Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Меженная, В. Г. Михайлов, Об асимптотической нормальности чисел появлений знаков в неравновероятной мультициклической случайной последовательности по модулю 4, *Матем. вопр. криптогр.*, 2016, том 7, выпуск 4, 81–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:20:52

**Об асимптотической нормальности чисел появлений
знаков в неравновероятной мультициклической
случайной последовательности по модулю 4**

Н. М. Меженная¹, В. Г. Михайлов²

¹ МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва

² Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Получено 19.11.2016

Аннотация. Указаны условия асимптотической нормальности вектора частот появления знаков на цикле неравновероятной мультициклической случайной последовательности по модулю 4.

Научные исследования Н. М. Меженной поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, проект 14-01-00318а.

Ключевые слова: неравновероятная мультициклическая случайная последовательность, частоты знаков, асимптотическая нормальность

**On the asymptotic normality of frequencies of values in the
non-equiprobable multi-cyclic random sequence modulo 4**

N. M. Mezhenaya¹, V. G. Mikhailov²

¹ Bauman State Technical University, Moscow

² Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow

Abstract. For the frequencies of values on the cycle of the non-equiprobable multi-cyclic random sequence modulo 4 we obtain the conditions of asymptotic normality.

Keywords: non-equiprobable multi-cyclic random sequence, frequencies of values, asymptotic normality

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2016, v. 7, № 4, pp. 81–94 (Russian)

© Академия криптографии Российской Федерации, 2016 г.

1. Введение

Пусть $n_1, \dots, n_r \geq 2$ — взаимно простые натуральные числа. Мультициклическая случайная последовательность $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ со значениями в $\{0, \dots, M-1\}$ образуется по правилу

$$Z_t = \sum_r X_{t(n_j)}^{(j)} \bmod M, \quad t = 0, 1, \dots,$$

где $(X_0^{(j)}, \dots, X_{n_j-1}^{(j)})$, $j = 1, \dots, r$, — независимые наборы независимых случайных величин, принимающих значения в множестве наименьших неотрицательных вычетов по модулю M (случайные величины с одним и тем же значением j одинаково распределены), а $t(n_j) = t - [t/n_j]n_j$. Отрезок $Z(r) = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n_1 \dots n_r - 1})$ будем называть *циклом* мультициклической последовательности $\{Z_t\}$. Последовательности такого вида были введены в [1] в связи с исследованием одного генератора псевдослучайных чисел над полем $GF(2)$ (генератора Пола).

Свойства распределения числа единиц на цикле мультициклической последовательности над $GF(2)$ исследовались в работах [2–4].

Нас интересует случай $M = 4$. Целью исследования является изучение асимптотического поведения при $n_1, n_2, \dots, n_r \rightarrow \infty$ совместного распределения случайных величин $\varkappa_{a_2 a_1}(r)$ — количеств чисел в последовательности $Z(r)$, имеющих двоичную запись $a_2 a_1$, где $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$.

Нетрудно показать (см. [5]), что система уравнений

$$\varkappa_{a_2 a_1}(r) = \frac{1}{4} (n_1 n_2 \dots n_r + (-1)^{a_1} \beta(r) + 2(-1)^{a_2} \beta_{a_1}(r)), \quad a_1, a_2 \in \{0, 1\}, \quad (1)$$

однозначно определяет величины $\beta(r)$, $\beta_0(r)$, $\beta_1(r)$ и сводит задачу исследования совместного распределения величин $\varkappa_{a_2 a_1}(r)$ к изучению распределения вектора $(\beta(r), \beta_0(r), \beta_1(r))^T$ (это вектор-столбец).

В [5] было показано, что если распределение знаков $X_k^{(j)}$ является равномерным, то при $n_1 \dots n_r \rightarrow \infty$ величина $(n_1 \dots n_r)^{-1/2} \beta(r)$ и вектор $2^{r/2} (n_1 \dots n_r)^{-1/2} (\beta_0(r), \beta_1(r))$ асимптотически независимы, распределение величины $(n_1 \dots n_r)^{-1/2} \beta(r)$ сходится к распределению произведения r независимых стандартных нормальных случайных величин, а распределение вектора $2^{r/2} (n_1 \dots n_r)^{-1/2} (\beta_0(r), \beta_1(r))$ сходится к распределению вектора $(\varrho_r \cos \phi, \varrho_r \sin \phi)$, где случайная величина ϱ_r представляется как произведение r независимых случайных величин, имеющих распределение Рэлея с плотностью $f(x) = x e^{-x^2/2}$, $x \geq 0$, а ϕ имеет равномерное распределение на $[0, 2\pi]$.

