Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Куракин, Семейство последовательностей над кольцом из 8 элементов с низкой корреляцией, *Матем. вопр. криптогр.*, 2010, том 1, выпуск 4, 85–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk22>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 10:09:50

УДК: 519.113.6+512.55

Семейство последовательностей над кольцом из 8 элементов с низкой корреляцией

В. Л. Куракин

Российский государственный социальный университет, г. Москва

Получено 20.IV.2010

Строится семейство последовательностей периода $2^m - 1$ над кольцом из 8 элементов, кросс-корреляционные функции которых асимптотически оптимальны относительно оценок Сидельникова и Уолша.

Ключевые слова: конечные кольца, линейные рекуррентные последовательности, периодические последовательности, кросс-корреляционная функция

A family of sequences over the 8-element ring with low correlation

V. L. Kurakin

Russian State Social University, Moscow

Abstract. We construct a family of sequences over the 8-element ring with period $2^m - 1$ such that their cross-correlation functions are asymptotically optimal with respect to the Sidel'nikov and Welch bounds

Key words: finite rings, linear recurrent sequences, periodic sequences, cross-correlation function

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2010, vol. 1, no. 4, pp. 85–109 (Russian).

© 2010 В. Л. Куракин

1. Корреляционная функция

Пусть u — последовательность периода T над полем $P = GF(2)$. *Корреляционная функция* последовательности u определяется равенством

$$C_u(t) = \sum_{i=0}^{T-1} (-1)^{u(i)-u(i+t)}, \quad t \geq 0,$$

где показатель $u(i)-u(i+t)$ рассматривается не как элемент поля P , а как действительное число 0 или 1. Суммирование проводится в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Так как $C_u(t+T) = C_u(t)$, часто рассматривают лишь значения $C_u(t)$ при $0 \leq t < T$. Значение $C_u(0) = T$ и равные ему значения $C_u(t)$ при $T \mid t$ называют *фазовыми*.

Пусть теперь A — некоторое семейство последовательностей над полем P , период каждой из которых равен T . *Кросс-корреляционная функция* последовательностей $u, v \in A$ определяется равенством

$$C_{u,v}(t) = \sum_{i=0}^{T-1} (-1)^{u(i)-v(i+t)}, \quad t \geq 0.$$

Очевидно, $|C_{u,v}(t)| \leq T$. Справедливо равенство $C_u(t) = C_{u,u}(t)$. Значение $C_{u,u}(0) = T$ и равные ему значения $C_{u,u}(t)$ при $T \mid t$ называют *фазовыми*. Выделяется также значение $C_{u,u+1}(0) = -T$.

Сдвиг последовательности u на t шагов влево обозначим $x^t u$, так что

$$x^t u(i) = u(i+t), \quad i \geq 0.$$

Тогда кросс-корреляционную функцию можно записать в виде

$$C_{u,v}(t) = T - 2\rho(u, x^t v),$$

где $\rho(u, x^t v) = |\{i: 0 \leq i < T, u(i) \neq v(i+t)\}|$ — расстояние Хэмминга между двоичными векторами длины T . Поэтому кросс-корреляционную функцию можно воспринимать как меру близости между последовательностями u и $x^t v$, которая тем больше по модулю, чем ближе последовательности. Функция $C_{u,v}(t)$ равна 0 тогда и только тогда, когда $u - x^t v$ содержит одинаковое количество 0 и 1 на цикле (а значит, T четно).

В системах связи CDMA с разделением доступа каждому пользователю сопоставляется последовательность u из некоторого семейства A — идентификатор пользователя. При вхождении пользователя в связь им посылаются

последовательность u , а в центре идентификации принимается последовательность u или ее сдвиг $x^t u$. Чтобы надежно (при наличии помех) идентифицировать пользователя, кросс-корреляция между последовательностью u и любой другой последовательностью $v \in A$, а также между сдвигами этих последовательностей должна быть мала — существенно меньше фазового значения $C_{u,u}(0) = T$. Поэтому основным параметром, по которому оцениваются кросс-корреляционные свойства семейства A , является число

$$C_{\max} = C_{\max}(A) = \max\{|C_{u,v}(t)| : u, v \in A, 0 \leq t < T, (u, t) \neq (v, 0)\}.$$

Поскольку пользователь идентифицируется по последовательности u или любому ее сдвигу, семейство A вместе с любой последовательностью должно содержать все ее сдвиги. Пользователю при этом сопоставляется цикл — множество всех сдвигов последовательности u . Поэтому наряду с семейством A , замкнутым относительно сдвигов, мы будем рассматривать семейство $\tilde{A}$, которое состоит из выбранных каким-то образом представителей всех циклов семейства A . Очевидно, $|\tilde{A}| = |A|/T$.

