Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Горшков, Исследование некоторых подклассов мультиаффинных, биюнктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций, *Матем. вопр. криптогр.*, 2016, том 7, выпуск 4, 51–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 09:49:29

**Исследование некоторых подклассов мультиаффинных,
биюнктивных, слабо положительных и слабо
отрицательных булевых функций**

С. П. Горшков

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 30.V.2016

Аннотация. Множества мультиаффинных (обозначается A), биюнктивных (или 2-КНФ, Bi), слабо положительных (или антихорновских, WP) и слабо отрицательных (или хорновских, WN) булевых функций порождают классы полиномиально решаемых систем уравнений. Изучены классы функций $A \cap B, Bi \cap B$, где B — множество бент-функций. Описаны множества возможных значений алгебраической степени нелинейности функций из классов A, Bi, WP, WN . Рассмотрены вопросы построения функций из классов WP, WN на основе функций от меньшего числа переменных.

Ключевые слова: бент-функции, мультиаффинные булевы функции, 2-КНФ, хорновские булевы функции

Investigation of some subclasses of multiaffine, bijunctive, weakly positive and weakly negative Boolean functions

S. P. Gorshkov

Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow

Abstract. Sets of multiaffine (denoted by A), bijunctive (2-CNF, Bi), weakly positive (or anti-Horn, WP) and weakly negative (or Horn, WN) Boolean functions generate classes of polynomially solvable systems of equations. We investigate functional classes $A \cap B, Bi \cap B$, where B is the set of bent functions. Sets of possible values of algebraic nonlinearity degree of functions from A, Bi, WP, WN are described. Problems of construction of functions from classes WP, WN by means of functions of smaller number of variables are considered.

Keywords: bent functions, multiaffine functions, 2-CNF, Horn Boolean functions

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2016, v. 7, № 4, pp. 51–66 (Russian)

© Академия криптографии Российской Федерации, 2016 г.

Основные обозначения и определения:

N — множество натуральных чисел,

V_n — n -мерное пространство булевых векторов, $n \in N$,

F_n — множество булевых функций от n переменных,

$\text{Sym}(n)$ — симметрическая группа степени n ,

S_n — симметрическая группа перестановок координат векторов из V_n , подгруппа $\text{Sym}(2^n)$, изоморфна $\text{Sym}(n)$,

Σ_n — группа сдвигов, является подгруппой S_{2^n} , состоит из преобразований $\tau_\beta(x) = x \oplus \beta$, где $x, \beta \in V_n$,

Q_n — группа Джевонса, являющаяся полупрямым произведением групп S_n и Σ_n , состоит из преобразований вида

$$s_{\pi, \beta}(x) = \tau_\beta(\pi(x)), \text{ где } \tau_\beta \in \Sigma_n, \pi \in S_n,$$

$[f(x_1, \dots, x_n)]_{\langle S_n \rangle}$ — класс эквивалентности булевых функций относительно группы S_n с представителем $f(x_1, \dots, x_n)$,

$[f(x_1, \dots, x_k)]_{\langle Q_k \rangle}$ — класс эквивалентности булевых функций относительно перестановок группы Джевонса с представителем f ,

$\deg(f(x_1, \dots, x_n))$ — алгебраическая степень нелинейности функции f .

Вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_n$ назовем *выполняющим вектором* функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. Множество всех выполняющих векторов функции f обозначим E_f . Значение $\|f\| = |E_f|$ называется *весом* функции.

О п р е д е л е н и е 1. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется:

- 1) *мультиаффинной*, если существует представление функции f в виде конъюнкции аффинных функций:

$$f \equiv \bigwedge_{i=1}^t (\alpha_{i1}x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{in}x_n \oplus a_{i0}), \quad (1)$$

где $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, t$, $j = 0, \dots, n$,

- 2) *биюнктивной*, если $f \equiv 1$ или существует представление функции f в виде следующей конъюнктивной нормальной формы (КНФ):

$$f \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^t x_{s_i}^{\alpha_i} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^q \left(x_{s_{j1}}^{\beta_{j1}} \vee x_{s_{j2}}^{\beta_{j2}} \right) \right), \quad (2)$$

где $\alpha_i, \beta_{j1}, \beta_{j2} \in \{0, 1\}$, $s_i, s_{j1}, s_{j2} \in \{1, \dots, k\}$, $i = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, q$,

- 3) *слабо положительной* (или *антихорновской*), если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде следующей КНФ:

$$f \equiv \bigwedge_{i=1}^t \left(x_{s_{i1}}^{\alpha_i} \vee x_{s_{i2}} \vee \dots \vee x_{s_{in_i}} \right), \quad (3)$$

где $\alpha_i \in 0, 1$, $\{n_i\} \leq n$, $\{s_{ij}\} \in \{1, \dots, n\}$, $j = 1, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, t$,

- 4) *слабо отрицательной* или *хорновской*, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде следующей КНФ:

$$f \equiv x \bigwedge_{i=1}^t \left(x_{s_{i1}}^{\alpha_i} \vee \bar{x}_{s_{i2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{in_i}} \right), \quad (4)$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $n_i \leq n$, $s_{ij} \in \{1, \dots, n\}$, $j = 1, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, t$.