Если же распределение знаков $X_k^{(j)}$ отличается от равномерного, то в типичных случаях при $n_1 n_2 \cdots n_r \rightarrow \infty$ и при подходящих центрировании и нормировке распределение вектора $(\beta(r), \beta_0(r), \beta_1(r))$ сходится к трехмерному нормальному распределению. Опишем эти случаи.

Введем обозначения

$$p_{a_2 a_1}^{(j)} = \mathbf{P}\{X_k^{(j)} = 2a_2 + a_1\}, \quad a_1, a_2 \in \{0, 1\},$$

$$b^{(j)} = (p_{00}^{(j)} + p_{10}^{(j)}) - (p_{01}^{(j)} + p_{11}^{(j)}), \quad b_a^{(j)} = p_{0a}^{(j)} - p_{1a}^{(j)}, \quad a \in \{0, 1\},$$

и определим матрицу $\mathbb{B}(r)$ и величины b^* , b_0^* , b_1^* формулами

$$B^{(j)} = \begin{pmatrix} b^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & b_0^{(j)} & -b_1^{(j)} \\ 0 & b_1^{(j)} & b_0^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}(r) = \begin{pmatrix} b^* & 0 & 0 \\ 0 & b_0^* & -b_1^* \\ 0 & b_1^* & b_0^* \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^r B^{(j)}. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть $r \geq 2$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}\beta(r) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E}\beta_0(r) & -\mathbf{E}\beta_1(r) \\ 0 & \mathbf{E}\beta_1(r) & \mathbf{E}\beta_0(r) \end{pmatrix} = n_1 n_2 \cdots n_r \mathbb{B}(r). \quad (3)$$

Следствие 1. Пусть $r \geq 2$. Тогда

$$\mathbf{E}(\beta(r), \mathbf{E}\beta_0(r), \mathbf{E}\beta_1(r))^T = n_1 n_2 \cdots n_r (b^*, b_0^*, b_1^*)^T. \quad (4)$$

Введем обозначения $\tilde{\Sigma}^{(j)} =$

$$= \begin{pmatrix} p_0^{(j)} q_0^{(j)} & p_{00}^{(j)} q_{00}^{(j)} - p_{10}^{(j)} q_{10}^{(j)} & p_0^{(j)} (p_{11}^{(j)} - p_{01}^{(j)}) \\ p_{00}^{(j)} q_{00}^{(j)} - p_{10}^{(j)} q_{10}^{(j)} & p_0^{(j)} - (p_{00}^{(j)} - p_{10}^{(j)})^2 & -(p_{00}^{(j)} - p_{10}^{(j)}) (p_{01}^{(j)} - p_{11}^{(j)}) \\ p_0^{(j)} (p_{11}^{(j)} - p_{01}^{(j)}) & -(p_{00}^{(j)} - p_{10}^{(j)}) (p_{01}^{(j)} - p_{11}^{(j)}) & p_1^{(j)} - (p_{01}^{(j)} - p_{11}^{(j)})^2 \end{pmatrix},$$

где

$$q_{00}^{(j)} = 1 - p_{00}^{(j)}, \quad q_{10}^{(j)} = 1 - p_{10}^{(j)}, \quad q_0^{(j)} = 1 - p_0^{(j)},$$

и обозначения

$$V^j = \begin{pmatrix} v^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & v_0^{(j)} & -v_1^{(j)} \\ 0 & v_1^{(j)} & v_0^{(j)} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (5)$$

где

$$v^{(j)} = \frac{b^*}{b^{(j)}}, \quad v_0^{(j)} = \frac{b_0^* b_0^{(j)} + b_1^* b_1^{(j)}}{(b_0^{(j)})^2 + (b_1^{(j)})^2}, \quad v_1^{(j)} = \frac{b_1^* b_0^{(j)} - b_0^* b_1^{(j)}}{(b_0^{(j)})^2 + (b_1^{(j)})^2}.$$

