюся с наибольшим количеством еще не покрытых столбцов, дает покрытие, имеющее мощность не более $\lceil \gamma^{-1} \cdot \ln(\gamma \cdot s) \rceil + \gamma^{-1}$ (здесь $\lceil x \rceil = \min_{\nu \in \mathbb{Z}} \{\nu \geq x\}$).

Применим эту теорему к $G(k)$, учитывая, что в этом случае $p = 2^{k-1}$, $s = \binom{2^{k-1}}{k} \cdot k! \cdot 2^k$ и в каждом столбце ровно $2^{2^{k-1}-k} = p \cdot \gamma$ единиц, где $\gamma = 2^{-k}$. Тогда $s \cdot \gamma = \binom{2^{k-1}}{k} \cdot k! \geq 1$ и «жадный» алгоритм дает покрытие матрицы $G(k)$ не более чем $\lceil 2^k \cdot \ln(\binom{2^{k-1}}{k} \cdot k!) \rceil + 2^k$ строками.

Теперь покажем, что набор строк M матрицы $G(k)$ является ее покрытием тогда и только тогда, когда множество булевых функций, соответствующих строкам из M , является k -сюръективным семейством. Действительно, M — покрытие тогда и только тогда, когда для любого столбца матрицы $G(k)$ (т. е. для любой упорядоченной пары $((\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k), (a_1, \dots, a_k))$, где $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k \in V_{k-1}$ различны и $a_1, \dots, a_k \in \{0, 1\}$) найдется такая строка в M (т. е. найдется такая функция $f \in F_{k-1}$), что на пересечении этой строки и столбца, соответствующего паре $((\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k), (a_1, \dots, a_k))$, стоит 1 (что по определению означает $f(\bar{\beta}_1) = a_1, \dots, f(\bar{\beta}_k) = a_k$).

Значит, «жадный» алгоритм построит k -сюръективное семейство мощности не более $\lceil 2^k \cdot \ln((\binom{2^{k-1}}{k} \cdot k!) \rceil + 2^k$. Далее, используя неравенства $\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!}$ при $k \geq 2$, $\lceil x \rceil \leq x + 1$ и $\ln 2 < 1$, получим:

$$\begin{aligned} \lceil 2^k \cdot \ln((\binom{2^{k-1}}{k} \cdot k!) \rceil + 2^k &< \lceil 2^k \cdot \ln((2^{k-1})^k) \rceil + 2^k \leq \\ &\leq 2^k \cdot \ln((2^{k-1})^k) + 2^k + 1 = 2^k \cdot ((k^2 - k) \cdot \ln 2 + 1) + 1 < \\ &< 2^k \cdot (k^2 - k + 1) + 1. \end{aligned}$$

Так как $\lceil 2^k \cdot \ln((\binom{2^{k-1}}{k} \cdot k!) \rceil + 2^k$ — целое число, то $\lceil 2^k \cdot \ln((\binom{2^{k-1}}{k} \cdot k!) \rceil + 2^k \leq 2^k \cdot (k^2 - k + 1)$. $\square$

Доказательство этого утверждения дает метод построения k -сюръективного семейства булевых функций путем применения «жадного» алгоритма к построению покрытия булевой матрицы размера $\binom{2^{k-1}}{k} \cdot k! \cdot 2^k \times 2^{2^{k-1}}$. Очевидно, что такие большие размеры матрицы делают невозможным практическое применение алгоритма уже при $k \geq 7$. Согласно результатам предыдущего параграфа, нахождение k -сюръективного семейства $R(k)$ минимальной мощности позволит построить комбинаторно полную матрицу $M\langle R(k, r) \rangle$ порядка k с $n = 2^r$ столбцами и числом строк, не превосходящим

$$\binom{\log_2 n}{k-1} \cdot 2^k \cdot (k^2 - k + 1).$$

Далее приведем несколько примеров k -сюръективных семейств, лежащих в F_{k-1} , и оценки их мощностей. Отметим, что найденные семейства далеки от минимальных, за исключением последнего семейства.

1. Семейство $M(k)$, $k \geq 2$. Как уже указывалось выше, очевидно, что множество $M(k) = F_{k-1}$ является k -сюръективным семейством. Мощность такого семейства составляет $2^{2^{k-1}}$.

2. Семейство $H(k)$, $k \geq 2$. Определим булеву функцию $f_{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k}^{a_1, \dots, a_k}(x_1, \dots, x_{k-1})$ следующим образом:

$$f_{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k}^{a_1, \dots, a_k}(\bar{\beta}_1) = a_1, \dots, f_{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k}^{a_1, \dots, a_k}(\bar{\beta}_k) = a_k$$

для любых $a_1, \dots, a_k \in \{0, 1\}$ и каждого зафиксированного упорядоченного набора различных $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k \in V_{k-1}$ (корректность такого определения следует из того, что векторы $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k$ различны) и $f_{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k}^{a_1, \dots, a_k}(\bar{\beta}) = 0$ для векторов $\bar{\beta} \in V_{k-1}$, отличных от $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k$.

