Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Камловский, Метод тригонометрических сумм для исследования частот r -грамм в старших координатных последовательностях линейных рекуррент над кольцом $\mathbb{Z}_2^n$, *Матем. вопр. криптогр.*, 2010, том 1, выпуск 4, 33–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk20>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:35:23

УДК: 511.336+519.113.6

**Метод тригонометрических сумм
для исследования частот r -грамм
в старших координатных
последовательностях линейных рекуррент
над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$**

О. В. Камловский

ООО «Центр сертификационных исследований», г. Москва

Получено 22.IV.2010

В работе методом тригонометрических сумм исследуются частотные характеристики старших координатных последовательностей (в произвольном координатном множестве) линейных рекуррент над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$, характеристические многочлены которых, будучи приведенными по модулю два, неприводимы над полем $GF(2)$.

Ключевые слова: тригонометрические суммы, оценки сумм характеров, линейные рекуррентные последовательности, старшие координатные последовательности, частотные характеристики последовательностей

Exponential sums method for frequencies of most significant bit r -patterns in linear recurrent sequences over $\mathbb{Z}_{2^n}$

O. V. Kamlovskii

LLC "Certification Research Center", Moscow

Abstract. By means of exponential sums method we investigate distributions of r -patterns in the most significant bit of linear recurrent sequences over $\mathbb{Z}_{2^n}$ such that their characteristic polynomials reduced to mod 2 are irreducible over $GF(2)$.

Key words: exponential sums, character sums estimates, linear recurrent sequences, most significant bit sequences, r -patterns distributions

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2010, vol. 1, no. 4, pp. 33–62 (Russian).

© 2010 О. В. Камловский

1. Введение

Подмножество $K = \{k_0, k_1\}$ множества $\mathbb{Z}_{2^n}$ назовем координатным множеством кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$ (см., например, [1]), если элементы k_0 и k_1 , рассматриваемые как целые числа, имеют различную четность. Примером координатного множества кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$ является двоичное координатное множество $K = \{0, 1\}$. Число всех координатных множеств кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$ равно $2^{2(n-1)}$. Если K — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, то каждый элемент a этого кольца однозначно представим в виде

$$a = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + \dots + 2^{n-1}a_{n-1}, \quad (1)$$

где a_i — элемент из множества K для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. Отметим, что в равенстве (1) операции сложения и умножения рассматриваются как операции в кольце $\mathbb{Z}_{2^n}$. Равенство (1) будем называть координатным представлением элемента a в координатном множестве K , а элемент a_{n-1} будем называть старшей координатой элемента a в координатном множестве K .

Всюду в дальнейшем будем считать, что координатное множество K кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$ имеет вид $K = \{k_0, k_1\}$, где k_0 — четное число, а k_1 — нечетное число. Рассмотрим отображение $\varkappa_{n-1}^K$ из множества $\mathbb{Z}_{2^n}$ в множество K , задаваемое для всех $a \in \mathbb{Z}_{2^n}$ по правилу

$$\varkappa_{n-1}^K(a) = a_{n-1},$$

где a_{n-1} — старшая координата элемента a в координатном множестве K .

Пусть u — последовательность элементов кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$. Рассмотрим координатное множество K кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$ и последовательность u_{n-1} над множеством K , полученную из последовательности u по правилу

$$u_{n-1}(i) = \varkappa_{n-1}^K(u(i)), \quad i \geq 0.$$

Последовательность u_{n-1} будем называть старшей координатной последовательностью последовательности u в координатном множестве K и в этом случае будем использовать обозначение $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$.

Старшую координатную последовательность $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$ часто рассматривают как усложнение исходной последовательности u . Это связано с тем, что, как правило, последовательность u_{n-1} устроена достаточно сложно. Так, если u — линейная рекуррентная последовательность (ЛРП) максимального периода над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$, имеющая ранг m , то для произвольного координатного множества K период последовательности u_{n-1} совпадает с периодом последовательности u (см., например, [1, теорема 1.3]). Если дополнительно считать, что $K = \{0, k_1\}$, то ранг последовательности u_{n-1}

будет равен $O(m^{2^{n-1}})$ при $m \rightarrow \infty$ (см., например, [2, теорема 5.2]). Кроме того, если K — двоичное координатное множество, то по последовательности u_{n-1} однозначно восстанавливается вся исходная последовательность u (см., например, [3, теорема 2]).

При исследовании частотных характеристик последовательностей $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$ рассматривается двоичное координатное множество K . Представляет интерес исследование старших координатных последовательностей в произвольном координатном множестве K с целью расширения класса преобразований усложнения для последовательности u . Другой причиной исследования произвольных множеств K является то, что ранг последовательности $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$ может зависеть от выбора K . В работе [4] этот эффект был подтвержден для случая, когда $n = 2$. Еще один аргумент в пользу рассмотрения произвольного координатного множества K связан с тем, что частоты появлений элементов в последовательности $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$ при каждой фиксированной ЛРП u также зависят от выбора K . В данной работе будут приведены соответствующие примеры для ЛРП над кольцом $\mathbb{Z}_4$.

Всюду в дальнейшем будем исследовать величину $N_l(z, u_{n-1})$, равную количеству появлений элемента z координатного множества K среди первых l элементов $u_{n-1}(0), u_{n-1}(1), \dots, u_{n-1}(l-1)$ последовательности $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$. Отметим, что имеет место равенство

$$N_l(z, u_{n-1}) = \sum_{a \in \mathbb{Z}_{2^n} : \varkappa_{n-1}^K(a) = z} N_l(a, u),$$

где $N_l(a, u)$ — количество элементов a среди элементов $u(0), u(1), \dots, u(l-1)$. Поэтому многие результаты о числах $N_l(z, u_{n-1})$ получаются как следствия из описания частотных характеристик самой последовательности u , которые ранее были изучены (см., например, [5], [6]).

Представляет интерес нахождение других методов исследования частот $N_l(z, u_{n-1})$, позволяющих получать более точные результаты. Один из таких подходов был предложен в работах [7], [8], [9], где в случае $K = \{0, 1\}$ получены оценки частот появлений элементов на циклах старших координатных последовательностей линейных рекуррент максимального периода над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$. Результаты этих работ улучшили ранее известные оценки рассматриваемых частот из [10] и [11]. Впоследствии этот подход был развит в работе [12], где получены оценки частот $N_l(z, u_{n-1})$ при произвольных значениях l . В данной работе будет предложено дальнейшее развитие этого метода, с использованием которого доказываются более общие результаты: во-первых, изучены линейные рекурренты u , характеристический много-

член которых, будучи приведенным по модулю два, является неприводимым многочленом над полем $GF(2)$ (условие максимальности периода при этом не требуется); во-вторых, исследуются старшие координатные последовательности $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$ в произвольном координатном множестве K . Кроме того, доказываем, что полученные оценки являются асимптотически наилучшими.

Заметим, что при исследовании частот $N_l(z, u_{n-1})$ и связанных с ними частот $N_l(a, u)$ используются также другие подходы, отличные от метода тригонометрических сумм. Так, в работах [5] и [13] с использованием квадратичных форм найдены точные значения исследуемых частот на циклах ЛРП максимального периода и так называемых отмеченных ЛРП над кольцом $\mathbb{Z}_4$. В работе [14] комбинаторным методом получены точные значения частот $N_l(a, u)$ на циклах каждой ЛРП максимального периода над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$, имеющей ранг, равный двум. Также с использованием комбинаторного подхода в работе [15] удалось оценить величину $N_l(0, u_{n-1})/N_l(1, u_{n-1})$, где l равно периоду последовательности u_{n-1} , в терминах частоты $N_l(0, u)$ для каждой ЛРП u максимального периода над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$. Это позволило показать, что рассматриваемая дробь близка к единице практически для всех ЛРП максимального периода, имеющих заданный характеристический многочлен. В работе [16] вероятностными методами исследуется частота $N_l(a, u)$ при фиксированном характеристическом многочлене максимального периода над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$ и случайном равновероятном выборе начального заполнения последовательности u . С использованием неравенства Чебышева получены оценки сверху вероятности $P(|N_l(a, u)/l - 1/2^n| \geq \epsilon)$, где $\epsilon > 0$. Все эти результаты обладают следующими недостатками: они либо являются довольно частными, либо не позволяют оценить частоты $N_l(z, u_{n-1})$ для каждой конкретной последовательности u , так как описывают характеристики всего класса последовательностей с данным характеристическим многочленом. Таким образом, важное значение имеет развитие метода тригонометрических сумм для исследования рассматриваемых частот, который лишен указанных недостатков.

2. Спектральный метод

В этом параграфе будет развит спектральный метод, впервые предложенный в статье [7] и использовавшийся в работе [8] для описания частотных характеристик старшей двоичной координатной последовательности линейной рекуррентной максимального периода над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$. Этот метод позволяет свести исследование частоты $N_l(z, u_{n-1})$ к исследованию соответству-

ющих спектральных коэффициентов и тригонометрической суммы от ЛРП над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$, что дает возможность применять уже известные оценки тригонометрических сумм над кольцами Галуа.

Укажем важное свойство отображения $\varkappa_{n-1}^K$.