Теорема 2. Пусть $r \geq 2$, числа $n_1 < \dots < n_r$ стремятся к бесконечности, причем существуют пределы $\lim n_1/n_j = \rho_j^2 \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, r$. Пусть

$$\det B^{(j)} > 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (6)$$

Тогда распределение вектора

$$\nabla(r) = n_1^{1/2} \left(\frac{1}{n_1 n_2 \dots n_r} \begin{pmatrix} \beta(r) \\ \beta_0(r) \\ \beta_1(r) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b^* \\ b_0^* \\ b_1^* \end{pmatrix} \right)$$

сходится к трехмерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций

$$\Sigma(r) = \sum_{j=1}^r \rho_j^2 V^{(j)} \tilde{\Sigma}^{(j)} (V^{(j)})^T.$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 2 и

$$p_{ab}^{(1)} = \dots = p_{ab}^{(r)}, \quad a, b \in \{0, 1\}.$$

Тогда распределение вектора $\nabla(r)$ сходится к трехмерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций

$$\Sigma(r) = \left(\sum_{j=1}^r \rho_j^2 \right) \cdot V^{(1)} \tilde{\Sigma}^{(1)} (V^{(1)})^T. \quad (7)$$

Замечание 1. Условие (6) предполагает, что $\min_{j=1, \dots, r} b^{(j)} > 0$. Последнее условие является необходимым условием для асимптотической нормальности случайной величины $\beta(r)$ и вектора $\nabla(r)$ в целом. При его нарушении в качестве предельных распределений выступают иные распределения. Подробности можно найти в [3], где был рассмотрен случай, когда $M = 2$.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения из множества $\{0, 1, 2, 3\}$, и

$$p_{ab} = \mathbf{P}\{X_k = 2a_2 + a_1\}, \quad a_1, a_2 \in \{0, 1\}.$$

Будем использовать обозначения

$$p_a = p_{0a} + p_{1a}, \quad p_{a_2a_1} = 1 - q_{a_2a_1}, \quad a, a_1, a_2 \in \{0, 1\}.$$

Пусть $\nu_{a_2a_1} = \nu_{a_2a_1}(n)$ — количество чисел в $X_1, \dots, X_n$, имеющих двоичную запись a_2a_1 , и $\nu_a = \nu_a(n)$ — количество чисел в $X_1, \dots, X_n$, двоичная запись которых заканчивается числом a .

Положим

$$\begin{aligned} \delta &= \nu_0 - \nu_1, & \delta_0 &= \nu_{00} - \nu_{10}, & \delta_1 &= \nu_{01} - \nu_{11}, \\ b &= p_0 - p_1, & b_0 &= p_{00} - p_{10}, & b_1 &= p_{01} - p_{11}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда

$$\mathbf{E}\delta = nb, \quad \mathbf{E}\delta_0 = nb_0, \quad \mathbf{E}\delta_1 = nb_1.$$

Введем случайные величины $\theta = \delta - nb$, $\theta_0 = \delta_0 - nb_0$, $\theta_1 = \delta_1 - nb_1$ и рассмотрим вектор-столбцы

$$\Theta = (\theta, \theta_0, \theta_1)^T, \quad \tilde{\Theta} = \frac{1}{\sqrt{n}}\Theta.$$

Лемма 1. Пусть $n \rightarrow \infty$. Тогда распределение вектора $\tilde{\Theta}$ сходится к трехмерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} p_0p_1 & p_{00}q_{00} - p_{10}q_{10} & p_0(p_{11} - p_{01}) \\ p_{00}q_{00} - p_{10}q_{10} & p_0 - (p_{00} - p_{10})^2 & -(p_{00} - p_{10})(p_{01} - p_{11}) \\ p_0(p_{11} - p_{01}) & -(p_{00} - p_{10})(p_{01} - p_{11}) & p_1 - (p_{01} - p_{11})^2 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Из леммы 1 следует, что при $n \rightarrow \infty$ выполнены соотношения $\theta = O(n^{1/2})$, $\theta_0 = O(n^{1/2})$, $\theta_1 = O(n^{1/2})$. Здесь и далее запись $\xi = O(f(n))$ означает, что случайная величина $\xi/f(n)$ при $n \rightarrow \infty$ ограничена по вероятности.