Обозначим через $H(k)$ множество всех функций $f_{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k}^{a_1, \dots, a_k}(x_1, \dots, x_{k-1})$. Из самой процедуры построения семейства $H(k)$ очевидно следует, что оно является k -сюръективным.

Две функции $f_{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k}^{a_1, \dots, a_k}$, $f_{\bar{\beta}'_1, \dots, \bar{\beta}'_k}^{a'_1, \dots, a'_k}$ могут совпадать; подсчитаем число различных функций. Очевидно, что две функции из $H(k)$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают множества векторов, на которых функции принимают значение 1. Веса функций из $H(k)$ принимают значения от 0 до k , и каждая функция, вес которой принимает значение из указанного интервала, является одной из функций $f_{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k}^{a_1, \dots, a_k}$. Значит,

$$|H(k)| = \sum_{s=0}^k \binom{2^{k-1}}{s}.$$

Используя простую оценку $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$, получаем

$$|H(k)| \leq \binom{2^{k-1}}{k} \cdot (k+1) \leq (2^{k-1})^k = 2^{k^2-k},$$

т. е. $|H(k)| \leq 2^{k^2-k}$.

Очевидно, что $H(2) = M(2) = F_1$. Далее, $|H(3)| = 15$, т. е. из всех булевых функций от двух переменных семейство $H(3)$ не содержит только одну функцию (функцию, тождественно равную 1). При $k \geq 4$ семейство $H(k)$ в определенном смысле избыточно: оно содержит собственное подмножество, также являющееся k -сюръективным семейством. Это семейство описано далее.

3. Семейство $E(k)$, $k \geq 4$. Рассмотрим семейство $E(k) \subset H(k)$, которое состоит только из функций $f_{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k}^{1, \dots, 1}(x_1, \dots, x_{k-1})$, т. е. из всех булевых функций веса k от $k-1$ переменных. Очевидно, что $|E(k)| = \binom{2^{k-1}}{k}$. Докажем, что при $k \geq 4$ семейство $E(k)$ является k -сюръективным. Рассмотрим произвольный упорядоченный набор различных векторов $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k \in V_{k-1}$ и любые $a_1, \dots, a_k \in \{0, 1\}$. Пусть среди $a_1, \dots, a_k$ те a_i , которые равны 1, имеют номера $j_1, \dots, j_s$, а остальные a_i равны 0. Рассмотрим функцию $f_{\bar{\beta}_{j_1}, \dots, \bar{\beta}_{j_s}, \bar{\gamma}_{s+1}, \dots, \bar{\gamma}_k}^{1, \dots, 1}(x_1, \dots, x_{k-1}) \in E(k)$, где $\bar{\gamma}_{s+1}, \dots, \bar{\gamma}_k \in V_{k-1}$ — произвольные различные векторы, отличные от векторов $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k$. Такие $\bar{\gamma}_{s+1}, \dots, \bar{\gamma}_k$ найдутся, так как $|V_{k-1}| - k = 2^{k-1} - k$ и, поскольку $s \geq 0 \geq 2k - 2^{k-1}$ при $k \geq 4$, имеем $2^{k-1} - k \geq k - s$. Тогда

$$f_{\bar{\beta}_{j_1}, \dots, \bar{\beta}_{j_s}, \bar{\gamma}_{s+1}, \dots, \bar{\gamma}_k}^{1, \dots, 1}(\bar{\beta}_i) = \begin{cases} 1 = a_i, & \text{если } i \in \{j_1, \dots, j_s\}, \\ 0 = a_i, & \text{если } i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j_1, \dots, j_s\}. \end{cases}$$

Значит, семейство $E(k)$ является k -сюръективным.

4. Семейство $S(k)$, $k = 2s$, $s \geq 1$. Рассмотрим k -сюръективное семейство, идею построения которого предложил А.Б. Шишков. Это семейство имеет не комбинаторный, а алгебраический способ задания; используемые определения можно найти в [5]. Пусть $Q = GF(2^{k-1})$ и $P = GF(2)$. Через $\text{tr}(\alpha) = \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2^{k-2}}$ обозначим след элемента $\alpha \in Q$ в поле P . Выберем в поле Q некоторый базис над полем P ; очевидно, в этом базисе $k - 1$ элементов. Тогда каждый элемент $\alpha \in Q$ можно рассматривать как двоичный вектор размерности $k - 1$, компоненты которого являются координатами α в выбранном базисе, и любое отображение из Q в P в указанном смысле есть булева функция от $k - 1$ переменных.