Множества всех функций соответственно классов 1) – 4) обозначим A , Bi , WP , WN . Формулы (1), (2), (3), (4) для функций классов A , Bi , WP , WN соответственно будем называть *приведенными представлениями*.

Классы функций A, Bi, WP, WN будем еще называть *классами Шефера*.

Критерий слабой положительности (см. [2]): функция $f(x_1, \dots, x_n) \not\equiv 0$ является слабо положительной, если и только если для любых двух выполняющих векторов $\{\alpha, \beta\} \subseteq E_f$ этой функции справедливо включение

$$(\alpha \vee \beta) \in E_f.$$

Если для функций $f(x_1, \dots, x_n)$, $h(x_1, \dots, x_n)$ выполняется равенство $f \cdot h \equiv f$, то h называется *имплицентай* функции f .

1. О пересечении классов мультиаффинных и биюнктивных функций с классом бент-функций

Напомним некоторые понятия [3].

Скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ векторов $x = (x_1, \dots, x_n) \in V_n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in V_n$ находится по формуле

$$\langle x, y \rangle = \bigoplus_{i=1}^n x_i y_i.$$

Для всякого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_n$ определим величину

$$\Delta_\alpha^f = 2^{n-1} - \|f(x) \oplus \langle \alpha, x \rangle\|,$$

где $\|f(x) \oplus \langle \alpha, x \rangle\|$ — вес функции $f(x) \oplus \langle \alpha, x \rangle$.

Набор $\{\Delta_\alpha^f | \alpha \in V_n\}$ называется *статистической структурой* функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Числа Δ_α^f называются *коэффициентами статистической структуры* функции. При этом

$$\Delta_0^f = 2^{n-1} - \|f(x)\| \text{ и } \|f(x)\| = 2^{n-1} - \Delta_0^f.$$

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *бент-функцией* ([3, с. 260]), если

$$|\Delta_\alpha^f| = 2^{\frac{n}{2}-1} \text{ для всех } \alpha \in V_n.$$

Ясно, что необходимым условием того, что f — бент-функция, является четность n . Известно, что для всякого четного n существуют бент-функции. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — бент-функция, то ее вес может принимать только два значения:

$$\|f\| = 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}-1} \text{ или } \|f\| = 2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}-1},$$

т.е. бент-функции не являются равновероятными. Всякая бент-функция существенно зависит от всех своих переменных. Если $f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$ — бент-функция и L — невырожденное аффинное преобразование V_n , то $f(xL)$ — бент-функция.

Символом B обозначим множество бент-функций, B_n — множество бент-функций, зависящих от n переменных.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$A \cap B = [x_1 \cdot x_2]_{\langle Q_2 \rangle}.$$

Доказательство. Легко показать, что $A \cap B_2 = [x_1 \cdot x_2]_{\langle Q_2 \rangle}$.

Предположим, что существует мультиаффинная бент-функция $f(x_1, \dots, x_n)$, зависящая от $n \geq 4$ переменных (n — четное). Так как $f \in A$, то $\|f\| = 2^r, 0 \leq r \leq n-1$ (заметим, что f существенно зависит от n переменных). С другой стороны, $f \in B$, поэтому $\|f\| = 2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}-1}$. Выполняется равенство $2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}-1} = 2^r$, или

$$2^{n-1} = 2^{\frac{n}{2}-1} + 2^r. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что $\frac{n}{2} - 1 < r < n-1$. Из (5) следует, что

$$2^{\frac{n}{2}} = 1 + 2^{r-\frac{n}{2}+1}. \quad (6)$$

Слева в (6) четное число, а справа — нечетное. Полученное противоречие заканчивает доказательство теоремы. $\square$

Перейдем к рассмотрению множества $Bi \cap B$.

В [4] доказано, что если $n \geq 5$, $f \in Bi_n$ и f существенно зависит от n переменных, то

$$\|f\| = 0,5 \cdot 2^n + 1 \text{ или } \|f\| < 0,5 \cdot 2^n.$$

Существенно используя доказательство этой теоремы, получим более точную оценку.

Лемма 1. Если $n \geq 8$, $f \in Bi_n$ и f существенно зависит от n переменных, то

$$\|f\| = 2^{n-1} + 1 \text{ или } \|f\| < 0,44 \cdot 2^n. \quad (7)$$

Доказательство. По условию леммы $f \neq 0$ и существует $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_f$. Рассмотрим функцию $g(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x_1 \oplus \alpha_1 \oplus 1, \dots, x_n \oplus \alpha_n \oplus 1)$. Для этой функции имеем: $g(1, \dots, 1) = 1$, поэтому $g \in Bi \cap WP$. Кроме того, $\|g\| = \|f\|$. Далее считаем $f \in (Bi \cap WP)$.

Пусть (2) — минимальная КНФ для f . Если f имеет имплиценту вида x_i^β , то $\|f\| \leq 2^{n-1-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^n$ (если есть еще одна имплицента вида x_j^δ) или $\|f\| \leq 3 \cdot 2^{n-1-2} = \frac{3}{8} \cdot 2^n$ (если есть имплицента вида $x_j \vee x_l^\lambda$), что соответствует (7).