Утверждение 1. Если $K = \{k_0, k_1\}$ — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, то

- 1) $\varkappa_{n-1}^K(a) = k_0$ при всех $a \in \{k'_0 + k'_1 i : i = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$,
 - 2) $\varkappa_{n-1}^K(a) = k_1$ при всех $a \in \{k'_0 + k'_1 i : i = 2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n - 1\}$,
- где $k'_0 = -k_0$, $k'_1 = k_1 - k_0$.

Доказательство. Заметим, что имеет место равенство $-k_0 = k_0 + 2k_0 + \dots + 2^{n-1}k_0$. Для каждого элемента i из множества $\mathbb{Z}_{2^n}$ рассмотрим его двоичное представление $i = i_0 + 2i_1 + 2^2i_2 + \dots + 2^{n-1}i_{n-1}$, тогда получим равенство

$$-k_0 + (k_1 - k_0)i = (k_0 + \dots + 2^{n-1}k_0) + (i_0k_1 + \dots + 2^{n-1}i_{n-1}k_1) - (i_0k_0 + \dots + 2^{n-1}i_{n-1}k_0).$$

Заметим, что если $i_s = 0$, то коэффициент при 2^s равен k_0 , а если $i_s = 1$, то коэффициент при 2^s равен k_1 для всех $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Таким образом, элемент $k'_0 + k'_1 i$ имеет старшую координату k_0 в координатном множестве K тогда и только тогда, когда старшая двоичная координата i равна 0, и имеет старшую координату k_1 тогда и только тогда, когда старшая двоичная координата i равна 1. $\square$

Рассмотрим аддитивный характер χ кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, определенный на элементах этого кольца равенством

$$\chi(x) = e^{2\pi i \frac{x}{2^n}}. \quad (2)$$

Утверждение 2. Пусть K — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$. Тогда для всех $a \in \mathbb{Z}_{2^n}$ имеет место равенство

$$(-1)^{\varkappa_{n-1}^K(a)} = \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \chi(aj), \quad (3)$$

где

$$\mu_j = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{2^n-1} (-1)^{\varkappa_{n-1}^K(s)} \chi(-sj). \quad (4)$$

Доказательство. С использованием соотношения ортогональности для характеров получим, что при всех $b \in \mathbb{Z}_{p^n}$

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \chi(bj) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \neq 0, \\ 2^n, & \text{если } b = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \chi(aj) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{s=0}^{2^n-1} (-1)^{\mathcal{Z}_{n-1}^K(s)} \chi(-sj) \chi(aj).$$

Изменив в правой части этого равенства порядок суммирования и воспользовавшись равенствами (5), будем иметь

$$\frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{2^n-1} (-1)^{\mathcal{Z}_{n-1}^K(s)} \sum_{j=0}^{2^n-1} \chi((a-s)j) = (-1)^{\mathcal{Z}_{n-1}^K(a)}. \quad \square$$

Величины μ_j , участвующие в равенстве (3), можно рассматривать как соответствующие спектральные коэффициенты в представлении величины $(-1)^{\mathcal{Z}_{n-1}^K(a)}$ через характеры $\chi(aj)$, где $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Укажем свойства этих коэффициентов, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. Если $K = \{k_0, k_1\}$ — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, $k'_0 = -k_0$, $k'_1 = k_1 - k_0$, то

$$\mu_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ — четное число,} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \chi(-(k'_0 + k'_1 i)j), & \text{если } j \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Доказательство. Из утверждения 1 следует, что

$$(-1)^{\mathcal{Z}_{n-1}^K(s)} = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in \{k'_0 + k'_1 i : i = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}, \\ -1, & \text{если } s \in \{k'_0 + k'_1 i : i = 2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n - 1\}. \end{cases}$$

Тогда в силу равенства (4) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mu_j &= \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{2^n-1} (-1)^{\mathcal{Z}_{n-1}^K(s)} \chi(-sj) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \chi(-(k'_0 + k'_1 i)j) - \frac{1}{2^n} \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} \chi(-(k'_0 + k'_1 i)j), \end{aligned}$$

а значит,

$$\mu_j = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \left(\chi(-(k'_0 + k'_1 i)j) - \chi(-(k'_0 + k'_1 i)j) \chi(-k'_1 2^{n-1} j) \right).$$

В силу того, что число k'_1 нечетно, выполняется равенство $\chi(-k'_1 2^{n-1} j) = (-1)^j$. Таким образом, если j — четное число, то $\mu_j = 0$, а если j — нечетное, то

$$\mu_j = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \chi(-(k'_0 + k'_1 i)j). \quad \square$$

Основным результатом этого параграфа является следующая оценка суммы модулей всех спектральных коэффициентов μ_j .

Теорема 1. При всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| \leq \frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1,$$

которая только при $n = 1$ обращается в равенство.

Доказательство. Если $n = 1$, то доказываемое неравенство очевидно. Пусть теперь $n \geq 2$. Согласно лемме 1

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| = \sum_{s=0}^{2^{n-1}-1} |\mu_{2s+1}| = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{s=0}^{2^{n-1}-1} \left| \chi(-k'_0(2s+1)) \sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} \chi(-k'_1 t(2s+1)) \right|.$$

Так как $|\chi(-k'_0(2s+1))| = 1$ и нечетные числа $k'_1(2s+1)$, где $s = 0, 1, \dots, 2^{n-1}-1$, попарно не сравнимы по модулю 2^n , то справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{s=0}^{2^{n-1}-1} \left| \sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} \chi(-k'_1 t(2s+1)) \right| = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{s=0}^{2^{n-1}-1} \left| \sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} \chi((2s+1)t) \right|. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая равенство (2), будем иметь

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{s=0}^{2^{n-1}-1} \left| \sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} e^{2\pi i \frac{2s+1}{2^n} t} \right| = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{s=0}^{2^{n-1}-1} \left| \frac{e^{\pi i (2s+1)} - 1}{e^{2\pi i \frac{2s+1}{2^n}} - 1} \right|.$$

В итоге получим

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{s=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin(\frac{2s+1}{2^n} \pi)} = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{s=0}^{2^{n-2}-1} \frac{1}{\sin(\frac{2s+1}{2^n} \pi)}.$$

При $n = 2$ правая часть полученного равенства равна $\sqrt{2} = 1,41 \dots$, что меньше, чем $(2/\pi) \ln 2 + 1 = 1,44 \dots$. При $n = 3$ правая часть рассматриваемого равенства равна $(1/2)((\sin(\pi/8))^{-1} + (\sin(3\pi/8))^{-1}) = 1,84 \dots$, что меньше, чем $(2/\pi) \ln 4 + 1 = 1,88 \dots$. Поэтому будем исследовать случай, когда $n \geq 4$. Согласно интегральному неравенству Йенсена (см., например, [17, стр. 153]) для выпуклой и дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет место неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Применив это неравенство для $f(x) = 1/\sin x$ на отрезках $[\pi(j-1)/2^n, \pi(j+1)/2^n]$, где $j = 3, 5, \dots, 2^{n-1}-1$, будем иметь

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| \leq \frac{1}{2^{n-2} \sin(\frac{\pi}{2^n})} + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{j=3,5,\dots,2^{n-1}-1} \frac{2^{n-1}}{\pi} \int_{\frac{\pi(j-1)}{2^n}}^{\frac{\pi(j+1)}{2^n}} \frac{1}{\sin x} dx,$$

а тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| &\leq \frac{1}{2^{n-2} \sin(\frac{\pi}{2^n})} + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2^{n-1}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \\ &= \frac{1}{2^{n-2} \sin(\frac{\pi}{2^n})} + \frac{2}{\pi} \left(\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2^n} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Так как $\operatorname{tg} x > x$ при всех $x \in (0, \frac{\pi}{4})$, то

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| \leq \frac{1}{2^{n-2} \sin(\frac{\pi}{2^n})} - \frac{2}{\pi} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2^n} \right) \right) < \frac{1}{2^{n-2} \sin(\frac{\pi}{2^n})} + \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{2^n}{\pi} \right).$$

Функция $(\sin x)/x$ убывает на интервале $(0, \frac{\pi}{4})$, поэтому при $n \geq 4$ справедливо неравенство

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} \geq \frac{\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)}{\frac{\pi}{16}},$$

а значит,

$$\frac{1}{2^{n-2} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \leq \frac{\frac{\pi}{16}}{2^{n-2} \frac{\pi}{2^n} \sin\left(\frac{\pi}{16}\right)} = \frac{1}{4 \sin\left(\frac{\pi}{16}\right)} = 1,281 \dots$$

Учитывая, что $(2/\pi) \ln(\pi/2) = 0,287 \dots$, получим

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| < \frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + \frac{1}{2^{n-2} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} - \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1. \quad \square$$

Ранее в работе [7, следствие 14] для двоичного координатного множества была получена оценка

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| < \frac{2}{\pi} \ln(2^n) + 1.$$

Правая часть этого неравенства больше правой части неравенства из теоремы 1 на величину $(2/\pi) \ln 2 = 0,441 \dots$

3. Распределение элементов на циклах координатных последовательностей

Пусть $F(x)$ — унитарный многочлен степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$. Назовем многочлен $F(x)$ реверсивным многочленом Галуа над кольцом R , если многочлен $\bar{F}(x)$, полученный из $F(x)$ приведением всех его коэффициентов по модулю 2, является неприводимым многочленом над полем $GF(2)$ и $\bar{F}(x) \neq x$. Обозначим через $L_R(F)$ множество всех ЛРП u над кольцом R с характеристическим многочленом $F(x)$, а через $L_R(F)^*$ — множество всех таких ЛРП u , у которых в начальном отрезке $(u(0), u(1), \dots, u(m-1))$ есть хотя бы один обратимый элемент кольца R . Нулевую последовательность будем обозначать (0) . Если $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа над кольцом R , то каждая последовательность $u \in L_R(F)^*$ будет чисто периодической последовательностью периода $T(u)$, который совпадает с периодом $T(F)$ многочлена $F(x)$ (см., например, [2]).