Следом полинома $p(x) \in Q[x]$ называется отображение $\text{tr}(p(x)) : Q \rightarrow P$, значение которого на элементе $\alpha \in Q$ равно $\text{tr}(p(\alpha))$. Отметим, что у двух полиномов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ следы могут совпадать. Из четности значения k следует, что если $p(\alpha) \in P$ для полинома $p(x) \in Q[x]$ и некоторого элемента $\alpha \in Q$, то $\text{tr}(p(\alpha)) = p(\alpha)$. Действительно,

$$\text{tr}(p(\alpha)) = 0 + 0^2 + \dots + 0^{2^{k-2}} = 0, \quad \text{если } p(\alpha) = 0,$$

и

$$\text{tr}(p(\alpha)) = 1 + 1^2 + \dots + 1^{2^{k-2}} = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k-1} = 1, \quad \text{если } p(\alpha) = 1.$$

Далее рассмотрим множество $Q^{(k)}[x]$ всех многочленов степени k над полем Q и множество $\text{tr}(Q^{(k)}[x])$, состоящее из всех таких отображений $\xi : Q \rightarrow P$, которые совпадают с $\text{tr}(p(x))$ для некоторого многочлена $p(x) \in Q^{(k)}[x]$. Проще говоря, $\text{tr}(Q^{(k)}[x])$ есть множество всех различных следов многочленов над полем Q степени k . Как указано выше, каждое отображение из $\text{tr}(Q^{(k)}[x])$ есть булева функция от $k - 1$ переменных. Докажем, что $\text{tr}(Q^{(k)}[x])$ является k -сюръективным семейством.

В указанном выше смысле каждый вектор из V_{k-1} рассматриваем как элемент поля Q . Набору различных $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k \in V_{k-1}$ и любых $a_1, \dots, a_k \in \{0, 1\}$ поставим в соответствие многочлен $p(x) \in Q[x]$, задаваемый интерполяционной формулой Лагранжа. Тогда $p(\bar{\beta}_1) = a_1, \dots, p(\bar{\beta}_k) = a_k$ и $\deg p(x) = k$. Значит, $p(x) \in Q^{(k)}[x]$, и поэтому $\text{tr}(p(x)) \in \text{tr}(Q^{(k)}[x])$. Как показано выше, $\text{tr}(p(x))$ есть булева функция от $k - 1$ переменных и $\text{tr}(p(\bar{\beta}_i)) = a_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$, поскольку $p(\bar{\beta}_i) \in P$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Следовательно, семейство $\text{tr}(Q^{(k)}[x])$ является k -сюръективным.

Теперь оценим мощность семейства $\text{tr}(Q^{(x)}[x])$.

Утверждение 4. Если $k \geq 2$ чётно, то $|\text{tr}(Q^{(x)}[x])| \leq 2^{\frac{1}{2}(k^2-k)}$.

Доказательство. Обозначим через $Q^{\leq k}[x]$ множество полиномов над Q степени не более k , через $F(Q)$ — множество всех отображений из Q в Q . Операция суммирования элементов поля Q задаёт аналогичные операции суммирования многочленов и отображений и позволяет рассмотреть группы $(Q[x], +)$, $(Q^{\leq k}[x], +)$ и $(F(Q), +)$. Взятие следа многочлена задаёт гомоморфизм tr из $(Q[x], +)$ в $(F(Q), +)$. Сужение этого гомоморфизма на подгруппу $(Q^{\leq k}[x], +)$ даёт гомоморфизм $\text{tr}^{(k)}$ из $(Q^{\leq k}[x], +)$ на $\text{tr}(Q^{\leq k}[x])$. Поэтому

$$\left| (Q^{\leq k}[x], +) / \text{Ker } \text{tr}^{(k)} \right| = |\text{tr}(Q^{\leq k}[x])|.$$

Отметим, что $Q^{(k)}[x] \subset Q^{\leq k}[x]$, следовательно,

$$\text{tr}(Q^{(k)}[x]) \subset \text{tr}(Q^{\leq k}[x]) \leq |\text{tr}(Q^{\leq k}[x])|.$$

Ядро гомоморфизма tr известно ([5]): $\text{Ker } \text{tr} = \{q(x) + q^2(x) : q(x) \in Q[x]\}$.

Очевидно, что $\text{Ker } \text{tr}^{(k)} = \text{Ker } \text{tr} \cap Q^{\leq k}[x]$. Значит,

$$\text{Ker } \text{tr}^{(k)} = \{q(x) + q^2(x) : q(x) \in Q[x] \text{ и } \deg(q(x) + q^2(x)) \leq k\}.$$

Следовательно, в $\text{Ker } \text{tr}^{(k)}$ входят те и только те полиномы, которые имеют вид $q(x) + q^2(x)$, где $q(x) \in Q^{\leq k/2}[x]$. Значит,

$$|\text{Ker } \text{tr}^{(k)}| = (2^{k-1})^{k/2+1}.$$

Очевидно, что $|Q^{\leq k}[x]| = (2^{k-1})^{k+1}$, поэтому

$$|\text{tr}(Q^{(k)}[x])| \leq |\text{tr}(Q^{\leq k}[x])| = \frac{(2^{k-1})^{k+1}}{(2^{k-1})^{k/2+1}} = 2^{(k^2-k)/2}. \quad \square$$

5. Семейство $T(k)$, $k = 2, 3$. Рассмотрим семейство функций $T(k)$, состоящее из функций, тождественно равных константе, и всех линейных и аффинных функций от переменных $x_1, \dots, x_{k-1}$, т. е. из функций вида

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}) = c_1 \cdot x_1 \oplus \dots \oplus c_{k-1} \cdot x_{k-1} \oplus b,$$

где $c_1, \dots, c_{k-1}, b \in \{0, 1\}$.