Понятие кросс-корреляционной функции обобщается на недвоичные последовательности следующим образом. Пусть $\mathbb{Z}_m$ — кольцо вычетов, $\omega \in \mathbb{C}$ — первообразный корень степени m из 1 в поле комплексных чисел. Отображение

$$\chi: \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \chi(a) = \omega^a = e^{2\pi i a/m}, \quad 0 \leq a < m,$$

является характером группы $(\mathbb{Z}_m, +)$, т. е. *аддитивным характером кольца $\mathbb{Z}_m$* . Пусть A — семейство последовательностей периода T над кольцом $\mathbb{Z}_m$. *Кросс-корреляционная функция* последовательностей $u, v \in A$ определяется равенством

$$C_{u,v}(t) = \sum_{i=0}^{T-1} \chi(u(i) - v(i+t)) = \sum_{i=0}^{T-1} \omega^{u(i)-v(i+t)}, \quad t \geq 0.$$

Корреляционная функция последовательности u по определению равна $C_u(t) = C_{u,u}(t)$. Очевидно, $|C_{u,v}(t)| \leq T$. Значения $C_{u,u}(0) = C_u(0) = T$ называют *фазовыми*. Параметр $C_{\max}$ определяется так же, как и выше.

Представляют интерес семейства с возможно меньшим значением параметра $C_{\max}$. Существуют теоретические нижние оценки для этого параметра, наиболее известные из которых — оценки Сидельникова и Уолша. Согласно *оценке Сидельникова* [6], для семейства из $|A| = T + 1$ последовательностей периода T параметр $C_{\max}$ при больших T ограничен снизу:

$$C_{\max} \geq \sqrt{\alpha T}, \quad (1)$$

где $\alpha = 2$ для двоичных и $\alpha = 1$ для недвоичных последовательностей. Первое семейство p -ичных последовательностей ($p \geq 3$ простое), для которых достигается эта оценка, было построено В. М. Сидельниковым. Из оценки (1) видно, что в недвоичном случае теоретически возможно строить семейства последовательностей, для которых параметр $C_{\max}$ будет в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем в двоичном случае. Это объясняет интерес к недвоичным последовательностям.

Оценка Уолша [10] (в одной из ее формулировок) утверждает, что для семейства из $|A| = M$ последовательностей периода T верно неравенство

$$C_{\max}^2 \geq \frac{T^2(M-1)}{MT-1}. \quad (2)$$

При $M \rightarrow \infty$ оценка показывает, что асимптотически $C_{\max} \geq \sqrt{T}$. Семейства, для которых это неравенство асимптотически обращается в равенство, т. е. $C_{\max} \sim \sqrt{T}$ при $M \rightarrow \infty$, называют асимптотически оптимальными относительно оценки Уолша.

2. Пример оптимальных семейств последовательностей над $\mathbb{Z}_4$

К настоящему времени описано довольно много семейств последовательностей, асимптотически оптимальных относительно оценок Сидельникова и Уолша. Мы рассмотрим семейства из работы [7], поскольку семейство, которое строится в данной работе, является их обобщением.

В дальнейшем через $GR(q^n, p^n)$ будем обозначать кольцо Галуа характеристики p^n , состоящее из q^n элементов [4, 8, 9]. Пусть $R = \mathbb{Z}_4 = GR(4, 4)$ — кольцо вычетов по модулю 4 и $R' = GR(4^m, 4)$ — его расширение Галуа степени m . Обозначим через

$$\Gamma(R') = \{b \in R' : b^{2^m} = b\}$$

2-адическое координатное множество кольца R' . Это множество состоит из 2^m элементов, попарно различных по модулю радикала $2R'$ кольца R' , и замкнуто относительно умножения. Любой элемент $a \in R'$ однозначно представляется в виде

$$a = a_0 + 2a_1, \quad \text{где } a_0 = \gamma_0(a), a_1 = \gamma_1(a) \in \Gamma(R'), \quad (3)$$

который называется 2-адическим разложением элемента a . Относительно операций сложения $a \oplus b = \gamma_0(a + b)$, $a, b \in \Gamma(R')$, и умножения кольца R' множество $\Gamma(R')$ образует поле $GF(2^m)$.