Следующее утверждение позволяет перейти от исследования частоты $N_l(z, u_{n-1})$ к изучению некоторой суммы степеней числа -1 .

Утверждение 3. Пусть $K = \{k_0, k_1\}$ — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, u — последовательность над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$, $u_{n-1} = \mathfrak{x}_{n-1}^K(u)$, $l \in \mathbb{N}$, $z \in K$, тогда

$$N_l(z, u_{n-1}) = \frac{l}{2} + \frac{(-1)^z}{2} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{\mathfrak{x}_{n-1}^K(u(i))}.$$

Доказательство. Заметим, что при всех $x \in \mathbb{Z}$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{2}(1 + (-1)^x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — четное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — нечетное число.} \end{cases} \quad (6)$$

С использованием этого равенства получим

$$N_l(z, u_{n-1}) = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{2} (1 + (-1)^{u_{n-1}(i)+z}) = \frac{l}{2} + \frac{(-1)^z}{2} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{\mathfrak{x}_{n-1}^K(u(i))}. \quad \square$$

Лемма 2. ([6]). Если $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, $T(F) = 2^\nu(2^m - 1)/d$, $0 \leq \nu \leq n-1$, $v \in L_R(F)$, $v \neq (0)$, χ — аддитивный характер кольца R , определенный равенством (2), то

$$\left| \sum_{i=0}^{T(F)-1} \chi(v(i)) + \frac{2^\nu}{d} \right| \leq \frac{2^\nu(d2^{n-1} - 1)}{d} 2^{\frac{m}{2}}.$$

Лемма 3. Для чисел μ_j , определенных формулой (4), справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j = (-1)^{\mathfrak{x}_{n-1}^K(0)}.$$

Доказательство. Используя соотношение ортогональности (5), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{2^n-1} (-1)^{\mathfrak{x}_{n-1}^K(s)} \chi(-sj) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{2^n-1} (-1)^{\mathfrak{x}_{n-1}^K(s)} \sum_{j=0}^{2^n-1} \chi(-sj) = (-1)^{\mathfrak{x}_{n-1}^K(0)}. \end{aligned}$$

□

Докажем основной результат этого параграфа.

Теорема 2. Пусть $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, $n \geq 2$, $T(F) = 2^\nu(2^m - 1)/d$, $0 \leq \nu \leq n - 1$, $u \in L_R(F)^*$, K — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$, $z \in K$. Тогда для числа $N(z, u_{n-1}) = N_{T(F)}(z, u_{n-1})$ справедлива оценка

$$|N(z, u_{n-1}) - \omega(z)| < \left(\frac{1}{\pi} \ln(2^{n-1}) + \frac{1}{2} \right) \frac{2^\nu(d2^{n-1} - 1)}{d} 2^{\frac{m}{2}},$$

где

$$\omega(z) = \begin{cases} \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1} T(F), & \text{если } z = \varkappa_{n-1}^K(0), \\ \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} T(F), & \text{если } z \neq \varkappa_{n-1}^K(0). \end{cases}$$

Доказательство. Согласно утверждению 3

$$N(z, u_{n-1}) - \frac{T(F)}{2} = \frac{(-1)^z}{2} \sum_{i=0}^{T(F)-1} (-1)^{\varkappa_{n-1}^K(u(i))}.$$

Отсюда и из равенства (3) следует, что

$$N(z, u_{n-1}) - \frac{T(F)}{2} = \frac{(-1)^z}{2} \sum_{i=0}^{T(F)-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \chi(u(i)j).$$

Изменив порядок суммирования и добавив во внутреннюю сумму слагаемое $2^\nu/d$, получим

$$N(z, u_{n-1}) - \frac{T(F)}{2} = \frac{(-1)^z}{2} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \sum_{i=0}^{T(F)-1} \left(\chi(u(i)j) + \frac{2^\nu}{d} \right) - \frac{(-1)^z}{2} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \frac{2^\nu}{d}.$$

С использованием леммы 3 имеем

$$\frac{T(F)}{2} - \frac{(-1)^z}{2} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \frac{2^\nu}{d} = \frac{T(F)}{2} - \frac{2^\nu(-1)^{z+\varkappa_{n-1}^K(0)}}{2d} = \omega(z).$$

Так как $\mu_0 = 0$, то справедлива оценка

$$|N(z, u_{n-1}) - \omega(z)| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| \right) \max_{v \in L_R(F), v \neq (0)} \left| \sum_{i=0}^{T(F)-1} \left(\chi(v(i)) + \frac{2^\nu}{d} \right) \right|.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 1 и леммой 2. $\square$

Ранее в [9, теорема 4] было показано, что в условиях теоремы 2 при $n \geq 4$, $d = 1$, $\nu = n - 1$, $K = \{0, 1\}$ справедлива оценка

$$\left| N(z, u_{n-1}) - \frac{T(F)}{2} \right| < \left(\frac{1}{\pi} \ln(2^n) + \frac{1}{2} \right) 2^{n-1} \left((2^{n-1} - 1) 2^{\frac{m}{2}} + 1 \right). \quad (7)$$

Обозначим через $S(F)$ правую часть неравенства (7), тогда справедливы оценки

$$\frac{T(F)}{2} - S(F) < N(z, u_{n-1}) < \frac{T(F)}{2} + S(F).$$

Нетрудно заметить, что если даже в указанных нижней и верхней оценках частоты $N(z, u_{n-1})$ заменить величину $(1/\pi) \ln(2^n) + 1/2$ на меньшую $(1/\pi) \ln(2^{n-1}) + 1/2$, то они оказываются хуже, чем аналогичные оценки, вытекающие из теоремы 2.

4. Отмеченные ЛРП над кольцом $\mathbb{Z}_4$

В этом параграфе рассмотрим кольцо вычетов $R = \mathbb{Z}_4$. Реверсивный многочлен Галуа $F(x)$ степени m над кольцом R , имеющий период $T(F) = T(\bar{F}) = 2^m - 1$, будем называть отмеченным многочленом. Период отмеченного многочлена в два раза меньше максимально возможного периода $2(2^m - 1)$ для многочленов степени m над кольцом R . Каждую ЛРП u из множества $L_R(F)^*$ с отмеченным характеристическим многочленом $F(x)$ будем называть отмеченной. Для отмеченной ЛРП u выполнено равенство $T(u) = T(F) = 2^m - 1$. Вопрос о числе $N(z, u)$ появлений элемента $z \in \mathbb{Z}_4$ среди элементов $u(0), u(1), \dots, u(T(u) - 1)$ отмеченной ЛРП u решен в работе [18] и в более общем случае — в [13]. Приведем результаты этих работ, из которых будут следовать точные значения для количества появлений элементов в старших координатных последовательностях $u_1 = \mathcal{K}_1^K(u)$ (для координатных множеств $K = \{k_0, k_1\}$).

Назовем типом распределения элементов в последовательности u упорядоченный набор $(N(0, u), N(1, u), N(2, u), N(3, u))$, а кратностью типа назовем количество последовательностей из множества $L_R(F)^*$, имеющих данный тип распределения.

Теорема 3. ([13], [18]). Пусть $F(x)$ — отмеченный многочлен степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_4$, тогда для отмеченных ЛРП $u \in L_R(F)^*$ возможны четыре типа распределений, указанные в следующих таблицах:

1) при $m = 2\lambda$

$N(0, u)$	$N(1, u)$	$N(2, u)$	$N(3, u)$	кратность типа
$2^{m-2} + 2^{\lambda-1} - 1$	2^{m-2}	$2^{m-2} - 2^{\lambda-1}$	2^{m-2}	$(2^{m-2} + 2^{\lambda-1}) \times$ $\times (2^m - 1)$
$2^{m-2} - 2^{\lambda-1} - 1$	2^{m-2}	$2^{m-2} + 2^{\lambda-1}$	2^{m-2}	$(2^{m-2} - 2^{\lambda-1}) \times$ $\times (2^m - 1)$
$2^{m-2} - 1$	$2^{m-2} + 2^{\lambda-1}$	2^{m-2}	$2^{m-2} - 2^{\lambda-1}$	$2^{m-2}(2^m - 1)$
$2^{m-2} - 1$	$2^{m-2} - 2^{\lambda-1}$	2^{m-2}	$2^{m-2} + 2^{\lambda-1}$	$2^{m-2}(2^m - 1)$