Утверждение 5. При $k \in \{2, 3\}$ семейство $T(k)$ является k -сюръективным семейством.

Доказательство. Рассмотрим случай $k = 2$. По определению $T(2)$ состоит из 4 различных функций от одной переменной, т.е. $T(2)$ содержит все булевы функции от одной переменной и, очевидно, является 2-сюръективным семейством.

Пусть теперь $k = 3$ и $T(3) = \{c_1 \cdot x_1 \oplus c_2 \cdot x_2 \oplus b : c_1, c_2, b \in \{0, 1\}\}$. По определению $T(3)$ является 3-сюръективным семейством тогда и только тогда, когда для любых различных $\bar{v} = (v_1, v_2)$, $\bar{w} = (w_1, w_2)$, $\bar{z} = (z_1, z_2)$ из V_2 и для любых $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1\}$ в $T(3)$ найдется такая функция f , что $f(\bar{v}) = a_1$, $f(\bar{w}) = a_2$, $f(\bar{z}) = a_3$. Это можно переписать в матричном виде

$$(c_1, c_2, b) \cdot \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & z_1 \\ v_2 & w_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3). \quad (1)$$

Таким образом, 3-сюръективность семейства $T(3)$ эквивалентна тому, что для любой булевой матрицы

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 & z_1 \\ v_2 & w_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

все столбцы которой различны, система линейных уравнений (1) относительно неизвестных c_1 , c_2 , b должна иметь решение. Докажем это, показав, что указанная матрица всегда обратима. Применяем эквивалентные преобразования

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 & z_1 \\ v_2 & w_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1 & w_1 & z_1 \\ v_2 & w_2 & z_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & w_1 \oplus v_1 & z_1 \oplus v_1 \\ 0 & w_2 \oplus v_2 & z_2 \oplus v_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим последнюю матрицу через A . Так как пары (v_1, v_2) и (w_1, w_2) различны, то либо $w_1 \oplus v_1 = 1$, либо $w_2 \oplus v_1 = 1$, либо $w_2 \oplus v_2 = 1$. Пусть далее $w_1 \oplus v_1 = 1$ (во втором случае доказательство аналогично с точностью до перенумерации). Если $w_2 \oplus v_2 = 0$, то $w_2 = v_2$ и тогда $z_2 \neq w_2 = v_2$ (в противном случае пара (z_1, z_2) совпадает либо с (v_1, v_2) , либо с (w_1, w_2)). Значит, $z_2 \oplus v_2 = 1$ и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & z_1 \oplus v_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. матрица A обратима.

Если $w_2 \oplus v_2 = 1$, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & z_1 \oplus v_1 \\ 0 & 1 & z_2 \oplus v_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & z_1 \oplus v_1 \\ 0 & 0 & z_1 \oplus v_1 \oplus z_2 \oplus v_2 \end{pmatrix}.$$

Если $z_1 = v_1$, то $z_2 \neq v_2$ и $z_1 \oplus v_1 \oplus z_2 \oplus v_2 = 1$. Если $z_1 \neq v_1$, то так как $w_1 \oplus v_1 = 1$, имеем $z_1 = w_1$. Значит, $z_2 \neq w_2$, и так как $w_2 \oplus v_2 = 1$, то $z_2 = v_2$. Отсюда получаем, что и в этом случае $z_1 \oplus v_1 \oplus z_2 \oplus v_2 = 1$. Таким образом,

$$fA \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & z_1 \oplus v_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и поэтому A обратима.

Следовательно, система (1) всегда имеет решение, а значит, семейство функций $T(3)$ является 3-сюрьековым семейством. $\square$

Стоит отметить, что семейство $T(k)$ при $k \geq 4$ уже не является k -сюрьековым семейством, поскольку для этого система линейных уравнений

$$(c_1, \dots, c_{k-1}, b) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} & \beta_2^{(2)} & \dots & \beta_k^{(1)} \\ \beta_1^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \dots & \beta_k^{(2)} \\ & & \dots & \\ \beta_1^{(k-1)} & \beta_2^{(k-1)} & \dots & \beta_k^{(k-1)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_k) \quad (2)$$

должна иметь решение при любой матрице, состоящей из различных столбцов, и любой правой части. Рассмотрим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline O_{(k-4) \times 4} & E_{(k-4) \times (k-4)} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad (3)$$

где $O_{t \times s}$, $J_{t \times s}$, $E_{t \times s}$ — матрица из нулей, матрица из единиц и единичная матрица, соответственно, с t строками и s столбцами. Очевидно, что в матрице (3) все столбцы различны. Пусть, далее, $(a_1, \dots, a_k) = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Подставляя эти значения в (2), получаем, что $c_1 \oplus b = 1$, $c_2 \oplus b = 0$, $c_3 \oplus b = 0$ и $c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus b = 0$, что приводит к противоречию. Следовательно, в данном случае система (2) не имеет решения, значит, соответствующее семейство не является k -сюрьековым.