Пусть $F(x) \in R[x]$ — такой унитарный многочлен степени m , что его образ $\bar{F}(x)$ над полем вычетов $\bar{R} = R/2R = GF(2)$ неприводим над полем $\bar{R}$. Такой многочлен называется *многочленом Галуа*. В дальнейшем предполагается, что период $T(\bar{F})$ многочлена $\bar{F}(x)$ равен $T(\bar{F}) = 2^m - 1$, т.е. $\bar{F}(x)$ есть многочлен максимального периода над полем вычетов $\bar{R}$. Тогда период $T(F)$ многочлена $F(x)$ над кольцом R может быть равен $2^m - 1$ или $2(2^m - 1)$. В первом случае многочлен $F(x)$ называется *отмеченным*, во втором — *многочленом максимального периода* (ММП) над кольцом R . В кольце Галуа $R' = GR(4^m, 4)$ многочлен $F(x)$ имеет корень α . Многочлен $F(x)$ отмеченный тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Gamma(R')$, т.е. $\alpha = \gamma_0(\alpha)$.

Обозначим через $L_R(F)$ множество всех линейных рекуррентных последовательностей (ЛРП) над кольцом R с характеристическим многочленом $F(x)$. Тогда

$$L_R^*(F) = \{u \in L_R(F) : \bar{u} \neq 0\} = L_R(F) \setminus 2L_R(F)$$

есть множество последовательностей из $L_R(F)$, у которых начальный вектор не равен нулевому вектору по модулю 2.

В работе [7] рассматриваются два семейства последовательностей над кольцом $R = \mathbb{Z}_4$, которые мы будем обозначать A_0 и B_0 (в [7] они обозначаются A и B). Эти семейства определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_0 &= L_R(F) \setminus 0, \quad \text{где } F(x) \text{ — отмеченный многочлен,} \\ B_0 &= L_R^*(F), \quad \text{где } F(x) \text{ — ММП.} \end{aligned}$$

Причем во втором случае на корень α многочлена $F(x)$ накладываются условия, формулируемые в терминах p -адического разложения (3) следующим образом: если

$$\alpha = \alpha_0 + 2\alpha_1 = \alpha_0(1 + 2\delta), \quad \text{где } \delta = \alpha_0^{-1}\alpha_1,$$

то

$$\delta \neq 1 \quad \text{и} \quad \text{tr}_1^m(\bar{\delta}) \neq 1.$$

Здесь

$$\text{tr} = \text{tr}_1^m = \text{tr}_{GF(2)}^{GF(2^m)} = \text{tr}_{\Gamma(R)}^{\Gamma(R')}$$

— след из поля $\Gamma(R') = GF(2^m)$ в поле $\Gamma(R) = GF(2)$, определяемый равенством

$$\text{tr}(x) = x \oplus x^2 \oplus x^4 \oplus \dots \oplus x^{2^{m-1}}.$$

В следующей таблице перечислены параметры семейств A_0 и B_0 : число последовательностей M , период последовательностей T , число циклов M/T

и верхняя оценка кросс-корреляции последовательностей $C_{\max}$, доказанная в [7].

	M	T	M/T	$C_{\max} \leq$
A_0	$2^{2m} - 1$	$2^m - 1$	$2^m + 1 = T + 2$	$1 + \sqrt{T + 1}$
B_0	$2^{2m} - 2^m$	$2(2^m - 1)$	$2^{m-1} = \frac{T+2}{4}$	$2 + \sqrt{T + 2}$

Таким образом, семейства асимптотически оптимальны относительно оценок Сидельникова и Уолша.