2) при $m = 2\lambda + 1$

$N(0, u)$	$N(1, u)$	$N(2, u)$	$N(3, u)$	кратность типа
$2^{m-2} + 2^{\lambda-1} - 1$	$2^{m-2} + 2^{\lambda-1}$	$2^{m-2} - 2^{\lambda-1}$	$2^{m-2} - 2^{\lambda-1}$	$(2^{m-2} + 2^{\lambda-1}) \times$ $\times (2^m - 1)$
$2^{m-2} + 2^{\lambda-1} - 1$	$2^{m-2} - 2^{\lambda-1}$	$2^{m-2} - 2^{\lambda-1}$	$2^{m-2} + 2^{\lambda-1}$	$(2^{m-2} + 2^{\lambda-1}) \times$ $\times (2^m - 1)$
$2^{m-2} - 2^{\lambda-1} - 1$	$2^{m-2} + 2^{\lambda-1}$	$2^{m-2} + 2^{\lambda-1}$	$2^{m-2} - 2^{\lambda-1}$	$(2^{m-2} - 2^{\lambda-1}) \times$ $\times (2^m - 1)$
$2^{m-2} - 2^{\lambda-1} - 1$	$2^{m-2} - 2^{\lambda-1}$	$2^{m-2} + 2^{\lambda-1}$	$2^{m-2} + 2^{\lambda-1}$	$(2^{m-2} - 2^{\lambda-1}) \times$ $\times (2^m - 1)$

Пусть $K = \{k_0, k_1\}$ — координатное множество кольца $R = \mathbb{Z}_4$, $F(x)$ — отмеченный многочлен над кольцом R , $u \in L_R(F)^*$, $u_1 = \varkappa_1^K(u)$ — старшая координатная последовательность ЛРП u . В качестве следствия из теоремы 3 получим число $N(z, u_1)$ появлений элемента $z \in K$ среди элементов $u_1(0), u_1(1), \dots, u_1(T(u) - 1)$ старшей координатной последовательности u_1 отмеченной ЛРП u . Назовем типом распределения элементов в последовательности u_1 упорядоченный набор $(N(k_0, u_1), N(k_1, u_1))$, а кратностью типа назовем количество последовательностей u из множества $L_R(F)^*$, у которых последовательность $u_1 = \varkappa_1^K(u)$ имеет данный тип распределения.

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 3 $K = \{k_0, k_1\}$ — координатное множество кольца $R = \mathbb{Z}_4$, $u_1 = \varkappa_1^K(u)$, тогда:

1) если $m = 2\lambda$, то при каждом K возможны два типа распределений элементов в последовательности u_1 , представленные в следующей таблице:

Множество $K = \{k_0, k_1\}$	$N(k_0, u_1)$	$N(k_1, u_1)$	кратность типа
$K = \{0, 1\},$ $K = \{0, 3\}$	$2^{m-1} + 2^{\lambda-1} - 1$	$2^{m-1} - 2^{\lambda-1}$	$(2^{m-1} + 2^{\lambda-1})(2^m - 1)$
$K = \{0, 1\},$ $K = \{0, 3\}$	$2^{m-1} - 2^{\lambda-1} - 1$	$2^{m-1} + 2^{\lambda-1}$	$(2^{m-1} - 2^{\lambda-1})(2^m - 1)$
$K = \{2, 1\},$ $K = \{2, 3\}$	$2^{m-1} - 2^{\lambda-1}$	$2^{m-1} + 2^{\lambda-1} - 1$	$(2^{m-1} + 2^{\lambda-1})(2^m - 1)$
$K = \{2, 1\},$ $K = \{2, 3\}$	$2^{m-1} + 2^{\lambda-1}$	$2^{m-1} - 2^{\lambda-1} - 1$	$(2^{m-1} - 2^{\lambda-1})(2^m - 1)$

2) если $m = 2\lambda + 1$, то при каждом K возможны три типа распределений элементов в последовательности u_1 , представленные в следующей таблице:

Множество $K = \{k_0, k_1\}$	$N(k_0, u_1)$	$N(k_1, u_1)$	кратность типа
$K = \{0, 1\},$ $K = \{0, 3\}$	$2^{m-1} - 1$	2^{m-1}	$2^{m-1}(2^m - 1)$
$K = \{0, 1\},$ $K = \{0, 3\}$	$2^{m-1} + 2^\lambda - 1$	$2^{m-1} - 2^\lambda$	$(2^{m-2} + 2^{\lambda-1})(2^m - 1)$
$K = \{0, 1\},$ $K = \{0, 3\}$	$2^{m-1} - 2^\lambda - 1$	$2^{m-1} + 2^\lambda$	$(2^{m-2} - 2^{\lambda-1})(2^m - 1)$
$K = \{2, 1\},$ $K = \{2, 3\}$	2^{m-1}	$2^{m-1} - 1$	$2^{m-1}(2^m - 1)$
$K = \{2, 1\},$ $K = \{2, 3\}$	$2^{m-1} + 2^\lambda$	$2^{m-1} - 2^\lambda - 1$	$(2^{m-2} - 2^{\lambda-1})(2^m - 1)$
$K = \{2, 1\},$ $K = \{2, 3\}$	$2^{m-1} - 2^\lambda$	$2^{m-1} + 2^\lambda - 1$	$(2^{m-1} + 2^{\lambda-1})(2^m - 1)$

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 3 и заметить, что для всех $z \in K$ имеет место равенство $N(z, u_1) = N(a, u) + N(b, u)$, где a, b — элементы кольца $\mathbb{Z}_4$ такие, что $\varkappa_1^K(a) = \varkappa_1^K(b) = z$. $\square$

Из теоремы 3 следует, что каждая из отмеченных ЛРП u над кольцом $R = \mathbb{Z}_4$ имеет «неидеальные» частотные характеристики. Из следствия 1 вытекает, что при всех четных m и при всех координатных множествах K частоты появлений элементов в последовательностях $u_1 = \varkappa_1^K(u)$ также имеют существенные отклонения от среднего значения 2^{m-1} . Однако при любом нечетном значении m для каждого координатного множества K найдутся отмеченные ЛРП u, u , у которых координатная последовательность $u_1 = \varkappa_1^K(u)$

имеет тип распределения $(2^{m-1} - 1, 2^{m-1})$ или $(2^{m-1}, 2^{m-1} - 1)$. Причем ровно половина всех последовательностей $u \in L_R(F)^*$ с данным фиксированным отмеченным характеристическим многочленом $F(x)$ обладает этим свойством.

Кроме того, с помощью теоремы 3 несложно показать, что при нечетном m для каждой ЛРП $u \in L_R(F)^*$ с отмеченным характеристическим многочленом $F(x)$ степени m всегда найдется такое координатное множество K , что тип распределения последовательности $u_1 = \varkappa_1^K(u)$ имеет вид $(2^{m-1} - 1, 2^{m-1})$, а также найдется такое координатное множество K , что тип распределения последовательности $u_1 = \varkappa_1^K(u)$ имеет вид $(2^{m-1}, 2^{m-1} - 1)$. Таким образом, подбирая нужным образом координатное множество, можно на цикле старшей координатной последовательности $u_1 = \varkappa_1^K(u)$ уменьшить отклонения частот появлений от среднего значения по сравнению с исходной последовательностью u .

Рассмотрим вопрос о том, насколько точной является оценка из теоремы 2 применительно к отмеченным ЛРП u над кольцом $\mathbb{Z}_4$. Согласно теореме 2 для всех $z \in K$ имеет место неравенство

$$2^{m-1} - \left(\frac{1}{\pi} \ln 2 + \frac{1}{2}\right) 2^{\frac{m}{2}} - \delta(z) < N(z, u_1) < 2^{m-1} + \left(\frac{1}{\pi} \ln 2 + \frac{1}{2}\right) 2^{\frac{m}{2}} - \delta(z),$$

где $\delta(z) = 0$, если $z \neq \varkappa_1^K(0)$, и $\delta(z) = 1$, если $z = \varkappa_1^K(0)$. Таким образом, при $m = 2\lambda$ оценка из теоремы 2 устанавливает неравенства

$$2^{m-1} - 1,441 \cdot 2^{\lambda-1} - \delta(z) < N(z, u_1) < 2^{m-1} + 1,442 \cdot 2^{\lambda-1} - \delta(z),$$

а при $m = 2\lambda + 1$ оценка из теоремы 2 приводит к соотношениям

$$2^{m-1} - 1,019 \cdot 2^\lambda - \delta(z) < N(z, u_1) < 2^{m-1} + 1,02 \cdot 2^\lambda - \delta(z).$$

Сравнение этих результатов с таблицами из следствия 1 показывает, что для отмеченных ЛРП над кольцом $\mathbb{Z}_4$ они являются весьма точными.

5. Распределение элементов на отрезках координатных последовательностей

Рассмотрим вопрос о числе появлений элементов на отрезках координатных последовательностей. Нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4 ([19]). Если t — нечетное натуральное число, $l \in \mathbb{N}$, $l \leq t$, то

$$\frac{1}{t} \sum_{a=0}^{t-1} \left| \sum_{k=0}^{l-1} e^{2\pi i \frac{-ak}{t}} \right| < \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{4t}{\pi} \right) + 1.$$

Отметим, что в формулировке этого результата (см. [19, лемма 1]) указано, что $t = 2^n - 1$. Однако на самом деле при доказательстве это равенство не используется, используется лишь условие, что t — нечетное число.