3. Совпадающие строки в матрице $M\langle R(k, r) \rangle$

Чтобы избежать неоднозначного толкования, определим, что в булевой матрице любые ее две строки назовем *несовпадающими*, если они не равны как двоичные векторы, и *совпадающими* в противном случае.

В матрице $M\langle R(k, r) \rangle$, построенной по k -сюръективному семейству $R(k)$, могут содержаться совпадающие строки. Следующее утверждение полностью характеризует такой случай.

Теорема 3. Пусть матрица $M\langle R(k, r) \rangle$ построена по k -сюръективному семейству $R(k)$. Строки $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$ и $\vec{F}_{l_1, \dots, l_{k-1}}^g$ совпадают тогда и только тогда, когда существует подстановка $\sigma \in S_{k-1}$, удовлетворяющая условиям

- 1) $f(x_1, \dots, x_{k-1}) = g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k-1)})$,
- 2) если $j_1 < \dots < j_s$ — номера всех существенных переменных функции f , то $i_{j_1} = l_{\sigma(j_1)}, \dots, i_{j_s} = l_{\sigma(j_s)}$,
- 3) $\sigma(j_1) < \sigma(j_2) < \dots < \sigma(j_s)$.

Доказательство. При доказательстве утверждения будем использовать следующее обозначение. Если у булевой функции $\varphi(x_1, \dots, x_{k-1})$ все существенные переменные есть $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_s}$, $\lambda_1 < \dots < \lambda_s$, то будем обозначать символом $\tilde{\varphi}$ следующую булеву функцию от s переменных $z_1, \dots, z_s$:

$$\tilde{\varphi}(z_1, \dots, z_s) = f(\underbrace{0 \dots 0}_{\lambda_1\text{-я координата}} \underbrace{z_1}_{\lambda_1\text{-я координата}} \underbrace{0 \dots 0}_{\lambda_2\text{-я координата}} \underbrace{z_2}_{\lambda_2\text{-я координата}} \dots \underbrace{0 \dots 0}_{\lambda_s\text{-я координата}} \underbrace{z_s}_{\lambda_s\text{-я координата}} 0).$$

Очевидно, что $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = \tilde{\varphi}(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_s})$ для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \in V_{k-1}$.

Пусть строки $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$ и $\vec{F}_{l_1, \dots, l_{k-1}}^g$ совпадают и пусть $j_1 < \dots < j_s$ — номера всех существенных переменных функции $f(x_1, \dots, x_{k-1})$. Тогда список номеров всех существенных переменных функции $F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(y_1, \dots, y_r) = f(y_{i_1}, \dots, y_{i_{k-1}})$ имеет вид $\{i_{j_1}, \dots, i_{j_s}\}$. Пусть, далее, $t_1 < \dots < t_{s'}$ — номера всех существенных переменных функции $g(x_1, \dots, x_{k-1})$. Тогда, аналогично, $\{l_{t_1}, \dots, l_{t_{s'}}\}$ — список номеров всех существенных переменных функции $F_{l_1, \dots, l_{k-1}}^g(y_1, \dots, y_r) = g(y_{l_1}, \dots, y_{l_{k-1}})$. Поскольку строки $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$ и $\vec{F}_{l_1, \dots, l_{k-1}}^g$ совпадают, постольку совпадают и отображения $F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$ и $F_{l_1, \dots, l_{k-1}}^g$, а значит, и списки номеров их существенных переменных. Поэтому $s = s'$ и $\{l_{t_1}, \dots, l_{t_{s'}}\} = \{i_{j_1}, \dots, i_{j_s}\}$. Так как $j_1 < \dots < j_s$ и $i_1 < \dots < i_{k-1}$, то $i_{j_1} < \dots < i_{j_s}$. Аналогично $l_{t_1} < \dots < l_{t_s}$. Следовательно, $i_{j_1} = l_{t_1}, \dots, i_{j_s} = l_{t_s}$.

В другую сторону: пусть $x_{j_1}, \dots, x_{j_s}$, $j_1 < \dots < j_s$, — это все существенные переменные функции $f(x_1, \dots, x_{k-1})$. Пусть существует $\sigma \in S_{k-1}$, удовлетворяющая условиям 1)–3). Тогда все номера существенных переменных функции g есть $\sigma(j_1), \dots, \sigma(j_s)$. Рассмотрим произвольный вектор $(\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in V_r$. Имеем