Доказательство. Так как вектор $\tilde{\nu} = (\nu_{00}, \nu_{01}, \nu_{10}, \nu_{11})^T$ имеет мультиномиальный закон распределения с параметрами n и $\{p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}\}$, то его вектор средних и ковариационная матрица равны соответственно

$$\mathbf{E}\tilde{\nu} = \begin{pmatrix} np_{00} \\ np_{01} \\ np_{10} \\ np_{11} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{\tilde{\nu}} = \begin{pmatrix} np_{00}q_{00} & -np_{00}p_{01} & -np_{00}p_{10} & -np_{00}p_{11} \\ -np_{00}p_{01} & np_{01}q_{01} & -np_{01}p_{10} & -np_{01}p_{11} \\ -np_{00}p_{10} & -np_{01}p_{10} & np_{10}q_{10} & -np_{10}p_{11} \\ -np_{00}p_{11} & -np_{01}p_{11} & -np_{10}p_{11} & np_{11}q_{11} \end{pmatrix}.$$

Вектор Θ получен из вектора $\tilde{\nu}$ в результате линейного преобразования

$$\Theta = C\tilde{\nu} - (b, b_0, b_1)^T, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вектор средних и ковариационная матрица вектора Θ выражаются формулами

$$\mathbf{E}\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{E}\tilde{\nu} - (b, b_0, b_1)^T = \mathbf{0},$$

$$\Sigma_{\Theta} = C\Sigma_{\tilde{\nu}}C^T =$$

$$= n \begin{pmatrix} p_0p_1 & p_{00}q_{00} - p_{10}q_{10} & p_0(p_{11} - p_{01}) \\ p_{00}q_{00} - p_{10}q_{10} & p_0 - (p_{00} - p_{10})^2 & -(p_{00} - p_{10})(p_{01} - p_{11}) \\ p_0(p_{11} - p_{01}) & -(p_{00} - p_{10})(p_{01} - p_{11}) & p_1 - (p_{01} - p_{11})^2 \end{pmatrix}.$$

Из последней формулы и определения вектора $\tilde{\Theta}$ следует, что ковариационная матрица вектора $\tilde{\Theta}$ равна $\tilde{\Sigma}$.

Далее понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. *Характеристическая функция вектора $\tilde{\Theta}$ имеет вид*

$$g_{\tilde{\Theta}}(t, t_0, t_1) = \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{n}}(bt + b_0t_0 + b_1t_1) \right\} \times \left(p_{01}e^{i\frac{t_1}{\sqrt{n}}} + p_{11}e^{-i\frac{t_1}{\sqrt{n}}} + e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}} \left(p_{00}e^{i\frac{t_0}{\sqrt{n}}} + p_{10}e^{-i\frac{t_0}{\sqrt{n}}} \right) \right)^n. \quad (9)$$

Доказательство. Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\nu_0 = k, \nu_{00} - \nu_{10} = l_0, \nu_{01} - \nu_{11} = l_1\} = \\ &= \mathbf{P}\left\{\nu_{00} = \frac{k+l_0}{2}, \nu_{10} = \frac{k-l_0}{2}, \nu_{01} = \frac{n-k+l_1}{2}, \nu_{11} = \frac{n-k+l_1}{2}\right\} = \\ &= C_n^{\frac{k+l_0}{2}} p_{00}^{\frac{k+l_0}{2}} C_{n-\frac{k+l_0}{2}}^{\frac{k-l_0}{2}} p_{10}^{\frac{k-l_0}{2}} C_{n-k}^{\frac{n-k+l_1}{2}} p_{01}^{\frac{n-k+l_1}{2}} p_{11}^{\frac{n-k+l_1}{2}}, \end{aligned}$$

где $C_m^j = 0$, если j или m не является целым. Сделаем замену

$$k_0 = \frac{k+l_0}{2}, \quad k_1 = \frac{n-k+l_1}{2}.$$

Тогда характеристическая функция вектора $\nu = (\nu_0, \nu_{00} - \nu_{10}, \nu_{01} - \nu_{11})^T$ равна