Лемма 5. Пусть $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, $T(F) = T(\overline{F}) = t$, $v \in L_R(F)$, $v \neq (0)$, $l \in \mathbb{N}$, χ — характер кольца R , определенный равенством (2). Тогда для всех $l \leq T(F)$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(v(i)) \right| \leq \left(\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{4t}{\pi} \right) + 1 \right) 2^{\frac{m}{2} + n - 1}.$$

Доказательство. Достаточно повторить доказательство из [6, теорема 1] и воспользоваться оценкой из леммы 4. $\square$

Лемма 6. Пусть $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, $T(F) = 2^\nu T(\overline{F})$, $0 \leq \nu \leq n - 1$, $t = T(\overline{F})$, $v \in L_R(F)$, $v \neq (0)$, $l \in \mathbb{N}$, χ — характер кольца R , определенный равенством (2). Тогда для всех $l \leq T(F)$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(v(i)) \right| \leq \left(\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{4t}{\pi} \right) + 1 \right) 2^{\frac{m}{2} + \nu + n - 1}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательности v_s над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$, определенные для всех $s = 0, 1, \dots, 2^\nu - 1$ равенством

$$v_s(i) = u(s + 2^\nu i), \quad i \geq 0.$$

Пусть представление ЛРП v с использованием функции след (см., например, [2]) имеет вид

$$v(i) = \text{Tr}_R^S(b\alpha^i),$$

где $S = GR(2^{mn}, 2^n)$ — кольцо Галуа, являющееся расширением степени m кольца R , Tr_R^S — функция след из кольца S в кольцо R , α — корень многочлена $F(x)$ в кольце S , b — ненулевой элемент кольца S . Так как $F(x)$ —

реверсивный многочлен Галуа, то α является обратимым элементом кольца S , причем порядок элемента α будет равен $T(F)$. Представление каждой ЛРП v_s с использованием функции след будет следующим:

$$v_s(i) = v(s + 2^\nu i) = \text{Tr}_R^S(b\alpha^s \alpha_0^i),$$

где $\alpha_0 = \alpha^{2^\nu}$ — элемент порядка $t = T(\bar{F})$. Элемент α_0 — корень некоторого реверсивного многочлена Галуа $G(x)$ степени m над кольцом R , причем $T(G) = T(\bar{G}) = T(\bar{F})$. Таким образом, при всех $s = 0, 1, \dots, 2^\nu - 1$ последовательность v_s является ненулевой ЛРП с реверсивным характеристическим многочленом Галуа $G(x)$, для которого $T(G) = T(\bar{G}) = t$. Тогда, используя лемму 5, получим

$$\left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(v(i)) \right| \leq \sum_{s=0}^{2^\nu-1} \left| \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1-s}{2^\nu} \rfloor} \chi(v_s(i)) \right| \leq \left(\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{4t}{\pi} \right) + 1 \right) 2^{\frac{m}{2} + \nu + n - 1}. \quad \square$$

Докажем основной результат этого параграфа.

Теорема 4. Если $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, $n \geq 2$, $T(F) = 2^\nu T(\bar{F}) = 2^\nu t$, $u \in L_R(F)^*$, K — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$, $l \leq T(F)$, $z \in K$, то справедлива оценка

$$\left| N_l(z, u_{n-1}) - \frac{l}{2} \right| < \left(\frac{1}{\pi} \ln(2^{n-1}) + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{4t}{\pi} \right) + 1 \right) 2^{\frac{m}{2} + \nu + n - 1}.$$

Доказательство. В силу утверждения 3

$$N_l(z, u_{n-1}) - \frac{l}{2} = \frac{(-1)^z}{2} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{\varkappa_{n-1}^K(u(i))}.$$

Воспользовавшись равенством (3) и изменяя порядок суммирования, получим

$$N_l(z, u_{n-1}) - \frac{l}{2} = \frac{(-1)^z}{2} \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \chi(u(i)j) = \frac{(-1)^z}{2} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \sum_{i=0}^{l-1} \chi(u(i)j).$$

Так как $\mu_0 = 0$, то

$$\left| N_l(z, u_{n-1}) - \frac{l}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| \right) \max_{v \in L_R(F), v \neq (0)} \left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(v(i)) \right|.$$

Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться теоремой 1 и леммой 6. $\square$

Раньше в [12, теоремы 5 и 6] для частного случая, когда $K = \{0, 1\}$, $n \geq 4$, $\overline{F}(x)$ — многочлен максимального периода над полем $GF(2)$, а ν принимает значения 0 или $n - 1$, была получена оценка, аналогичная оценке из теоремы 4 (она отличается лишь заменой множителя $(1/\pi) \ln(2^{n-1}) + 1/2$ величиной $(1/\pi) \ln(2^n) + 1/2$). Таким образом, теорема 4 не только обобщает указанные результаты, но и уточняет их.

6. Асимптотическая неулучшаемость оценок

В данном параграфе рассмотрим вопрос о том, насколько точными являются оценки, полученные в предыдущих параграфах.

Лемма 7. Для чисел μ_j , определенных равенством (4), справедливы соотношения

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j|^2 = 1, \quad \sum_{s=0}^{2^n-1} \bar{\mu}_s \mu_{s+2^{n-1}} = 0,$$

где $\bar{\mu}_s$ — комплексное число, сопряженное с числом μ_s , $s = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

Доказательство. Из определения спектральных коэффициентов μ_j следуют равенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j|^2 &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \bar{\mu}_j = \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{2^n-1} (-1)^{\mathcal{K}_{n-1}^K(s)} \chi(-sj) \right) \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\mathcal{K}_{n-1}^K(k)} \chi(kj) \right). \end{aligned}$$

Изменив порядок суммирования, получим

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j|^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{s=0}^{2^n-1} (-1)^{\mathcal{K}_{n-1}^K(s)} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\mathcal{K}_{n-1}^K(k)} \sum_{j=0}^{2^n-1} \chi((k-s)j);$$

отсюда и из (5) следует, что

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j|^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{2^n-1} (-1)^{2\mathcal{K}_{n-1}^K(s)} = 1.$$

Докажем второе соотношение. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2^n-1} \bar{\mu}_s \mu_{s+2^{n-1}} &= \\ &= \sum_{s=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{\chi_{n-1}^K(i)} \chi(is) \right) \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\chi_{n-1}^K(k)} \chi(-k(s+2^{n-1})) \right). \end{aligned}$$

Изменив порядок суммирования, получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2^n-1} \bar{\mu}_s \mu_{s+2^{n-1}} &= \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\chi_{n-1}^K(k)} \chi(-k2^{n-1}) \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{\chi_{n-1}^K(i)} \sum_{s=0}^{2^n-1} \chi((i-k)s); \end{aligned}$$

отсюда и из соотношения ортогональности (5) следует, что

$$\sum_{s=0}^{2^n-1} \bar{\mu}_s \mu_{s+2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{2\chi_{n-1}^K(k)} \chi(-k2^{n-1}) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{-k} = 0. \quad \square$$

Теорема 5. Если $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, $n \geq 2$, K — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, то для любых $l \leq T(F)$, $z \in K$ найдется такая ЛРП $u \in L_R(F)^*$, что для последовательности $u_{n-1} = \chi_{n-1}^K(u)$ справедливо неравенство

$$\left| N_l(z, u_{n-1}) - \frac{l}{2} \right| \geq \frac{\sqrt{l}}{2}.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 4 было показано, что

$$\left| N_l(z, u_{n-1}) - \frac{l}{2} \right| = \frac{1}{2} |S_l(u)|,$$

где

$$S_l(u) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \sum_{i=0}^{l-1} \chi(u(i)j).$$

Положим $\Delta = \sum_{u \in L_R(F)^*} |S_l(u)|^2$, тогда найдется ЛРП $u \in L_R(F)^*$ такая, что для последовательности $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$ справедливо соотношение

$$\left| N_l(z, u_{n-1}) - \frac{l}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{|L_R(F)^*|} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{2^{m(n-1)}(2^m - 1)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{u \in L_R(F)^*} S_l(u) \bar{S}_l(u) = \\ &= \sum_{u \in L_R(F)^*} \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \sum_{i=0}^{l-1} \chi(u(i)j) \right) \left(\sum_{s=0}^{2^n-1} \bar{\mu}_s \sum_{k=0}^{l-1} \chi(-u(k)s) \right). \end{aligned}$$

Изменив порядок суммирования, получим

$$\Delta = \sum_{j,s=0}^{2^n-1} \mu_j \bar{\mu}_s \sum_{i,k=0}^{l-1} \sum_{u \in L_R(F)^*} \chi(u(i)j - u(k)s). \quad (9)$$

Обозначим через $S = GR(2^{mn}, 2^n)$ кольцо Галуа, являющееся расширением степени m кольца R . Каждая последовательность u из множества $L_R(F)^*$ однозначно представима в виде

$$u(i) = \text{Tr}_R^S(b\alpha^i),$$

где Tr_R^S — функция след из кольца S в кольцо R , α — корень многочлена $F(x)$ в кольце S , b — обратимый элемент кольца S . Если χ' — аддитивный характер кольца S , определенный на элементах этого кольца равенством $\chi'(y) = \chi(\text{Tr}_R^S(y))$, то

$$\sum_{u \in L_R(F)^*} \chi(u(i)j - u(k)s) = \sum_{b \in S^*} \chi'(b(\alpha^i j - \alpha^k s)),$$