Далее считаем, что f не имеет имплицент вида x_i^β , а каждая из переменных $x_2, \dots, x_n$ в (2) входит не большее число раз, чем x_1 . Без ограничения общности можем считать, что (2) имеет вид

$$f \equiv \bigwedge_{i=1}^p (x_1 \vee x_{i+1}^{\beta_i}) \wedge \bigwedge_{j=1}^t (\bar{x}_1 \vee x_{s_j}) \wedge f'(x_2, \dots, x_n), \quad (8)$$

где $p \geq 0, t \geq 0$ (в случае $p = 0$ или $t = 0$ считаем, что соответствующие сомножители отсутствуют).

Обозначим $X_1 = \{x_2, \dots, x_p\}, X_2 = \{x_{s_1}, \dots, x_{s_t}\}$. Предположим, что $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, $x_2 \in X_1 \cap X_2$. Запись (8) не может содержать произведение $(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$, так как $(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) \equiv x_2$. Пусть f содержит произведение $(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$, при этом $(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2) \equiv (x_1 \oplus x_2 \oplus 1)$. Если f' имеет элементарную имплиценту вида $(x_{r_1} \vee x_{r_2}^\delta)$, где $r_1 > 2, r_2 > 2$, то $\|f\| \leq 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-2-2} = \frac{3}{8} \cdot 2^n$ и лемма верна. В случае когда в f' имеется элементарная имплицента с переменной x_2 , опять просто показывается, что $\|f\| \leq \frac{3}{8} \cdot 2^n$.

Далее считаем, что $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Рассмотрим случай $f' \equiv 1$, тогда $X_1 \cup X_2 = \{x_2, \dots, x_n\}$. При этом

$$\|f\| = 2^p + 2^{n-p}.$$

Если $p = 0$ или $p = n - 1$, то

$$\|f\| = 1 + 2^{n-1}.$$

В случае $1 \leq p < n - 1$, $n \geq 6$

$$\|f\| \leq 2 + 2^{n-2} < 0,3 \cdot 2^n. \quad (9)$$

Ниже полагаем $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $f' \neq 1$. Пусть $p = n - 1, t = 0$. Тогда f имеет имплиценту вида

$$f_1 \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} (x_1 \vee x_{i+1}^{\beta_i}) \right) \wedge (x_m^\delta \vee x_r^\varepsilon), \quad \text{где } m \geq 2, \quad r \geq 2.$$

В этом случае $\|f_1\| \leq 2^{n-1} + 1 - 2^{n-3}$ и $\|f\| \leq \|f_1\| < 0,4 \cdot 2^n$ при $n \geq 6$. Аналогично рассматривается случай $p = 0, t = n - 1$. Если $p + t = n - 1$, $p \geq 1, t \geq 1$, то верно (9).

Далее считаем, что $p + t \leq n - 2$.

1) $p \geq 1, t \geq 1, p + t \geq 3$. В этом случае

$$\|f\| \leq \|(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)\| = 6 \cdot 2^{n-4} = 0,375 \cdot 2^n;$$

здесь функцию $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)$ рассматриваем как функцию от n переменных.

2) $p \geq 1, t \geq 1, p + t < 3$ или $p = t = 1$. При таких условиях каждая переменная в (2) встречается не более двух раз. Так как функция f существенно зависит не менее чем от четырех переменных, то найдутся переменные x_4, x_5 , которые не содержатся в X_1, X_2 . Рассмотрим все возможные случаи:

$$\|f\| \leq \|(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_4 \vee x_5)\| = \frac{3}{8} \cdot 2^n = 0,375 \cdot 2^n,$$

$$\|f\| \leq \|(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_4)(x_3 \vee x_5)\| = \frac{3}{8} \cdot 2^n = 0,375 \cdot 2^n,$$

$$\|f\| \leq \|(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_3 \vee x_5)\| = \frac{9}{32} \cdot 2^n < 0,3 \cdot 2^n,$$

$$\|f\| \leq \|(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee x_5)\| = \frac{3}{16} \cdot 2^n < 0,2 \cdot 2^n.$$

3) $p = 1, t = 0$ (случай $p = 0, t = 1$ рассматривается аналогично). Так как x_1 в (2) встречается один раз, а все остальные переменные встречаются не чаще, чем x_1 , то все переменные в (2) встречаются по одному разу. Так как $n \geq 6$, то

$$\|f\| \leq \|(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)(x_5 \vee x_6)\| = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 2^n < 0,43 \cdot 2^n.$$

4) $p = 2, t = 0$. Если некоторая переменная входит в (2) в разных степенях, то доказательство сводится к случаям 1) или 2). Далее считаем, что все переменные входят в формулу не более двух раз и что каждая переменная входит в одной степени. Так как переменные, входящие в нулевой степени (литералы вида $\bar{x}_i$), можно инвертировать, то без ограничения общности можно считать, что функция f является монотонной.