$$\begin{aligned} g_\nu(t, t_0, t_1) &= \mathbf{E} e^{i(t\nu_0 + t_0(\nu_{00} - \nu_{10}) + t_1(\nu_{01} - \nu_{11}))} = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{k_0=0}^k \sum_{k_1=0}^{n-k} C_n^{k_0} p_{00}^{k_0} C_{n-k_0}^{k-k_0} p_{10}^{k-k_0} C_{n-k}^{k_1} p_{01}^{k_1} p_{11}^{n-k-k_1} e^{it_0(2k_0-k)} e^{it_1(2k_1-(n-k))} e^{itk}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^{n-k} C_{n-k}^{k_1} p_{01}^{k_1} p_{11}^{n-k-k_1} e^{it_1(2k_1-(n-k))} = \\ &= e^{-it_1(n-k)} (p_{01} e^{2it_1} + p_{11})^{n-k} = (p_{01} e^{it_1} + p_{11} e^{-it_1})^{n-k}, \\ & \sum_{k_0=0}^k C_n^{k_0} p_{00}^{k_0} C_{n-k_0}^{k-k_0} p_{10}^{k-k_0} e^{it_0(2k_0-k)} = \\ &= e^{-it_0k} \sum_{k_0=0}^k \frac{k!}{k_0!(k-k_0)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p_{00}^{k_0} p_{10}^{k-k_0} e^{2it_0k_0} = \\ &= C_n^k e^{-it_0k} (p_{00} e^{2it_0k} + p_{10})^k = C_n^k (p_{00} e^{it_0} + p_{10} e^{-it_0})^k, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} g_\nu(t, t_0, t_1) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (p_{00}e^{it_0} + p_{10}e^{-it_0})^k (p_{01}e^{it_1} + p_{11}e^{-it_1})^{n-k} e^{it} = \\ &= (p_{01}e^{it_1} + p_{11}e^{-it_1} + e^{it}(p_{00}e^{it_0} + p_{10}e^{-it_0}))^n. \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь рассмотрим вектор $\tilde{\Theta}$. Так как

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\nu - (b, b_0, b_1)^T \right),$$

то из (10) получаем (9):

$$\begin{aligned} g_{\tilde{\Theta}}(t, t_0, t_1) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{n}} (bt + b_0t_0 + b_1t_1) \right\} g_\nu \left(\frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{t_0}{\sqrt{n}}, \frac{t_1}{\sqrt{n}} \right) = \\ &= \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{n}} (bt + b_0t_0 + b_1t_1) \right\} \times \\ &\quad \times \left(p_{01}e^{i\frac{t_1}{\sqrt{n}}} + p_{11}e^{-i\frac{t_1}{\sqrt{n}}} + e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}} (p_{00}e^{i\frac{t_0}{\sqrt{n}}} + p_{10}e^{-i\frac{t_0}{\sqrt{n}}}) \right)^n. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана. $\square$

Вернемся к доказательству леммы 1. Разложим в ряд логарифм характеристической функции (9):

$$\begin{aligned} \ln g_{\tilde{\Theta}}(t, t_0, t_1) &= -i\sqrt{n} (p_0t + (p_{00} - p_{10})t_0 + (p_{01} - p_{11})t_1) + \\ &\quad + n g_1(t, t_0, t_1), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$g_1(t, t_0, t_1) = \ln \left(p_{01}e^{i\frac{t_1}{\sqrt{n}}} + p_{11}e^{-i\frac{t_1}{\sqrt{n}}} + e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}} \left(p_{00}e^{i\frac{t_0}{\sqrt{n}}} + p_{10}e^{-i\frac{t_0}{\sqrt{n}}} \right) \right).$$

Так как

$$e^{i\frac{u}{\sqrt{n}}} = 1 + i\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + O(n^{-3/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

то

$$\begin{aligned}
g_1(t, t_0, t_1) &= \ln \left\{ p_1 + p_{01} \left(i \frac{t_1}{\sqrt{n}} - \frac{t_1^2}{2n} \right) - p_{11} \left(i \frac{t_1}{\sqrt{n}} + \frac{t_1^2}{2n} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} \right) \left(p_0 + p_{00} \left(\frac{it_0}{\sqrt{n}} - \frac{t_0^2}{2n} \right) - p_{10} \left(\frac{it_0}{\sqrt{n}} + \frac{t_0^2}{2n} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + O(n^{-3/2}) \right\} = \\
&= \ln \left\{ 1 + i \frac{t_1}{\sqrt{n}} (p_{01} - p_{11}) + i \frac{t_0}{\sqrt{n}} (p_{00} - p_{10}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{t}{\sqrt{n}} \left(ip_0 - \frac{t_0}{\sqrt{n}} (p_{00} - p_{10}) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{t_1^2}{2n} p_1 - \frac{t_0^2}{2n} p_0 - \frac{t^2}{2n} p_0 + O(n^{-3/2}) \right\}.
\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся разложением в ряд для логарифма и получим