Последовательности семейств A_0 и B_0 имеют представление функцией след. Напомним, что функция след из кольца Галуа R' в кольцо R определяется равенством

$$\text{Tr}(a) = \text{Tr}_R^{R'}(a) = \sum_{\varphi \in \text{Aut}(R'/R)} \varphi(a), \quad a \in R'. \quad (4)$$

Каждая последовательность $u \in A_0$ представляется в виде

$$u(i) = \text{Tr}_R^{R'}(c\alpha^i), \quad c \neq 0, \quad \text{где } \alpha = \alpha_0 \in \Gamma(R').$$

В данной работе строится семейство A последовательностей над кольцом из 8 элементов, являющееся аналогом семейства A_0 .

Функцию след над кольцом Галуа можно записать в явном виде, используя p -адическое разложение элементов. Если $a \in \Gamma(R')$, то

$$\text{Tr}_R^{R'}(a) = \sum_{r=0}^{m-1} a^{2^r}, \quad a \in \Gamma(R'). \quad (5)$$

Поэтому для произвольного элемента $a \in R'$ с p -адическим разложением $a = a_0 + 2a_1$ справедливо равенство [4]

$$\text{Tr}_R^{R'}(a) = \text{Tr}(a_0) + 2 \text{Tr}(a_1) = \sum_{r=0}^{m-1} (a_0^{2^r} + 2a_1^{2^r}), \quad a \in R'.$$

3. Последовательности над кольцом S из 8 элементов

Пусть по-прежнему $R = \mathbb{Z}_4$. Рассмотрим кольцо $S = R[x]/(x^2, 2x)$, состоящее из 8 элементов. Согласно [5] S является наименьшим неквазифробениусовым кольцом (существует еще одно такое кольцо $\mathbb{Z}_2[x, y]/(x^2, xy, y^2)$, но оно представляет меньший интерес, так как имеет характеристику 2).

Последовательности над кольцом S , их представление функцией след, ранги координатных последовательностей и частотные характеристики рассматривались в [1–3]. В этой работе строится семейство последовательностей над кольцом S с низкой кросс-корреляцией.

Перечислим свойства кольца S , указанные в [2]. Пусть $\theta \in S$ — образ элемента x при естественном эпиморфизме $R[x] \rightarrow S$ с ядром $(x^2, 2x)$. Тогда $\theta^2 = 2\theta = 0$ и

$$S = R[\theta] = \{a + b\theta : a \in R, b \in \{0, 1\}\} = \{0, 1, 2, 3, \theta, 1 + \theta, 2 + \theta, 3 + \theta\}. \quad (6)$$

Кольцо S локально, его максимальный идеал, совпадающий с радикалом, равен

$$J = J(S) = (2, \theta) = \{0, 2, \theta, 2 + \theta\},$$

а поле вычетов есть

$$\bar{S} = S/J(S) = GF(2).$$

Так как $J^2 = 0$, то индекс нильпотентности радикала J равен 2. Если $a \in S$, $F(x) \in S[x]$, $u \in S^\infty$ — соответственно элемент, многочлен и последовательность над кольцом S , то через $\bar{a}$, $\bar{F}(x)$, $\bar{u}$ будем обозначать их образы при естественном эпиморфизме $S \rightarrow \bar{S}$ кольца S в его поле вычетов при индуцируемыми им эпиморфизмами $S[x] \rightarrow \bar{S}[x]$ и $S^\infty \rightarrow \bar{S}^\infty$. Унитарный многочлен $F(x) \in S[x]$ такой, что $\bar{F}(x)$ неприводим над полем $\bar{S}$, будем называть *многочленом Галуа* над кольцом S .

Как видно из (6), аддитивная группа $(S, +)$ кольца S есть прямая сумма

$$(S, +) = \langle 1 \rangle \dot{+} \langle \theta \rangle \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Соответственно, мультипликативная группа $S^\wedge$ аддитивных характеров кольца S имеет вид

$$(S^\wedge, \cdot) = \langle \chi_1 \rangle \dot{\times} \langle \chi_2 \rangle,$$

где характеры $\chi_1, \chi_2 : S \rightarrow \mathbb{C}$ определяются равенствами

$$\chi_1(a + b\theta) = \omega^a, \quad \chi_2(a + b\theta) = (-1)^b, \quad \omega = \sqrt{-1}.$$

Здесь $a \in R = \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$. Рассмотрим характер $\chi = \chi_1 \chi_2$. Тогда

$$\chi(a + b\theta) = \omega^a (-1)^b = \omega^{a+2b}. \quad (7)$$

Пусть u, v — две последовательности периода T над кольцом S . *Кросс-корреляционную функцию* последовательностей u, v определим равенством

$$C_{u,v}(t) = \sum_{i=0}^{T-1} \chi(u(i) - v(i+t)), \quad t \geq 0.$$

Очевидно, $|C_{u,v}(t)| \leq T$ и $C_{u,u}(0) = T$.