Пусть r переменных входят в (2) по два раза, а l переменных входят в (2) по одному разу ($r + l = n$). Всего вхождений переменных $2r + l$, а число элементарных сомножителей в (2) равно $v = \frac{2r+l}{2} = r + \frac{l}{2}$ (отсюда, в частности, следует, что $l \geq 0$ — четное число). Если $l = 0$, то $v = n \geq 8$. Выберем в (2) сомножитель $(x_1 \vee x_2)$ и удалим из (2) сомножители, содержащие x_1 или x_2 . Всего сомножителей останется $v - 3$. Выберем еще один сомножитель вида $(x_3 \vee x_4)$, после этого можем выбрать еще один сомножитель вида $(x_5 \vee x_6)$ и в итоге попадаем в условия п. 3). Нетрудно показать, что и в остальных случаях можно выбрать три сомножителя от разных переменных.

5) $3 \leq p \leq n - 2, t = 0$. При этом возможны два варианта. В первом случае функция f имеет имплиценту вида $\bigwedge_{i=1}^p (x_1 \vee x_{i+1}^{\beta_i}) \wedge (x_p \vee x_{p+1})$. Тогда (учитываем, что $p \geq 3$)

$$\|f\| \leq \frac{3}{4} \cdot 2^{n-p-1} \cdot (2^p + 1) \leq \frac{27}{64} \cdot 2^n < 0,43 \cdot 2^n.$$

Во втором случае функция f имеет одну из двух имплицент:

5.1) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_5)$ — тогда

$$\|f\| \leq \|(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_5)\| = \frac{14}{32} \cdot 2^n < 0,44 \cdot 2^n.$$

5.2) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_5)$ — тогда

$$\|f\| \leq \|(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_5)\| = \frac{13}{32} \cdot 2^n < 0,41 \cdot 2^n.$$

Лемма доказана. $\square$

Замечание 1. А. В. Тарасов сообщил автору о полученном им более сильном утверждении: если биюнктивная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех $n \geq 5$ переменных, то либо $\|f(x_1, \dots, x_n)\| = 2^{n-1} + 1$, либо $\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq 0,375 \cdot 2^{n-1} + 3$.

Теорема 2. *Справедливо соотношение*

$$Bi \cap B = [x_1 \cdot x_2]_{\langle Q_2 \rangle} \cup [x_1 \vee x_2]_{\langle Q_2 \rangle}.$$

Доказательство. Достаточно ограничиться рассмотрением только представителей биюнктивных функций в классе эквивалентности относительно группы Джевонса, причем таким представителем всегда может быть функция из множества $Bi \cap WP$.

При $n = 2$ имеем $Bi_2 \cap B_2 = [x_1 \cdot x_2]_{\langle Q_2 \rangle} \cup [x_1 \vee x_2]_{\langle Q_2 \rangle}$.

Для $n = 4$ достаточно рассмотреть только представителей биюнктивных функций в классе эквивалентности относительно группы Джевонса, имеющих вес 6 или 10 и существенно зависящих от всех переменных. Согласно [2], таких функций восемь. Все они не являются бент-функциями.

Для $n = 6$ достаточно рассмотреть только представителей биюнктивных функций в классе эквивалентности относительно группы Джевонса, имеющих вес 28 или 36 и существенно зависящих от всех переменных. А. В. Тарасовым с помощью компьютера были найдены все биюнктивные функции от 6 переменных. Среди них выявлено 5 функций, существенно зависящих от 6 переменных и имеющих вес 28 или 36. Все они не являются бент-функциями.

Перейдем к рассмотрению случая $n \geq 8$. Бент-функция может иметь вес

$$\|f\| = 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}-1} \text{ или } \|f\| = 2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}-1}.$$

Ввиду леммы при $n \geq 8$ биюнктивная функция не может иметь вес $\|f\| = 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}-1}$.

Заметим, что если $n \geq 8$, $f \in B_n$ и $\|f\| = 2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}-1}$, то

$$\|f\| \geq 0,46 \cdot 2^n.$$

Это свойство следует из очевидных выкладок: при $n \geq 8$

$$\|f\| = 2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}-1} = 2^n \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}} \right) \geq 2^n \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\frac{8}{2}+1}} \right) > 0,46 \cdot 2^n,$$

т. е. $0,46 \cdot 2^n < \|f\| < 0,5 \cdot 2^n$. Но если f — биюнктивная функция, существенно зависящая от $n \geq 8$ переменных, и $\|f\| \neq 2^{n-1} + 1$, то $\|f\| < 0,44 \cdot 2^n$. Поэтому $Bi_n \cap B_n = \emptyset$ при $n \geq 8$. Теорема доказана. $\square$

Для пересечений класса бент-функций с классами слабо положительных и слабо отрицательных функций приведем лишь следующие простые утверждения.

Утверждение 1. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит $WP \cap B$ тогда и только тогда, когда $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in WN \cap B$.

Утверждение 2. Верно соотношение

$$WP \cap B \cap F_2 = [x_1 \cdot x_2]_{\langle Q_2 \rangle} \cup [x_1 \vee x_2]_{\langle S_2 \rangle} \cup [x_1 \vee \bar{x}_2]_{\langle S_2 \rangle}.$$

Утверждение 3. Верны соотношения

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \oplus (x_3 \vee x_4) \in WP \cap B, \quad x_1 x_2 \oplus x_3 x_4 \oplus 1 \in WN \cap B.$$

2. Об алгебраической степени нелинейности функций из классов Шефера

Утверждение 4. При любом $n \geq 1$ и любом $r \in \{1, \dots, n\}$ существует такая мультиаффинная функция $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящая от всех переменных, что $\deg f = r$.