$$\begin{aligned}
g_1(t, t_0, t_1) &= i \frac{t_1}{\sqrt{n}} (p_{01} - p_{11}) + i \frac{t_0}{\sqrt{n}} (p_{00} - p_{10}) + \\
&\quad + \frac{t}{\sqrt{n}} \left(ip_0 - \frac{t_0}{\sqrt{n}} (p_{00} - p_{10}) \right) - \frac{t_1^2}{2n} p_1 - \frac{t^2}{2n} p_0 - \frac{t_0^2}{2n} p_0 - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(i \frac{t_1}{\sqrt{n}} (p_{01} - p_{11}) + i \frac{t_0}{\sqrt{n}} (p_{00} - p_{10}) + ip_0 \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 + \\
&\quad + O(n^{-3/2}) = \\
&= i \frac{t_1}{\sqrt{n}} (p_{01} - p_{11}) + i \frac{t_0}{\sqrt{n}} (p_{00} - p_{10}) + ip_0 \frac{t}{\sqrt{n}} - \\
&\quad - \frac{1}{2n} \left\{ (p_0 - p_0^2) t^2 + (p_1 - (p_{01} - p_{11})^2) t_1^2 + \right. \\
&\quad \left. + (p_0 - (p_{00} - p_{10})^2) t_0^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2 t t_0 (1 - p_0)(p_{00} - p_{10}) - 2 t t_1 p_0 (p_{01} - p_{11}) - \right. \\
&\quad \left. - 2 t_0 t_1 (p_{01} - p_{11})(p_{00} - p_{10}) \right\} + \\
&\quad + O(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение для $g_1(t, t_0, t_1)$ в правую часть формулы (11), с учетом равенства

$$(1 - p_0)(p_{00} - p_{10}) = p_{00}q_{00} - p_{10}q_{10}$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \ln g_{\tilde{\Theta}}(t, t_0, t_1) &= -\frac{1}{2} \left\{ (p_0 - p_0^2)t^2 + \right. \\ &\quad + \left(p_1 - (p_{01} - p_{11})^2 \right) t_1^2 + \left(p_0 - (p_{00} - p_{10})^2 \right) t_0^2 + \\ &\quad + 2t t_0 (p_{00}q_{00} - p_{10}q_{10}) - 2t t_1 p_0 (p_{01} - p_{11}) - \\ &\quad \left. - 2t_0 t_1 (p_{01} - p_{11})(p_{00} - p_{10}) \right\} + O(n^{-1/2}) = \\ &= -\frac{1}{2} (t, t_0, t_1) \tilde{\Sigma} (t, t_0, t_1)^T + O(n^{-1/2}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Значит, распределение вектора $\tilde{\Theta}$ сходится к трехмерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\tilde{\Sigma}$. Лемма 1 доказана. $\square$

3. Доказательства теорем

Пусть $\nu_{a_2 a_1}^{(j)}$ — количество чисел в $X^{(j)} = (X_0^{(j)}, \dots, X_{n_j-1}^{(j)})$, имеющих в двоичной системе счисления запись $a_2 a_1$, и $\nu_{a_1}^{(j)}$ — количество чисел в $X^{(j)}$, двоичная запись которых заканчивается числом a_1 . Положим

$$\delta^{(j)} = \nu_0^{(j)} - \nu_1^{(j)}, \quad \delta_a^{(j)} = \nu_{0a}^{(j)} - \nu_{1a}^{(j)}, \quad a \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, r. \quad (12)$$

$$b^{(j)} = p_0^{(j)} - p_1^{(j)}, \quad b_0^{(j)} = p_{00}^{(j)} - p_{10}^{(j)}, \quad b_1^{(j)} = p_{01}^{(j)} - p_{11}^{(j)}. \quad (13)$$

Тогда

$$\mathbf{E} \delta^{(j)} = n_j b^{(j)}, \quad \mathbf{E} \delta_0^{(j)} = n_j b_0^{(j)}, \quad \mathbf{E} \delta_1^{(j)} = n_j b_1^{(j)}.$$

Введем случайные величины

$$\theta^{(j)} = \delta^{(j)} - n_j b^{(j)}, \quad \theta_0^{(j)} = \delta_0^{(j)} - n_j b_0^{(j)}, \quad \theta_1^{(j)} = \delta_1^{(j)} - n_j b_1^{(j)},$$

$$\tilde{\theta}^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \theta^{(j)}, \quad \tilde{\theta}_0^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \theta_0^{(j)}, \quad \tilde{\theta}_1^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \theta_1^{(j)}$$