и согласно равенству (5) из работы [6]

$$\sum_{u \in L_R(F)^*} \chi(u(i)j - u(k)s) = \begin{cases} |S^*|, & \text{если } \alpha^i j - \alpha^k s = 0, \\ -|2S|, & \text{если } \alpha^i j - \alpha^k s \in 2^{n-1}S \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } \alpha^i j - \alpha^k s \notin 2^{n-1}S. \end{cases}$$

Так как числа μ_t равны 0 при всех четных значениях t , то в равенстве (9) достаточно рассматривать лишь случай, когда j и s — обратимые элементы

кольца R . При таких j и s каждое из соотношений $\alpha^i j - \alpha^k s = 0$ и $\alpha^i j - \alpha^k s \in 2^{n-1}S \setminus \{0\}$ влечет равенство $\bar{\alpha}^{k-i} = 1$, где $\bar{\alpha}$ — образ элемента α при действии естественного эпиморфизма из кольца S в поле $S/(2S)$. Это возможно только в случае, когда $T(\bar{F})$ делит $k - i$, что при $l \leq T(\bar{F})$ равносильно условию $k = i$. Из неравенства (9) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \bar{\mu}_j \sum_{i=0}^{l-1} |S^*| + \sum_{s=0}^{2^n-1} \mu_{s+2^{n-1}} \bar{\mu}_s \sum_{i=0}^{l-1} (-|2S|) = \\ &= |S^*|l \sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j|^2 - |2S|l \sum_{s=0}^{2^n-1} \bar{\mu}_s \mu_{s+2^{n-1}}. \end{aligned}$$

С учетом леммы 7 получим $\Delta = 2^{m(n-1)}(2^m - 1)l$, а тогда в силу (8)

$$\left| N_l(z, u_{n-1}) - \frac{l}{2} \right| \geq \frac{\sqrt{l}}{2}. \quad \square$$

Теорема 5 показывает, что для любых $z \in K$, $l \leq T(\bar{F})$ и произвольного координатного множества K в классе $L_R(F)^*$ найдется ЛРП u , у которой в старшей координатной последовательности u_{n-1} частота $N_l(z, u_{n-1})$ отклоняется от среднего значения на величину не меньше $\sqrt{l}/2$. Вопрос о том, может ли это отклонение быть значительно большим, остается открытым. Результаты следствия 1 о распределении элементов на циклах старших координатных последовательностей отмеченных ЛРП над кольцом $\mathbb{Z}_4$ показывают, что для всех таких последовательностей отклонение величины $N_l(z, u_{n-1})$ от $l/2$ при $l = T(\bar{F})$ практически совпадает с числом $\sqrt{l}/2$ либо меньше этого числа.

Рассмотрим реверсивный многочлен Галуа $F(x)$ степени m над кольцом $\mathbb{Z}_{2^n}$, для которого $T(\bar{F}) = 2^m - 1$. Как показано в теореме 5, при $l = T(\bar{F})$ для каждого элемента $z \in K$ найдется такая ЛРП $u \in L_R(F)^*$, что для последовательности $u_{n-1} = \varkappa_{n-1}^K(u)$ справедливо неравенство

$$\left| N_l(z, u_{n-1}) - \frac{l}{2} \right| \geq \frac{\sqrt{2^m - 1}}{2}.$$

Это означает, что в оценках из теорем 2 и 4 главный множитель $2^{m/2}$ нельзя заменить множителем $a^{m/2}$, где $a < 2$. Таким образом, эти оценки являются асимптотически неулучшаемыми в классе всех старших координатных последовательностей ЛРП из множества $L_R(F)^*$.

7. Автокорреляционная функция старшей координатной последовательности

Пусть u — последовательность над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, K — координатное множество кольца K , $u_{n-1} = \mathcal{K}_{n-1}^K(u)$ — старшая координатная последовательность последовательности u . Автокорреляционная функция последовательности u_{n-1} для всех целых неотрицательных чисел l и τ определяется равенством

$$C(l, \tau) = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{u_{n-1}(i) - u_{n-1}(i+\tau)}.$$

Очевидно, что величина $C(l, \tau)$ равна разности числа совпадающих координат в векторах $(u_{n-1}(0), u_{n-1}(1), \dots, u_{n-1}(l-1))$, $(u_{n-1}(\tau), u_{n-1}(\tau+1), \dots, u_{n-1}(\tau+l-1))$ и числа несовпадающих координат в этих векторах.

Теорема 6. Если $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, $T(F) = 2^\nu T(\bar{F}) = 2^\nu(2^m - 1)/d$, $T(\bar{F}) = t$, $u \in L_R(F)$, $u \neq (0)$, K — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, $u_{n-1} = \mathcal{K}_{n-1}^K(u)$, то для всех $\tau \in \mathbb{N}_0$, которые не делятся на t :

1) если $l = T(F)$, то

$$|C(l, \tau)| \leq \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right)^2 \frac{2^\nu}{d} \left((d2^{n-1} - 1) 2^{\frac{m}{2}} + 1 \right);$$

2) если $l < T(F)$, то

$$|C(l, \tau)| \leq \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right)^2 \left(\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{4t}{\pi} \right) + 1 \right) 2^{\frac{m}{2} + n + \nu - 1}.$$

Доказательство. Из равенства

$$C(l, \tau) = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{u_{n-1}(i) - u_{n-1}(i+\tau)} = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{\mathcal{K}_{n-1}^K(u(i))} (-1)^{\mathcal{K}_{n-1}^K(u(i+\tau))}$$

с помощью соотношения (3) получим

$$\begin{aligned} C(l, \tau) &= \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j_1=0}^{2^n-1} \mu_{j_1} \chi(u(i)j_1) \sum_{j_2=0}^{2^n-1} \mu_{j_2} \chi(u(i+\tau)j_2) = \\ &= \sum_{j_1, j_2=0}^{2^n-1} \mu_{j_1} \mu_{j_2} \sum_{i=0}^{l-1} \chi(v_{j_1, j_2, \tau}(i)), \quad (10) \end{aligned}$$

где $v_{j_1, j_2, \tau}$ — последовательность элементов кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, определенная при всех $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $\tau \in \mathbb{N}_0$ равенством

$$v_{j_1, j_2, \tau}(i) = u(i)j_1 + u(i + \tau)j_2, \quad i \geq 0.$$

Пусть представление ЛРП u в терминах функции след имеет вид

$$u(i) = \text{Tr}_R^S(b\alpha^i),$$

где $S = GR(2^{mn}, 2^n)$ — кольцо Галуа, являющееся расширением степени m кольца R , Tr_R^S — функция след из кольца S в кольцо R , α — корень многочлена $F(x)$ в кольце S , b — ненулевой элемент кольца S . Последовательность $v_{j_1, j_2, \tau}$ представима в виде

$$v_{j_1, j_2, \tau} = \text{Tr}_R^S(b(j_1 + \alpha^\tau j_2)\alpha^i), \quad i \geq 0.$$

Согласно лемме 1 коэффициенты $\mu_j = 0$ при всех $j \in 2\mathbb{Z}_{2^n}$, поэтому в соотношениях (10) достаточно рассматривать суммирование по всем $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_{2^n}$, обратимым в этом кольце. Обозначим через $\bar{\alpha}$ образ элемента α при действии естественного эпиморфизма из кольца S в фактор-кольцо $S/(2S) = GF(2^m)$. Если бы элемент $j_1 + \alpha^\tau j_2$ принадлежал множеству $2S$, то имело бы место равенство $\bar{\alpha}^\tau = 1$, что невозможно при τ , не делящихся на $t = T(\bar{F})$. Таким образом, при всех $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_{2^n}^*$ элемент $b(j_1 + \alpha^\tau j_2)$ отличен от нуля, а значит, $v_{j_1, j_2, \tau}$ — ненулевая последовательность из множества $L_R(F)$ всех ЛРП над кольцом R с характеристическим многочленом $F(x)$. Тогда из (10) получим

$$|C(l, \tau)| \leq \sum_{j_1, j_2=0}^{2^n-1} |\mu_{j_1} \mu_{j_2}| \max_{j_1, j_2 \in R^*} \left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(v_{j_1, j_2, \tau}(i)) \right|,$$

а в силу теоремы 1

$$|C(l, \tau)| \leq \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right)^2 \max_{v \in L_R(F), v \neq (0)} \left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(v(i)) \right|.$$

Теперь для доказательства п. 1) теоремы достаточно воспользоваться леммой 2, а для доказательства п. 2) — леммой 5. $\square$

Теорема 6 уточняет и обобщает оценки коэффициентов автокорреляции, полученные в работах [8, теорема 3.5] и [12, теоремы 9 и 10].

8. Обобщения на случай r -грамм

В этом параграфе обобщим результаты о распределении элементов в старшей координатной последовательности на случай координатных последовательностей ЛРП векторов, в частности, отсюда будут следовать результаты о распределении r -грамм в старших координатных последовательностях.