$$\begin{aligned}
 F_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f(\gamma_1, \dots, \gamma_r) &= \\
 &= f(\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_{k-1}}) = \tilde{f}(\gamma_{i_{j_1}}, \dots, \gamma_{i_{j_s}}) = \\
 &= f(\overbrace{0 \dots 0 \quad \gamma_{i_{j_1}} \quad 0 \dots 0 \quad \gamma_{i_{j_s}} \quad 0 \dots 0}^{k-1 \text{ координат}}) = \\
 &= f(\overbrace{0 \dots 0 \quad \gamma_{i_{j_1}} \quad 0 \dots 0 \quad \gamma_{i_{j_s}} \quad 0 \dots 0}^{j_1\text{-я координата} \quad j_s\text{-я координата}}) = \\
 &= g(\overbrace{0 \dots 0 \quad \gamma_{i_{j_1}} \quad 0 \dots 0 \quad \gamma_{i_{j_s}} \quad 0 \dots 0}^{\sigma(j_1)\text{-я координата} \quad \sigma(j_s)\text{-я координата}}) = \\
 &= g(\overbrace{0 \dots 0 \quad \gamma_{l_{\sigma(j_1)}} \quad 0 \dots 0 \quad \gamma_{l_{\sigma(j_s)}} \quad 0 \dots 0}^{\sigma(j_1)\text{-я координата} \quad \sigma(j_s)\text{-я координата}}) = g(\gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_{k-1}}) = \\
 &= F_{l_1, \dots, l_{k-1}}^g(\gamma_1, \dots, \gamma_r).
 \end{aligned}$$

Следовательно, строки $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$ и $\vec{F}_{l_1, \dots, l_{k-1}}^g$ совпадают. $\square$

Вообще говоря, использование доказанного критерия наличия совпадающих строк в матрице $M\langle R(k, r) \rangle$ для вычисления их числа представляется достаточно сложным делом, поскольку требуется знание группы инерции каждой булевой функции из k -сюръективного семейства $R(k, r)$. Далее рассмотрим несколько случаев, когда такое вычисление удастся выполнить за счет простоты структуры или небольшого размера семейства $R(k, r)$.

Получим несколько следствий из теоремы 3.

Следствие 1. Пусть матрица $M\langle R(k, r) \rangle$ построена по k -сюръективному семейству $R(k)$ и функция $f(x_1, \dots, x_{k-1})$ из этого семейства имеет существенные переменные $x_{j_1}, \dots, x_{j_s}$, $j_1 < \dots < j_s$. Тогда строки $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$ и $\vec{F}_{l_1, \dots, l_{k-1}}^f$ совпадают тогда и только тогда, когда $i_{j_1} = l_{j_1}, \dots, i_{j_s} = l_{j_s}$.

Доказательство. Согласно теореме 3 совпадение строк $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$ и $\vec{F}_{l_1, \dots, l_{k-1}}^f$ эквивалентно существованию подстановки $\sigma \in S_{k-1}$, удовлетворяющей условиям

- 1) $f(x_1, \dots, x_{k-1}) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k-1)})$,
- 2) $i_{j_1} = l_{\sigma(j_1)}, \dots, i_{j_s} = l_{\sigma(j_s)}$,
- 3) $\sigma(j_1) < \sigma(j_2) < \dots < \sigma(j_s)$.

Из условия 1) получаем, что существенные переменные функции f имеют номера $\{\sigma(j_1), \dots, \sigma(j_s)\}$, т. е. $\{\sigma(j_1), \dots, \sigma(j_s)\} = \{j_1, \dots, j_s\}$. Так как $j_1 < \dots < j_s$ и $\sigma(j_1) < \dots < \sigma(j_s)$, то $\sigma(j_1) = j_1, \dots, \sigma(j_s) = j_s$.

В другую сторону: если $i_{j_1} = l_{j_1}, \dots, i_{j_s} = l_{j_s}$, то любая подстановка $\sigma \in S_{k-1}$, для которой $\sigma(j_1) = j_1, \dots, \sigma(j_s) = j_s$, очевидно, удовлетворяет условиям 1)–3). $\square$

Следствие 2. Если функция $f(x_1, \dots, x_{k-1})$ из k -сюръективного семейства $R(k)$ существенно зависит от всех своих переменных, то в матрице $M\langle R(k, r) \rangle$ нет совпадающих строк вида $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$ и $\vec{F}_{l_1, \dots, l_{k-1}}^f$.

Доказательство. По следствию 1 если строки $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$ и $\vec{F}_{l_1, \dots, l_{k-1}}^f$ совпадают, то $i_1 = l_1, \dots, i_{k-1} = l_{k-1}$. $\square$

Рассмотрим 2-сюръективное семейство

$$T(2) = \{f_1 = x_1, f_2 = x_1 \oplus 1, f_3 = 0, f_4 = 1\}, \quad r \geq k = 2.$$

Очевидно, что ни одна из функций f_1, f_2, f_3, f_4 в другую перестановкой переменных не переводится, поэтому по теореме 3 в $M\langle R(k, r) \rangle$ пары строк $\vec{F}_{i_1}^{f_v}, \vec{F}_{l_1}^{f_w}$ всегда различны при $v \neq w, v, w \in \{1, 2, 3, 4\}$. Функции f_1, f_2 существенно зависят от всех своих переменных, поэтому воспользуемся следствием 2 и получим, что строки $\vec{F}_{i_1}^{f_v}, \vec{F}_{l_1}^{f_v}$ также различны при $i \neq l_1, 1 \leq i_1, l_1 \leq r, v \in \{1, 2, 3, 4\}$. Очевидно, что все строки $\vec{F}_{i_1}^{f_3} (1 \leq i_1 \leq r)$ есть строки из одних нулей, а строки $\vec{F}_{i_1}^{f_4} (1 \leq i_1 \leq r)$ — строки из одних единиц. Таким образом, в матрице $M\langle T(2, r) \rangle$ число различных строк вида $\vec{F}_{i_1}^{f_1}$ равно r , строк вида $\vec{F}_{i_1}^{f_2}$ тоже r , различных строк вида $\vec{F}_{i_1}^{f_3}$ только одна и вида $\vec{F}_{i_1}^{f_4}$ также одна. Тем самым доказано следующее утверждение.