и рассмотрим вектор-столбцы

$$\Theta^{(j)} = (\theta^{(j)}, \theta_0^{(j)}, \theta_1^{(j)})^T, \quad \tilde{\Theta}^{(j)} = (\tilde{\theta}^{(j)}, \tilde{\theta}_0^{(j)}, \tilde{\theta}_1^{(j)})^T.$$

В формуле (1) (подробности см. в [5])

$$\begin{pmatrix} \beta(r) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0(r) & -\beta_1(r) \\ 0 & \beta_1(r) & \beta_0(r) \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^r \begin{pmatrix} \delta^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_0^{(j)} & -\delta_1^{(j)} \\ 0 & \delta_1^{(j)} & \delta_0^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Согласно (14) искомая формула может быть получена из двух аналогичных формул: одна для величины $\beta(r)$, а другая для вектора $(\beta_0(r), \beta_1(r))^T$.

По условиям теорем все $b^{(j)} > 0$. Поэтому согласно (14)

$$\beta(r) = \prod_{j=1}^r (n_j b^{(j)} + \sqrt{n_j} \tilde{\theta}^{(j)}) = \prod_{j=1}^r n_j b^{(j)} \left(1 + \sum_{k=1}^r \frac{1}{\sqrt{n_k}} \frac{\tilde{\theta}^{(k)}}{b^{(k)}} + w \right), \quad (15)$$

где

$$w = \sum_{l=2}^r \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq r} \frac{1}{\sqrt{n_{k_1} n_{k_2} \dots n_{k_l}}} \frac{\tilde{\theta}^{(k_1)} \tilde{\theta}^{(k_2)} \dots \tilde{\theta}^{(k_l)}}{b^{(k_1)} b^{(k_2)} \dots b^{(k_l)}}. \quad (16)$$

Из (14) также получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta_0(r) & -\beta_1(r) \\ \beta_1(r) & \beta_0(r) \end{pmatrix} &= \prod_{j=1}^r \left(\begin{pmatrix} b_0^{(j)} & -b_1^{(j)} \\ n_j b_1^{(j)} & b_0^{(j)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_0^{(j)} & -\theta_1^{(j)} \\ \theta_1^{(j)} & \theta_0^{(j)} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \prod_{j=1}^r n_j \begin{pmatrix} b_0^{(j)} & -b_1^{(j)} \\ b_1^{(j)} & b_0^{(j)} \end{pmatrix} \left(I + \sum_{k=1}^r \frac{1}{\sqrt{n_k}} \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_0^{(k)} & -\tilde{\theta}_1^{(k)} \\ \tilde{\theta}_1^{(k)} & \tilde{\theta}_0^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^{(k)} & -b_1^{(k)} \\ b_1^{(k)} & b_0^{(k)} \end{pmatrix}^{-1} + W' \right) \end{aligned} \quad (17)$$

(мы воспользовались тем, что все матрицы в разложении коммутативны), где I — единичная матрица, а

$$W' = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix} = \sum_{l=2}^r \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq r} \prod_{j=1}^l \frac{1}{\sqrt{n_{k_j}}} \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_0^{(k_j)} & -\tilde{\theta}_1^{(k_j)} \\ \tilde{\theta}_1^{(k_j)} & \tilde{\theta}_0^{(k_j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^{(k_j)} & -b_1^{(k_j)} \\ b_1^{(k_j)} & b_0^{(k_j)} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (18)$$

Из (14)–(18) следует равенство

$$\begin{pmatrix} \beta(r) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0(r) & -\beta_1(r) \\ 0 & \beta_1(r) & \beta_0(r) \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^r n_j B^{(j)} \left(I + \sum_{k=1}^r \frac{1}{\sqrt{n_k}} D^{(k)} (B^{(k)})^{-1} + W \right), \quad (19)$$

где

$$D^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\theta}_0^{(j)} & -\tilde{\theta}_1^{(j)} \\ 0 & \tilde{\theta}_1^{(j)} & \tilde{\theta}_0^{(j)} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & w_{00} & w_{01} \\ 0 & w_{10} & w_{11} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Так как векторы $\tilde{\Theta}^{(l)}$ и $\tilde{\Theta}^{(k)}$ независимы при $l \neq k$, а математические ожидания их компонент равны нулю, то из формул (19) и (20) следует равенство (3). Теорема 1 доказана. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 2. Из определений, неравенств $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ и леммы 1 (см. замечание 2) вытекает, что $W = O(n_1^{-1})$. Поэтому предельные распределения случайных матриц

$$\sqrt{n_1} \left(\frac{1}{n_1 n_2 \dots n_r} \begin{pmatrix} \beta(r) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0(r) & -\beta_1(r) \\ 0 & \beta_1(r) & \beta_0(r) \end{pmatrix} - \mathbb{B}(r) \right), \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^r \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_j}} \mathbb{B}(r) D^{(j)} (B^{(j)})^{-1}$$

совпадают, если хотя бы одно из них существует.