Рассмотрим ЛРП $u_1, u_2, \dots, u_r$ над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, имеющие один и тот же характеристический многочлен $F(x)$. ЛРП векторов будем называть последовательность, элементы которой имеют вид $(u_1(i), u_2(i), \dots, u_r(i))$ для всех $i \geq 0$. Систему последовательностей $u_1, u_2, \dots, u_r$ будем называть линейно независимой над кольцом R , если для всех ненулевых наборов $(c_1, c_2, \dots, c_r) \in R^r$ последовательность $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_r u_r$ является ненулевой.

Пусть K — координатное множество кольца R , $u_{n-1}^{(s)} = \mathcal{K}_{n-1}^K(u_s)$ — старшая координатная последовательность последовательности u_s , где $s = 1, 2, \dots, r$. Последовательность из наборов $(u_{n-1}^{(1)}(i), u_{n-1}^{(2)}(i), \dots, u_{n-1}^{(r)}(i))$, где $i \geq 0$, будем называть старшей координатной последовательностью ЛРП векторов.

Для каждого натурального числа l и набора $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ из множества K^r обозначим через $N_l(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)})$ количество таких целых чисел $i \in \overline{0, l-1}$, что

$$\begin{cases} u_{n-1}^{(1)}(i) = z_1, \\ u_{n-1}^{(2)}(i) = z_2, \\ \dots \\ u_{n-1}^{(r)}(i) = z_r. \end{cases}$$

Другими словами, величина $N_l(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)})$ равна числу появлений r -граммы $\bar{z}$ на начальном отрезке длины l старшей координатной последовательности рассматриваемой ЛРП векторов. Отметим, что если последовательности $u_1, u_2, \dots, u_r$ являются сдвигами одной ЛРП u , т. е. для некоторых целых неотрицательных чисел $s_1, s_2, \dots, s_r$ выполнены равенства $u_1 = x^{s_1} u$, $u_2 = x^{s_2} u$, $\dots$, $u_r = x^{s_r} u$, то величина $N_l(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)})$ равна числу появлений вектора $\bar{z}$ среди векторов $(u_{n-1}(i + s_1), u_{n-1}(i + s_2), \dots, u_{n-1}(i + s_r))$, где $0 \leq i \leq l - 1$. Таким образом, из результатов о распределении наборов $\bar{z}$ в старшей координатной последовательности ЛРП векторов следуют результаты о распределении r -грамм в старшей координатной последовательности одной ЛРП.

Теорема 7. Если $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, $T(F) = 2^\nu(2^m - 1)/d$, $0 \leq \nu \leq n - 1$, $u_1, u_2, \dots, u_r \in L_R(F)$ — линейно независимая система, K — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, $u_{n-1}^{(s)} = \chi_{n-1}^K(u_s)$, где $s = 1, 2, \dots, r$, $\bar{z} \in K^r$, то для числа $N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) = N_{T(F)}(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)})$ справедлива оценка

$$|N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \omega(\bar{z})| \leq \left(\left(\frac{1}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right)^r - \frac{1}{2^r} \right) \frac{2^\nu(d2^{n-1} - 1)}{d} 2^{\frac{m}{2}},$$

где

$$\omega(\bar{z}) = \begin{cases} \frac{2^{m-r} - 1}{2^m - 1} T(F), & \text{если } \bar{z} = (\chi_{n-1}^K(0), \dots, \chi_{n-1}^K(0)), \\ \frac{2^{m-r}}{2^m - 1} T(F), & \text{если } \bar{z} \neq (\chi_{n-1}^K(0), \dots, \chi_{n-1}^K(0)). \end{cases}$$

Доказательство. Из равенств (6) следует, что

$$N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) = \sum_{i=0}^{T(F)-1} \prod_{j=1}^r \left(\frac{1}{2} \sum_{c_j=0}^1 (-1)^{c_j(u_{n-1}^{(j)}(i) + z_j)} \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) &= \\ &= \frac{1}{2^r} \sum_{i=0}^{T(F)-1} \sum_{(c_1, \dots, c_r) \in \{0,1\}^r} (-1)^{c_1 u_{n-1}^{(1)}(i) + \dots + c_r u_{n-1}^{(r)}(i)} (-1)^{c_1 z_1 + \dots + c_r z_r}. \end{aligned}$$

Изменив порядок суммирования и выделив отдельно слагаемое, соответствующее нулевому набору $\bar{c} = (c_1, \dots, c_r) = (0, \dots, 0) = \bar{0}$, получим:

$$\begin{aligned} N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \frac{T(F)}{2^r} &= \\ &= \frac{1}{2^r} \sum_{(c_1, \dots, c_r) \neq \bar{0}} (-1)^{c_1 z_1 + \dots + c_r z_r} \sum_{i=0}^{T(F)-1} (-1)^{c_1 u_{n-1}^{(1)}(i) + \dots + c_r u_{n-1}^{(r)}(i)}. \end{aligned}$$

Разобьем правую часть на суммы по всем векторам $\bar{c} \in \{0, 1\}^r$ веса k , где $k = 1, 2, \dots, r$:

$$\begin{aligned} N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \frac{T(F)}{2^r} = \\ = \frac{1}{2^r} \sum_{k=1}^r \sum_{\{t_1, \dots, t_k\} \subset \overline{1, r}} (-1)^{\sum_{s=1}^k z_{t_s}} \sum_{i=0}^{T(F)-1} (-1)^{\sum_{s=1}^k u_{n-1}^{(t_s)}(i)}. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу (3)

$$\sum_{i=0}^{T(F)-1} (-1)^{\sum_{s=1}^k u_{n-1}^{(t_s)}(i)} = \sum_{i=0}^{T(F)-1} \left(\sum_{j_1=0}^{2^n-1} \mu_{j_1} \chi(u_{t_1}(i)j_1) \right) \cdots \left(\sum_{j_k=0}^{2^n-1} \mu_{j_k} \chi(u_{t_k}(i)j_k) \right),$$

а значит,

$$\sum_{i=0}^{T(F)-1} (-1)^{\sum_{s=1}^k u_{n-1}^{(t_s)}(i)} = \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in R^k} \mu_{j_1} \cdots \mu_{j_k} \sum_{i=0}^{T(F)-1} \chi(v_{t_1, \dots, t_k, j_1, \dots, j_k}(i)),$$

где $v_{t_1, \dots, t_k, j_1, \dots, j_k}$ — последовательность над кольцом R , элементы которой определены равенством

$$v_{t_1, \dots, t_k, j_1, \dots, j_k}(i) = u_{t_1}(i)j_1 + \dots + u_{t_k}(i)j_k, \quad i \geq 0.$$

Тогда из равенства (11) следует, что

$$\begin{aligned} N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \delta(\bar{z}) = \\ = \frac{1}{2^r} \sum_{k=1}^r \sum_{\{t_1, \dots, t_k\} \subset \overline{1, r}} (-1)^{\sum_{s=1}^k z_{t_s}} \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in R^k} \mu_{j_1} \cdots \mu_{j_k} \left(\sum_{i=0}^{T(F)-1} \chi(v_{t_1, \dots, t_k, j_1, \dots, j_k}(i)) + \frac{2^\nu}{d} \right), \end{aligned}$$

где

$$\delta(\bar{z}) = \frac{T(F)}{2^r} - \frac{2^\nu}{d2^r} \sum_{k=1}^r \sum_{\{t_1, \dots, t_k\} \subset \overline{1, r}} (-1)^{\sum_{s=1}^k z_{t_s}} \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in R^k} \mu_{j_1} \cdots \mu_{j_k}. \quad (12)$$

Заметим, что в силу линейной независимости системы $u_1, u_2, \dots, u_r$ последовательность $v_{t_1, \dots, t_k, j_1, \dots, j_k}$ является ненулевой ЛРП с характеристическим многочленом $F(x)$ при всех ненулевых наборах $(j_1, \dots, j_k) \in R^k$ и при всех

$\{t_1, \dots, t_k\} \subset \overline{1, r}$. Кроме того, согласно лемме 1 коэффициент $\mu_0 = 0$, поэтому справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left| N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \delta(\bar{z}) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2^r} \sum_{k=1}^r \sum_{\{t_1, \dots, t_k\} \subset \overline{1, r}} \left(\sum_{(j_1, \dots, j_k) \in R^k} |\mu_{j_1} \dots \mu_{j_k}| \right) \max_{v \in L_R(F), v \neq (0)} \left| \sum_{i=0}^{T(F)-1} \chi(v(i)) + \frac{2^\nu}{d} \right|. \end{aligned}$$

Используя теорему 1 и лемму 2, получим

$$\begin{aligned} & \left| N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \delta(\bar{z}) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2^r} \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right)^k \frac{2^\nu (d2^{n-1} - 1)}{d} 2^{\frac{m}{2}}, \end{aligned}$$

а значит, учитывая формулу бинома Ньютона, имеет место неравенство

$$\left| N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \delta(\bar{z}) \right| \leq \left(\left(\frac{1}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right)^r - \frac{1}{2^r} \right) \frac{2^\nu (d2^{n-1} - 1)}{d} 2^{\frac{m}{2}}.$$