Утверждение 6. Число различных строк в матрице $M\langle T(2, r) \rangle$ равно $2r+2$.

Для сравнения приведем значение $n_{\max}^{(2)}(m)$ максимального числа столбцов в комбинаторно полной матрице порядка 2 с m строками, найденное в [1]. При четном m верно равенство $n_{\max}^{(2)}(m) = \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{m/2}$. Используя при $m \geq 6$ элементарные оценки $2^{m/2} < \binom{m}{m/2} < 2^m$, получаем $2^r < n_{\max}^{(2)}(2r+2) < 2^{2r+1}$. В матрице $M\langle T(2, r) \rangle$ согласно утверждению 6 имеется $2r+2$ строк и 2^r столбцов.

Перейдем к 3-сюръективному семейству

$$T(3) = \{f_1 = x_1 \oplus x_2, f_2 = \overline{x_1 \oplus x_2}, f_3 = x_1, f_4 = \overline{x_1}, \\ f_5 = x_2, f_6 = \overline{x_2}, f_7 = 0, f_8 = 1\}, \quad r \geq k = 3.$$

Все семейство разбивается на следующие классы эквивалентности относительно перестановок переменных:

$$T(3) = \{f_1\} \cup \{f_2\} \cup \{f_3, f_5\} \cup \{f_4, f_6\} \cup \{f_7\} \cup \{f_8\}.$$

Функции f_1 и f_2 существенно зависят от всех своих переменных, поэтому по следствию 2 не дают совпадающих строк вида $\vec{F}_{i_1, i_2}^{f_v}$, $\vec{F}_{l_1, l_2}^{f_v}$ при $\{i_1, i_2\} \neq \{l_1, l_2\}$, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq r$, $1 \leq l_1 < l_2 \leq r$, $v \in \{1, 2\}$.

У функции f_3 существенная переменная только x_1 , т.е. по следствию 1 с $s = 1$, $j_1 = 1$ равенство строк $\vec{F}_{i_1, i_2}^{f_3} = \vec{F}_{l_1, l_2}^{f_3}$ имеет место тогда и только тогда, когда $i_1 = l_1$. Значит, из всего набора строк $\{\vec{F}_{i_1, i_2}^{f_3}, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq r\}$ наибольшее подмножество из различных строк определяется наибольшим количеством пар (i_1, i_2) , $1 \leq i_1 < i_2 \leq r$, с различными первыми координатами. Очевидно, что число таких пар равно $r - 1$, например $\{(1, 2), (2, 3), \dots, (r - 1, r)\}$.

Аналогично доказываем, что среди всех строк $\{\vec{F}_{i_1, i_2}^{f_4}, 1 \leq i_1 < i_2 \leq r\}$ только $r - 1$ различных.

Перейдем к функции $f_5(x_1, x_2) = x_2$. В условиях теоремы 3 в качестве функции f рассмотрим функцию $f_3(x_1, x_2) = x_1$, тогда $s = 1$, $j_1 = 1$, а в качестве функции g — функцию f_5 , тогда существует такая подстановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, что $f(x_1, x_2) = g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})$. По теореме 3 строка $\vec{F}_{i_1, i_2}^{f_3}, 1 \leq i_1 < i_2 \leq r$, совпадет со строкой $\vec{F}_{l_1, l_2}^{f_5}, 1 \leq l_1 < l_2 \leq r$, тогда и только тогда, когда $i_1 = l_{\sigma(1)} = l_2$. Значит, каждая строка $\vec{F}_{l_1, l_2}^{f_5}, 1 \leq l_1 < l_2 < r$, совпадает со строкой $\vec{F}_{l_2, i_2}^{f_3}$ и строки $\vec{F}_{l_1, r}^{f_5}, 1 \leq l_1 \leq r - 1$, не имеют повторов среди строк $\vec{F}_{i_1, i_2}^{f_3}, 1 \leq i_1 < i_2 \leq r$. Далее, рассмотрим две строки $\vec{F}_{i_1, r}^{f_5}, \vec{F}_{l_1, r}^{f_5}, 1 \leq i_1, l_1 \leq r - 1$. У функции f_5 существенная переменная только одна — x_2 , и по следствию 1 эти строки совпадают. Следовательно, в матрице $M\langle T(3, r) \rangle$, удаляя повторы, можно оставить только одну строку, соответствующую функции f_5 , а именно строку $\vec{F}_{1, r}^{f_5}$.

Аналогично доказывается, что для функции f_6 можно оставить только одну строку $\vec{F}_{1, r}^{f_6}$.

Строки, соответствующие функциям f_7 и f_8 , состоят из одних нулей или одних единиц и поэтому дают только две различные строки.