Доказательство. При $r = 1$ искомая функция имеет вид $f \equiv x_1 \oplus \dots \oplus x_n$. В случае $r \geq 2$ функция $f \equiv (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-r}) \cdot x_{n-r+1} \cdot \dots \cdot x_n$ удовлетворяет условиям теоремы. $\square$

Теорема 3.

- 1) При $n \geq 3$ не существует бионктивных (слабо положительных, слабо отрицательных) булевых функций, существенно зависящих от всех переменных и имеющих алгебраическую степень нелинейности 1.
- 2) При любом $n \geq 2$ и любом r , $\frac{n}{2} \leq r \leq n$, существует такая бионктивная (слабо положительная, слабо отрицательная) функция $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящая от всех переменных, что $\deg f = r$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $n \geq 3$ существует бионктивная функция $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящая от всех переменных и имеющая алгебраическую степень нелинейности 1. Тогда функция f имеет вид $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus \alpha$. Если $n = 3$, то $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \alpha$. При любом $\alpha \in \{0, 1\}$ эта функция не является бионктивной, поскольку для нее не выполняется критерий бионктивности [1, 6].

В случае $n > 3$ рассмотрим функцию $g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, 0, \dots, 0)$. С одной стороны, функция g биюнктивна как подфункция биюнктивной функции, но функция g имеет вид $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \beta$, поэтому $g \notin Bi$, $f \notin B$. Доказательство первой части теоремы для слабо положительных и слабо отрицательных функций проводится аналогично, при этом используется свойство $(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \alpha) \notin (WP \cup WN)$, где $\alpha \in \{0, 1\}$.

Пусть $n \geq 2$ и $\frac{n}{2} \leq r \leq n$. При $r = \frac{n}{2}$ рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_1 \oplus x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus x_4 \oplus 1) \dots (x_{2(n-r)-1} \oplus x_{2(n-r)} \oplus 1).$$

В случае $r = n$ полагаем

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_1 \cdot \dots \cdot x_n,$$

а при $\frac{n}{2} < r < n$ рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &\equiv \\ &\equiv (x_1 \oplus x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus x_4 \oplus 1) \dots (x_{2(n-r)-1} \oplus x_{2(n-r)} \oplus 1) \cdot x_{2(n-r)+1} \cdot \dots \cdot x_n. \end{aligned}$$

Так как $(x_1 \oplus x_2 \oplus 1) \equiv (x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2)$, то $f \in (Bi \cap WP \cap WN)$. Функция f существенно зависит от всех переменных. Алгебраическая степень нелинейности функции f равна

$$\deg f = n - r + (n - 2(n - r)) = r.$$

Теорема доказана. □

3. О построении слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций

В [5, теорема 3] доказано следующее утверждение: при любом виде записи слабо положительных (слабо отрицательных) функций в любом конечном алфавите A для любого полинома $p(n)$ можно указать такое $n_0 \in N$ (которое зависит от вида записи, алфавита A и от полинома $p(n)$), что при $n \geq n_0$ существуют функции из $WP_n(WN_n)$, длина записи которых превышает $p(n)$.

Для любой мультиаффинной или биюнктивной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ (в отличие от слабо положительных и слабо отрицательных) существует короткая запись (запись не длиннее $p(n)$, где p — некоторый фиксированный полином): такой короткой записью для этих функций является приведенное представление.

Поэтому актуальной является задача построения слабо положительных и слабо отрицательных функций, имеющих короткую запись. При этом особый интерес представляют равновероятные функции.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется дважды слабо положительной ([6, с. 373]), если $f \in WP, \bar{f} \in WP$. Множество дважды слабо положительных функций обозначим $2WP$.

Теорема 4. Пусть

$$f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_t) \equiv f_1(x_1, \dots, x_k) \oplus f_2(y_1, \dots, y_t), \quad (10)$$

где $k \geq 1, t \geq 1$, и функция f существенно зависит от всех своих переменных. Тогда $f \in WP$, если и только если

$$f_1(x_1, \dots, x_k) \equiv \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k, \quad f_2(y_1, \dots, y_t) \equiv y_1 \vee \dots \vee y_t \quad (11)$$

или

$$f_1(x_1, \dots, x_k) \equiv x_1 \vee \dots \vee x_k, \quad f_2(y_1, \dots, y_t) \equiv \bar{y}_1 \cdot \dots \cdot \bar{y}_t. \quad (12)$$

Замечание 2. Случаи (11) и (12) соответствуют одной и той же функции f . Действительно, пусть $x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_t)$, тогда для (11) имеем:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\equiv \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k \oplus y_1 \vee \dots \vee y_t \equiv \\ &\equiv (f_1(x) \oplus 1) \oplus f_2(y) \oplus 1 \equiv x_1 \vee \dots \vee x_k \oplus y_1 \vee \dots \vee y_t \oplus 1 \equiv \\ &\equiv f_1(x) \oplus (f_2(y) \oplus 1) \oplus 1 \equiv \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k \oplus \bar{y}_1 \cdot \dots \cdot \bar{y}_t \oplus 1 \equiv \\ &\equiv (f_1(x) \oplus 1) \oplus (f_2(y) \oplus 1) \equiv x_1 \vee \dots \vee x_k \oplus \bar{y}_1 \cdot \dots \cdot \bar{y}_t. \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. Доказательство теоремы 5 проведем по следующему плану. Вначале покажем, что если $f \in WP$, то $f_1 \in WP, f_2 \in WP$. Более того, функции f_1 и f_2 оказываются дважды слабо положительными. Далее, используя свойства дважды слабо положительных функций, покажем, что функция f имеет вид (11) или (12).