Вычислим величину $\delta(\bar{z})$, определенную равенством (12). Представим ее следующим образом:

$$\delta(\bar{z}) = \frac{T(F)}{2^r} - \frac{2^\nu}{d2^r} \sum_{k=1}^r \sum_{\{t_1, \dots, t_k\} \subset \overline{1, r}} (-1)^{\sum_{s=1}^k z_{t_s}} \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j \right)^k.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$\delta(\bar{z}) = \frac{T(F)}{2^r} - \frac{2^\nu}{d2^r} \sum_{k=1}^r (-1)^{k \mathfrak{z}_{n-1}^K(0)} \sum_{\{t_1, \dots, t_k\} \subset \overline{1, r}} (-1)^{\sum_{s=1}^k z_{t_s}},$$

а значит,

$$\delta(\bar{z}) = \frac{T(F)}{2^r} - \frac{2^\nu}{d2^r} \sum_{(c_1, \dots, c_r) \neq \bar{0}} (-1)^{c_1(\mathfrak{z}_{n-1}^K(0) + z_1)} \dots (-1)^{c_r(\mathfrak{z}_{n-1}^K(0) + z_r)}.$$

Тогда

$$\delta(\bar{z}) = \frac{T(F)}{2^r} - \frac{2^\nu}{d2^r} \left(\sum_{c_1=0}^1 (-1)^{c_1(\mathfrak{z}_{n-1}^K(0) + z_1)} \right) \dots \left(\sum_{c_r=0}^1 (-1)^{c_r(\mathfrak{z}_{n-1}^K(0) + z_r)} \right) + \frac{2^\nu}{d2^r},$$

и в силу равенств (6)

$$\delta(\bar{z}) = \begin{cases} \frac{T(F)}{2^r} - \frac{2^\nu(2^r - 1)}{d2^r}, & \text{если } \bar{z} = (\chi_{n-1}^K(0), \dots, \chi_{n-1}^K(0)), \\ \frac{T(F)}{2^r} + \frac{2^\nu}{d2^r}, & \text{если } \bar{z} \neq (\chi_{n-1}^K(0), \dots, \chi_{n-1}^K(0)). \end{cases}$$

Учитывая, что $T(F) = 2^\nu(2^m - 1)/d$, получим $\delta(\bar{z}) = \omega(\bar{z})$. $\square$

Рассмотрим вопрос о появлении векторов $\bar{z}$ на произвольных отрезках старших координатных последовательностей ЛРП векторов.

Теорема 8. Если $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{2^n}$, $T(F) = 2^\nu T(\bar{F})$, $0 \leq \nu \leq n - 1$, $t = T(\bar{F})$, $u_1, u_2, \dots, u_r \in L_R(F)$ — линейно независимая система, K — координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$, $u_{n-1}^{(s)} = \chi_{n-1}^K(u_s)$, где $s = 1, 2, \dots, r$, $\bar{z} \in K^r$, $l \leq T(F)$, то справедлива оценка

$$\left| N_l(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \frac{l}{2^r} \right| \leq \left(\left(\frac{1}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right)^r - \frac{1}{2^r} \right) \left(\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{4t}{\pi} \right) + 1 \right) 2^{\frac{m}{2} + n + \nu - 1}.$$

Доказательство. С помощью равенств (6) получим равенство

$$N_l(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) = \sum_{i=0}^{l-1} \prod_{j=1}^r \left(\frac{1}{2} \sum_{c_j=0}^1 (-1)^{c_j(u_{n-1}^{(j)}(i) + z_j)} \right).$$

Тогда, по аналогии с доказательством теоремы 7, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} N_l(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \frac{l}{2^r} &= \\ &= \frac{1}{2^r} \sum_{(c_1, \dots, c_r) \neq \bar{0}} (-1)^{c_1 z_1 + \dots + c_r z_r} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{c_1 u_{n-1}^{(1)}(i) + \dots + c_r u_{n-1}^{(r)}(i)}. \end{aligned}$$

Оценим абсолютную величину левой части, разбивая правую часть на суммы по векторам $\bar{c}$, имеющим вес $k = 1, 2, \dots, r$:

$$\left| N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \frac{l}{2^r} \right| \leq \frac{1}{2^r} \sum_{k=1}^r \sum_{\{t_1, \dots, t_k\} \subset \overline{1, r}} \left| \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{\sum_{s=1}^k u_{n-1}^{(t_s)}(i)} \right|. \quad (13)$$

В силу (3), по аналогии с доказательством теоремы 7, справедливо равенство

$$\left| \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{\sum_{s=1}^k u_{n-1}^{(t_s)}(i)} \right| = \left| \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in R^k} \mu_{j_1} \dots \mu_{j_k} \sum_{i=0}^{l-1} \chi(v_{t_1, \dots, t_k, j_1, \dots, j_k}(i)) \right|,$$

поэтому

$$\left| \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{\sum_{s=1}^k u_{n-1}^{(t_s)}(i)} \right| \leq \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} |\mu_j| \right)^k \max_{v \in L_R(F), v \neq (0)} \left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(v(i)) \right|.$$

Из равенства (13), теоремы 1, леммы 5 и формулы бинома Ньютона следует, что

$$\begin{aligned} \left| N(\bar{z}, u_{n-1}^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(r)}) - \frac{l}{2^r} \right| &\leq \frac{1}{2^r} \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \left(\frac{2}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right)^k \times \\ &\quad \times \left(\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{4t}{\pi} \right) + 1 \right) 2^{\frac{m}{2} + n + \nu - 1} = \\ &= \left(\left(\frac{1}{\pi} \ln(2^{n-1}) + 1 \right)^r - \frac{1}{2^r} \right) \left(\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{4t}{\pi} \right) + 1 \right) 2^{\frac{m}{2} + n + \nu - 1}. \end{aligned}$$

□

Список литературы

1. Кузьмин А.С., Нечаев А.А. Линейные рекуррентные последовательности над кольцами Галуа. — Алгебра и логика, 1995, т. 34, № 2, с. 169–189.
2. Кузьмин А.С., Куракин В.Л., Нечаев А.А. Псевдослучайные и полилинейные последовательности. — Труды по дискретной математике, 1997, т. 1, с. 139–202.
3. Кузьмин А.С., Нечаев А.А. Линейные рекуррентные последовательности над кольцами Галуа. — Успехи матем. наук, 1993, т. 48, № 1, с. 167–168.
4. Куракин В.Л. Первая координатная последовательность линейной рекурренты максимального периода над кольцом Галуа. — Дискретная математика, 1994, т. 6, № 2, с. 88–100.
5. Кузьмин А.С. Распределение элементов на циклах линейных рекуррент над кольцами вычетов. — Успехи матем. наук, 1992, т. 47, № 6, с. 213–214.
6. Камловский О.В. Частотные характеристики линейных рекуррентных последовательностей над кольцами Галуа. — Матем. сборник, 2009, т. 200, № 4, с. 31–52.
7. Latthonen L., Ling S., Sole P., Zinoviev D. $\mathbb{Z}_8$ -Kerdock codes and pseudorandom binary sequences. — J. Complexity, 2004, v. 20, № 8, p. 318–330.

8. *Sole P., Zinoviev D.* The most significant bit of maximum-length sequences over $\mathbb{Z}_{2^l}$: autocorrelation and imbalance. — IEEE Trans. Inf. Theory, 2004, v. 50, № 8, p. 1844–1846.
9. *Sole P., Zinoviev D.* Distribution of r -patterns in the most significant bit of a maximum length sequence over $\mathbb{Z}_{2^l}$. — Lect. Notes Comp. Sci., 2005, v. 3486, p. 275–281.
10. *Fan S., Han W.* Random properties of the highest level sequences of primitive sequences over $\mathbb{Z}_{2^e}$. — IEEE Trans. Inf. Theory, 2003, v. 49, № 6, p. 1553–1557.
11. *Dai Z.-D., Ye D., Wang P., Fang G.* Distribution of r -patterns in the highest level of p -adic sequences over Galois rings. — Proc. Golomb symp., USC, 2002.
12. *Hu H., Feng D., Wu W.* Incomplete exponential sums over Galois rings with applications to some binary sequences derived from $\mathbb{Z}_{2^l}$. — IEEE Trans. Inf. Theory, 2006, v. 52, № 5, p. 2260–2265.
13. *Kuzmin A. S., Nechaev A. A.* Complete weight enumerators of generalized Kerdock code and related linear codes over Galois ring. — Discr. Appl. Math., 2001, v. 111, p. 117–137.
14. *Morgan M. D.* The distribution of second order linear recurrence sequences mod 2^m . — Acta Arith., 1998, v. 83, № 2, p. 181–195.
15. *Qi W., Zhou J.* Distribution of 0 and 1 in the highest level of primitive sequences over $\mathbb{Z}_{2^e}$. — Science in China (Series A), 1997, v. 40, № 6, p. 606–611.
16. *Амбросимов А. С.* О распределении мультиграмм в линейных рекуррентных последовательностях над кольцом вычетов. — Успехи матем. наук, 1993, т. 48, № 5, с. 157–158.
17. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: Наука, 1966, с. 800.
18. *Boztas S., Hammous R., Kumar P. V.* 4-phase sequences with near-optimum correlation properties. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1992, v. 38, № 3, p. 1101–1113.
19. *Sarwate D. V.* An upper bound on the aperiodic autocorrelation function for a maximal-length sequence. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1984, v. 30, p. 685–687.