Для произвольного унитарного *реверсивного* (т. е. $F(0) \in S^*$) многочлена $F(x) \in S[x]$ степени m и ЛРП $u \in L_S(F)$ верны оценки $T(u) \leq T(F) \leq 2(2^m - 1)$, аналогичные оценкам для многочленов над кольцом Галуа. Если $T(F) = 2(2^m - 1)$, то многочлен $F(x)$ назовем *многочленом максимального периода над кольцом S* , а ЛРП u ранга m и периода $2(2^m - 1)$ назовем *линейной рекуррентной последовательностью максимального периода* (ЛРП МП) над кольцом S . Если $T(\bar{F}) = T(F) = 2^m - 1$, то многочлен $F(x)$ назовем *отмеченным многочленом над кольцом S* .

Если $F(x)$ — отмеченный многочлен, то все ненулевые последовательности из $L_S(F)$ имеют период $2^m - 1$. Пусть $F(x)$ — многочлен максимального периода. Обозначим

$$L_S^*(F) = \{u \in L_S(F) : \bar{u} \neq 0\} = L_S(F) \setminus (2L_S(F) + \theta L_S(F)).$$

Тогда все последовательности из $L_S^*(F)$ имеют период $2(2^m - 1)$, а остальные ненулевые последовательности из $L_S(F)$ — период $2^m - 1$, (см. [2, утв. 3.13]).

Над кольцом S можно определить семейства последовательностей, аналогичные семействам A_0 , B_0 из [7]. Пусть $F(x) \in S[x]$ — такой многочлен Галуа степени $m \geq 1$, что $\bar{F}(x)$ — многочлен максимального периода над полем $\bar{S}$. Тогда $F(x)$ — либо отмеченный многочлен, либо многочлен максимального периода. Если многочлен $F(x)$ отмеченный, то рассмотрим семейство

$$A = L_S(F) \setminus 0.$$

Это семейство состоит из $|S|^m - 1 = 2^{3m} - 1$ последовательностей периода $2^m - 1$ каждая. Если $F(x)$ — многочлен максимального периода, то рассмотрим семейство

$$B = L_S^*(F).$$

Оно состоит из $2^{3m} - 2^{2m}$ последовательностей периода $2(2^m - 1)$.

Многочлен $F(x) \in S[x]$ можно выбрать так, чтобы выполнялось включение $F(x) \in R[x]$. Тогда семейства A_0 , B_0 будут подмножествами в A и B . В общем случае это не так.

В данной работе изучается семейство A . В следующей таблице для сравнения перечислены параметры семейств A_0 , B_0 , A и B : мощность алфавита $m = |R|$ или $m = |S|$, число последовательностей M , период последовательностей T , число циклов M/T и верхняя оценка кросс-корреляции $C_{\max}$, которая для семейства A будет доказана ниже. Информация о семействах A_0 и B_0 из [7] приведена в таблице для удобства их сравнения с семействами A и B .

	q	M	T	M/T	$C_{\max} \leq$
A_0	4	$2^{2m} - 1$	$2^m - 1$	$2^m + 1$	$1 + \sqrt{T + 1}$
B_0	4	$2^{2m} - 2^m$	$2(2^m - 1)$	2^{m-1}	$2 + \sqrt{T + 2}$
A	8	$2^{3m} - 1$	$2^m - 1$	$2^{2m} + 2^m + 1$	$1 + \sqrt{T + 1}$
B	8	$2^{3m} - 2^{2m}$	$2(2^m - 1)$	2^{2m-1}	

Из таблицы видно, что семейство A асимптотически оптимально относительно оценок Сидельникова и Уолша. По сравнению с семейством A_0 , последовательности из A имеют те же периоды и оценки кросс-корреляции, но число последовательностей в семействе A больше, чем в A_0 . Здесь следует учитывать изменение размера алфавита: последовательности в семействах A_0 и B_0 четверичные, а в семействах A и B — восьмеричные. Именно за счет этого и происходит увеличение числа последовательностей в семействах A и B .