Пусть функция f имеет вид (10) и $f \in WP$. Так как $f \in WP$, то любая функция, получаемая из f фиксацией переменных, тоже слабо положительна. Предположим, что $f_1 \notin WP$, тогда существуют такие векторы $\alpha, \beta \in V_k$, что $f_1(\alpha) = f_1(\beta) = 1, f_1(\alpha \vee \beta) = 0$. Так как f_2 существенно зависит от своих переменных, то существует такой вектор $\gamma \in V_t$, что $f_2(\gamma) = 0$. Тогда для векторов $(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma) \in V_{k+t}$ справедливы равенства

$$f(\alpha, \gamma) = 1, f(\beta, \gamma) = 1, f(\alpha \vee \beta, \gamma) = 0,$$

и по критерию слабой положительности $f \notin WP$. Значит, $f_1 \notin WP$.

Осталось рассмотреть случай, когда $f \in WP$, $f_1 \in WP$, $f_2 \in WP$. Пусть $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_t) \in V_t$. Под записью вида $f(x, \delta)$ понимаем функцию $f(x_1, \dots, x_k, \delta_1, \dots, \delta_t)$. Существует такой вектор $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_t) \in V_t$, что $f_2(\delta) = 1$. Функция $f(x, \delta)$ имеет вид $f(x, \delta) \equiv f_1(x) \oplus 1 \in WP$. Следовательно, $f_1 \in 2WP$ (аналогично доказывается, что $f_2 \in 2WP$).

Далее потребуются результаты из [6, с. 378–381] о строении дважды слабо положительных функций.

Пусть a и b — целые неотрицательные числа. Определим булеву функцию $h_b(x_1, \dots, x_a, x_{a+1}, \dots, x_{a+b})$ по правилу

$$h_b(x_1, \dots, x_a, x_{a+1}, \dots, x_{a+b}) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } a = b = 0, \\ \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_b, & \text{если } a = 0, b > 0, \\ x_1 \vee \dots \vee x_a, & \text{если } a > 0, b = 0, \\ \bigwedge_{i=1}^b (x_1 \vee \dots \vee x_a \vee \bar{x}_{a+i}), & \text{если } a > 0, b > 0. \end{cases}$$

В [6] доказано, что для любой дважды слабо положительной функции $f_1(x_1, \dots, x_k)$, $k \geq 1$, существенно зависящей от всех переменных $x_1, \dots, x_k$, имеется единственное представление вида

$$\begin{aligned} f_1 \equiv & h_{d_1}(x_{s_1}, \dots, x_{s_{d_1}}) \wedge h_{d_3-d_2}(x_{s_{d_1+1}}, \dots, x_{s_{d_2}}, x_{s_{d_2+1}}, \dots, x_{s_{d_3}}) \wedge \\ & \wedge h_{d_5-d_4}(x_{s_{d_1+1}}, \dots, x_{s_{d_2}}, x_{s_{d_3+1}}, \dots, x_{s_{d_4}}, x_{s_{d_4+1}}, \dots, x_{s_{d_5}}) \wedge \\ & \dots \dots \dots \wedge h_{k-d_{2m}}(x_{s_{d_1+1}}, \dots, x_{s_{d_2}}, \dots, x_{s_{d_{2m}+1}}, \dots, x_{s_k}), \end{aligned} \quad (14)$$

где $m \geq 1$, $d_1 = k$ или $0 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_{2m-1} < d_{2m} \leq k$, $s_1 < \dots < s_{d_1}$, $s_{d_1+1} < \dots < s_{d_2}$, $s_{d_2+1} < \dots < s_k$.

Пусть функция f_1 из (10) имеет вид (14), а функция f_2 из (10) имеет вид

$$\begin{aligned} f_2 \equiv & h_{e_1}(y_{w_1}, \dots, y_{w_{e_1}}) \wedge h_{e_3-e_2}(y_{w_{e_1+1}}, \dots, y_{w_{e_2}}, y_{w_{e_2+1}}, \dots, y_{w_{e_3}}) \wedge \\ & \wedge h_{e_5-e_4}(y_{w_{e_1+1}}, \dots, y_{w_{e_2}}, y_{w_{e_3+1}}, \dots, y_{w_{e_4}}, y_{w_{e_4+1}}, \dots, y_{w_{e_5}}) \wedge \\ & \dots \dots \dots \wedge h_{t-e_{2p}}(y_{w_{e_1+1}}, \dots, y_{w_{e_2}}, \dots, y_{w_{e_{2p}+1}}, \dots, y_{w_t}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $p \geq 1$, $e_1 = t$ или $0 \leq e_1 \leq e_2 < \dots < e_{2p-1} < e_{2p} \leq t$, $w_1 < \dots < w_{e_1}$, $w_{e_1+1} < \dots < w_{e_2}$, $w_{e_{2p}+1} < \dots < w_t$.