Более того, в силу условия $n_1/n_j \rightarrow \rho_j$ вторую матрицу здесь можно заменить матрицей

$$H = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & -h_1 \\ 0 & h_1 & h_0 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^r \rho_j \mathbb{B}(r) D^{(j)} (B^{(j)})^{-1}.$$

Сказанное означает, что далее можно ограничиться изучением асимптотического поведения распределения матрицы H .

Для h, h_0, h_1 получаем выражения

$$h = b^* \sum_{j=1}^r \rho_j \frac{\tilde{\theta}^{(j)}}{b^{(j)}},$$

$$h_0 = b_0^* \sum_{j=1}^r \rho_j \frac{\tilde{\theta}_0^{(j)} b_0^{(j)} + \tilde{\theta}_1^{(j)} b_1^{(j)}}{(b_0^{(j)})^2 + (b_1^{(j)})^2} + b_1^* \sum_{j=1}^r \rho_j \frac{\tilde{\theta}_0^{(j)} b_1^{(j)} - \tilde{\theta}_1^{(j)} b_0^{(j)}}{(b_0^{(j)})^2 + (b_1^{(j)})^2},$$

$$h_1 = b_1^* \sum_{j=1}^r \rho_j \frac{\tilde{\theta}_0^{(j)} b_0^{(j)} + \tilde{\theta}_1^{(j)} b_1^{(j)}}{(b_0^{(j)})^2 + (b_1^{(j)})^2} - b_0^* \sum_{j=1}^r \rho_j \frac{\tilde{\theta}_0^{(j)} b_1^{(j)} - \tilde{\theta}_1^{(j)} b_0^{(j)}}{(b_0^{(j)})^2 + (b_1^{(j)})^2}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\begin{pmatrix} h \\ h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^r \rho_j V^{(j)} \tilde{\Theta}, \quad (22)$$

где V^j — матрицы, введенные формулой (5).

Из леммы 1 и (22) следует, что предельное распределение вектора $(h, h_0, h_1)^T$ совпадает с распределением вектора

$$U(r) = \sum_{j=1}^r \rho_j V^{(j)} \begin{pmatrix} \eta^{(j)} \\ \eta_0^{(j)} \\ \eta_1^{(j)} \end{pmatrix},$$

где $(\eta^{(j)}, \eta_0^{(j)}, \eta_1^{(j)})^T$ — независимые случайные векторы, имеющие нормальные распределения с нулевым вектором средних и матрицами ковариаций $\tilde{\Sigma}^{(j)}$. Используя известные свойства матриц ковариаций (см. [6, с. 329]), получаем, что $U(r)$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей

$$\sum_{j=1}^r \rho_j^2 V^{(j)} \tilde{\Sigma}^{(j)} (V^{(j)})^T.$$

В силу изложенного выше такое же предельное распределение имеет и вектор $\nabla(r)$. Теорема 2 доказана. $\square$

Авторы благодарны А. М. Зубкову и А. М. Шойтову за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Pohl P., “Description of MCV, a pseudo-random generator”, *Scand. Actuarial. J.* (1976), 1–14.
- [2] Меженная Н. М., Михайлов В. Г., “О распределении числа единиц в выходной последовательности генератора Пола над полем $GF(2)$ ”, *Математические вопросы криптографии*, **4**:4 (2014), 51–58.
- [3] Меженная Н. М., “О распределении числа единиц в двоичной мультициклической последовательности”, *Прикладная дискретная математика*, № 1 (2015), 69–77.
- [4] Mezhenaya N. M., “Convergence rate estimators for the number of ones in outcome sequence of MCV generator with m-dependent registers items”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11** (2014), 18–25.
- [5] Меженная Н. М., Михайлов В. Г., “О числе появлений знаков в мультициклической случайной последовательности по модулю 4”, *Дискретная математика*, **26**:4 (2014), 51–58.
- [6] Крамер Г., *Математические методы статистики*, М.: Мир, 1975.