Таким образом, множество различных строк в матрице $M\langle T(3, r) \rangle$ можно описать следующим образом:

- $\binom{r}{2}$ строк вида $\vec{F}_{i_1, i_2}^{f_1}$ ($1 \leq i_1 < i_2 \leq r$),
- $\binom{r}{2}$ строк вида $\vec{F}_{i_1, i_2}^{f_2}$ ($1 \leq i_1 < i_2 \leq r$),
- $r - 1$ строк вида $\vec{F}_{1,2}^{f_3}, \vec{F}_{1,2}^{f_3}, \vec{F}_{2,3}^{f_3}, \dots, \vec{F}_{r-1,r}^{f_3}$,
- $r - 1$ строк вида $\vec{F}_{1,2}^{f_4}, \vec{F}_{2,3}^{f_4}, \dots, \vec{F}_{r-1,r}^{f_4}$,
- по одной строке вида $\vec{F}_{1,r}^{f_5}, \vec{F}_{1,r}^{f_6}, \vec{F}_{1,2}^{f_6}, \vec{F}_{1,2}^{f_7}$.

Сформулируем полученный результат в виде утверждения 7.

Утверждение 7. Число различных строк в матрице $M\langle T(3, r) \rangle$ равно $2 \cdot \left(\binom{r}{2} + r + 1 \right)$.

Известные оценки для $m_{\min}^{(k)}(n)$ (минимально возможного числа строк комбинаторно полной матрицы порядка k с n столбцами), указанные во введении, при $k = 3$ принимают вид $17 \cdot \log_2 n > m_{\min}^{(3)}(n) > 2 \cdot \log_2 n$ для достаточно больших значений n . Если обозначить число столбцов матрицы $M\langle T(3, r) \rangle$, равное 2^r , через n , то число строк этой матрицы будет $2 \cdot \left(\binom{\log_2 n}{2} + \log_2 n + 1 \right) = (\log_2 n)^2 + \log_2 n + 2$.

Отметим простой случай в виде еще одного следствия теоремы 3.

Следствие 3. Если в k -сюръективном семействе $R(k)$ все функции не имеют несущественных переменных, то в матрице $M\langle R(k, r) \rangle$ нет совпадающих строк.

Доказательство. Пусть функции $f, g \in R(k)$ зависят от всех своих переменных и строки $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f, \vec{F}_{l_1, \dots, l_{k-1}}^g$ совпадают. По теореме 3 существует такая перестановка $\sigma \in S_{k-1}$, что $f(x_1, \dots, x_{k-1}) = g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k-1)})$, $i_1 = l_{\sigma(1)}, \dots, i_{k-1} = l_{\sigma(k-1)}$ и $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k-1)$. Но последнее возможно только в случае, когда $\sigma(1) = 1, \dots, \sigma(k-1) = k-1$, и тогда $f(x_1, \dots, x_{k-1}) = g(x_1, \dots, x_{k-1})$, $i_1 = l_1, \dots, i_{k-1} = l_{k-1}$. Значит, $\vec{F}_{i_1, \dots, i_{k-1}}^f$ и $\vec{F}_{l_1, \dots, l_{k-1}}^g$ — это одна и та же строка матрицы $M\langle R(k, r) \rangle$. $\square$

Рассмотрим семейство $E(k)$, $k \geq 4$. Напомним, что $|E(k)| = \binom{2^{k-1}}{k}$. Из определения семейства следует, что все функции в этом семействе имеют один и тот же вес, равный k . При нечетном значении k вес функций также нечетен, а функции нечетного веса не имеют несущественных переменных.

Утверждение 8. При нечетном значении $k \geq 5$ в матрице $M\langle E(k, r) \rangle$ нет совпадающих строк и число строк в этой матрице равно $\binom{r}{k-1} \cdot \binom{2^{k-1}}{k}$.

Утверждение 8 вытекает из следствия 3.

Список литературы

- [1] Ролдугин П. В., Тарасов А. В., “О булевых функциях без верхних биунктивных статаналогов”, *Математические проблемы криптографии*, **4**:1 (2013), 123–140.
- [2] Ролдугин П. В., Тарасов А. В., “Функции без коротких имплицент. Часть I: нижние оценки весов”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 94–105.
- [3] Ролдугин П. В., Тарасов А. В., “Функции без коротких имплицент. Часть II: методы построения”, *Дискретная математика*, **27**:4 (2015), 120–132.
- [4] Райгородский А. М., *Системы обших представителей и их приложения в геометрии*, М.: МЦНМО, 2009, 136 pp.
- [5] Логачев О. А., Сальников А. А., Яценко В. В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*, М.: МЦНМО, 2004, 470 pp.
- [6] Глухов М. М., Шишков А. Б., *Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов*, СПб: Лань, 2012, 400 pp.
- [7] Биркгоф Г., *Теория решеток*, М.: Наука, 1984, 568 pp.
- [8] Сачков В. Н., Тараканов В. Е., *Комбинаторика неотрицательных матриц*, М.: ТВП, 2000, 448 pp.