Заметим, что в записи (14) и (15) каждое переменное входит только в нулевой степени или только в первой степени (литералы вида x_i). Пусть в f_1 входят переменные в разных степенях. Будем считать, что x_i входит в (14) в первой степени, а x_j — в нулевой степени. Тогда некоторой фиксацией переменных в f_1 можем получить подфункцию $f_1' \equiv x_i \vee \bar{x}_j$ или $f_1' \equiv x_i \cdot \bar{x}_j$. Некоторой фиксацией переменных в f_2 можем получить подфункцию $f' \equiv y_1'$. При этих фиксациях получим одну из двух подфункций функции f :

$$f' \equiv (x_i \vee \bar{x}_j) \oplus y_1' \text{ или } f' \equiv x_i \bar{x}_j \oplus y_1'. \quad (16)$$

Нетрудно показать, что в зависимости от вида подфункции (16) всегда можем так зафиксировать x_i или x_j , что получим функцию $f'' \equiv x_l \oplus y_1$ (где $l \in \{i, j\}$). Эта функция не является слабо положительной, поэтому в (14) (и аналогично в (15)) не могут входить переменные в разных степенях.

Далее считаем, что в функции f_1, f_2 все переменные входят в одинаковых степенях. Если в (14) все переменные входят только в нулевой степени, то $f_1 \equiv \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k$, а если в (14) все переменные входят только в первой степени, то $f_1 \equiv x_1 \vee \dots \vee x_k$. Если в (14) и (15) все переменные входят только в первых степенях, то

$$f \equiv x_1 \vee \dots \vee x_k \oplus y_1 \vee \dots \vee y_t.$$

Такая функция f не слабо положительная, поскольку $f(1_k, 0_t) = f(0_k, 1_t) = 1$, $f(1_k, 1_t) = 0$.

Так как

$$(x_1 \vee \dots \vee x_k) \oplus (y_1 \vee \dots \vee y_t) \equiv (\bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k) \oplus (\bar{y}_1 \cdot \dots \cdot \bar{y}_t),$$

то в (14) и (15) все переменные не могут входить только в нулевых степенях.

Осталось рассмотреть только случаи (11) и (12). Пусть выполняется (11); покажем, что $f \in WP$. Выберем такие векторы $\alpha, \beta \in V_k, \delta, \varepsilon \in V_t$, что $f(\alpha, \delta) = f(\beta, \varepsilon) = 1$. Если $f_1(\alpha) = f_1(\beta) = 0$, то $f_1(\alpha \vee \beta) = 0$, $f_2(\delta) = f_2(\varepsilon) = 1$, $f_2(\delta \vee \varepsilon) = 1$. Поэтому $f(\alpha \vee \beta, \delta \vee \varepsilon) = 1$. Аналогично показывается, что свойство слабой положительности выполняется при $f_1(\alpha) = f_1(\beta) = 1$ и при $f_1(\alpha) \neq f_1(\beta)$. Таким же способом рассматривается случай (12). Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Не существует слабо положительных функций $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_t, z_1, \dots, z_l)$, где $k \geq 1, t \geq 1, l \geq 1$, существенно*

зависящих от всех своих переменных и таких, что

$$f(x, y, z) \equiv f_1(x) \oplus f_2(y) \oplus f_3(z).$$

Доказательство. Обозначим $f_{12}(x, y) \equiv f_1(x) \oplus f_2(y)$, при этом $f(x, y, z) \equiv f_{12}(x, y) \oplus f_3(z)$. По теореме 5

$$f_{12}(x, y) \equiv \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k \cdot \bar{y}_1 \cdot \dots \cdot \bar{y}_t \text{ или } f_{12}(x, y) \equiv x_1 \vee \dots \vee x_k \vee y_1 \vee \dots \vee y_t. \quad (17)$$

Существует такой вектор $\alpha \in V_l$, что $f_3(\alpha) = 0$. Для функции $f(x, y, \alpha) \equiv f_{12}(x, y)$ должно выполняться (11) или (12), но при этом невозможно (17). Следствие доказано. $\square$

Теорема 5. Пусть

$$g(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_t) \equiv g_1(x_1, \dots, x_k) \oplus g_2(y_1, \dots, y_t),$$

где $k \geq 1, t \geq 1$, и функция g существенно зависит от всех своих переменных. Тогда $g \in WN$, если и только если

$$g_1(x_1, \dots, x_k) \equiv x_1 \cdot \dots \cdot x_k, g_2(y_1, \dots, y_t) \equiv \bar{y}_1 \vee \dots \vee \bar{y}_t$$

или

$$g_1(x_1, \dots, x_k) \equiv \bar{x}_1 \vee \dots \vee \bar{x}_k, g_2(y_1, \dots, y_t) \equiv y_1 \cdot \dots \cdot y_t.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$g(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_t) \in WN \Leftrightarrow g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_t) \in WP.$$

Возможные случаи $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_t) \in WP$ описаны в теореме 5, откуда следует справедливость теоремы 6. $\square$

Лемма 2. Вес функции (13) равен

$$\|f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_t)\| = 2^{k+t} - 2^k - 2^t + 2.$$

Доказательство. Легко видеть, что функция f равна 1, если

- 1) $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_t) = 0_{k+t}$ или
- 2) $(x_1, \dots, x_k) \neq 0_k$ и $(y_1, \dots, y_t) \neq 0_t$.

Поэтому $\|f\| = 1 + (2^k - 1)(2^t - 1) = 2^{k+t} - 2^k - 2^t + 2$. $\square$

Следствие 2. Функция вида (13) является равновероятной, если и только если $k = 1$ или $t = 1$.

Доказательство. Пусть $t = 1$, тогда $\|f\| = 2^{(k+1)-1}$. Заметим, что в случае $k = 1$ или $t = 1$ функция f является равновероятной как функция, равная сумме по модулю 2 двух функций, зависящих от разных переменных, причем одна из этих функций равновероятная.

Предположим, что $k \geq 2, t \geq 2$. Тогда $2^{k-1} + 2^{t-1} - 1$ — нечетное число и $2^{k-1} + 2^{t-1} - 1 \neq 2^{k+t-2}$, $2^k + 2^t - 2 \neq 2^{k+t-1}$. Поэтому функция f не является равновероятной.

Пусть $k + t = n$ ($k \geq 1, t \geq 1$) фиксировано. Символом R_n обозначим множество функций, которые могут быть получены из всех функций вида (13) перестановкой переменных, $r_n = |R_n|$. $\square$

Разрядом называется класс эквивалентности булевых функций относительно перестановки переменных.

Лемма 3. Число r_n находится по формуле

$$r_n = 2^{n-1} - 1. \quad (18)$$

Доказательство. Множество R_n разбивается на разряды

$$R_n = [f^{(1)}]_{\langle S_n \rangle} \cup \dots \cup [f^{(u)}]_{\langle S_n \rangle}. \quad (19)$$

В каждом разряде из R_n можем выбрать представитель вида (15), для которого $k \leq t$, поэтому число разрядов u равно $u = \lfloor n/2 \rfloor$, где $\lfloor n/2 \rfloor$ — целая часть числа $n/2$. Далее считаем, что в представителях классов (см. (19)) индекс i равен соответствующему k .

Если $k < t$, то $|[f^{(k)}]_{\langle S_n \rangle}| = \binom{n}{k}$. В случае $k = t$ нетрудно показать, что $|[f^{(n/2)}]_{\langle S_n \rangle}| = 1/2 \cdot \binom{n}{n/2}$. Отсюда следует (18). $\square$

Очевидна следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $f_1(x_1, \dots, x_k) \not\equiv 0, f_2(y_1, \dots, y_t) \not\equiv 0$, тогда

$$f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_t) \equiv f_1(x_1, \dots, x_k) \cdot f_2(y_1, \dots, y_t) \in WP,$$

если и только если $f_1(x) \in WP, f_2(y) \in WP$.

Символом M обозначим множество монотонных булевых функций.

Теорема 7. Пусть

$$f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_t) \equiv f_1(x_1, \dots, x_k) \vee f_2(y_1, \dots, y_t),$$

$f_1 \not\equiv 1, f_2 \not\equiv 1$. Тогда $f \in WP$, если и только если

$$f_1 \in WP, f_2 \in M \text{ или } f_1 \in M, f_2 \in WP.$$

Доказательство. Предположим, что $f_1 \in WP, f_2 \in M$, что функция f_1 имеет приведенное представление (3), а f_2 можно записать в виде

$$f_2 \equiv \bigwedge_{j=1}^q (y_{r_{j1}} \vee \dots \vee y_{r_{jt_j}}).$$

Для любых булевых функций g_i и h_j справедливо тождество

$$\left(\bigwedge_i g_i \right) \vee \left(\bigwedge_j h_j \right) \equiv \bigwedge_i \bigwedge_j (g_i \vee h_j). \quad (20)$$

Из приведенных рассуждений следует, что $f \in WP$.

Пусть теперь $f \in WP$. Будем считать, что f_1 и f_2 записаны сокращенными КНФ. Нетрудно видеть, что если при этом записать f в соответствии с (3), то получится сокращенная КНФ функции f . Отсюда вытекает, что $f_1 \in WP, f_2 \in M$ или $f_1 \in M, f_2 \in WP$. $\square$

Автор выражает признательность А. В. Тарасову за ценные замечания.

Список литературы

- [1] Schaefer T., "Complexity of satisfiability problems", *Proc. 10 Annu. ACM Symp. Theory Comput. Machin.* (1978), 216–226.
- [2] Гизунов С. А., Носов В. А., "О классификации всех булевых функций четырех переменных по классам Шеффера", *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, **2**:3 (1995), 440–467.
- [3] Глухов М. М., Шишков А. Б., *Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов*, СПб.: Лань, 2012.
- [4] Тарасов А. В., "О свойствах функций, представленных в виде 2-КНФ", *Дискретная математика*, **13**:4 (2001), 99–115.
- [5] Горшков С. П., "О некоторых свойствах слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций", *Прикладная дискретная математика*, **20** (июнь 2013), 5–13.
- [6] Горшков С. П., "Применение теории NP-полных задач для оценки сложности решения систем булевых уравнений", *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, **2**:3 (1995), 325–398.