4. Функция след над кольцом S

Следующие результаты доказаны в [2].

Пусть $R' = GR(4^m, 4)$ — расширение Галуа степени m (см. [4, 8, 9]) кольца Галуа $R = \mathbb{Z}_4 = GR(4, 4)$. Рассмотрим факторкольцо $S' = R'[x]/(x^2, 2x)$. Обозначим через $\theta \in S'$ образ элемента x при естественном эпиморфизме $R'[x] \rightarrow S'$ с ядром $(x^2, 2x)$. Тогда $\theta^2 = 2\theta = 0$, кольцо S' является расширением $S' = R'[\theta]$ кольца R' элементом θ , а кольцо S естественным образом отождествляется с подкольцом $R[\theta]$ кольца S' . Таким образом,

$$R \subset S \subset S', \quad R \subset R' \subset S', \quad S = R[\theta], \quad S' = R'[\theta].$$

Кольцо S' локально, его максимальный идеал, совпадающий с радикалом, равен

$$J' = J(S') = (2, \theta) = \{2a + b\theta : a, b \in R'\}$$

и имеет индекс нильпотентности 2. Порядки и поля вычетов рассматриваемых колец следующие:

$$|R| = 4, \quad |S| = 8, \quad |R'| = 4^m, \quad |S'| = 8^m,$$

$$\bar{R} = R/2R \cong \bar{S} = S/J = GF(2), \quad \bar{R}' = R'/2R' \cong \bar{S}' = S'/J' = GF(2^m).$$

В дальнейшем через $\bar{a}$, $\bar{F}(x)$ и $\bar{u}$ будем обозначать образ элемента $a \in S'$, многочлена $F(x) \in S'[x]$ и последовательности $u \in (S')^\infty$ под действием естественных эпиморфизмов $S' \rightarrow \bar{S}$, $S'[x] \rightarrow \bar{S}'[x]$ и $(S')^\infty \rightarrow (\bar{S}')^\infty$ соответственно. Элементы кольца S имеют вид

$$S' = \{a + b\theta : a, b \in R'\}, \quad (8)$$

причем $a + b\theta = c + d\theta$, $a, b, c, d \in R'$, тогда и только тогда, когда $a = c$, $\bar{b} = \bar{d}$.

Функция *след* из кольца S' в S определяется равенством

$$\mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Tr}_S^{S'}(a) = \sum_{\varphi \in \mathrm{Aut}(S'/S)} \varphi(a), \quad a \in S'.$$

Автоморфизмы кольца S' над S , а значит, и функцию след можно описать явно, для этого требуется ввести 2-адическое разложение для элементов кольца S' .

Множество $\Gamma(S') = \{b \in S' : b^{2^m} = b\}$ назовем *2-адическим координатным множеством* кольца S' . Справедливо равенство $\Gamma(S') = \Gamma(R')$. В частности, при $m = 1$ получаем $\Gamma(S) = \Gamma(R) = \{0, 1\}$.

Каждый элемент $a \in S'$ однозначно представляется в виде

$$a = a_0 + 2a_1 + \theta a_\theta, \quad a_0, a_1, a_\theta \in \Gamma(S'). \quad (9)$$

Элементы a_0, a_1, a_θ назовем *2-адическими координатами* элемента a и будем обозначать следующим образом:

$$a_0 = \gamma_0(a), \quad a_1 = \gamma_1(a), \quad a_\theta = \gamma_\theta(a), \quad a \in S'. \quad (10)$$

Координату a_0 будем называть *нулевой*, или *младшей*, а координаты a_1, a_θ — *первыми*, или *старшими*. Легко увидеть, что алгебра $(\Gamma(S'), \oplus, \cdot)$, где $a \oplus b = \gamma_0(a + b)$, $a, b \in S'$, есть поле, изоморфное полю $\bar{S}' = GF(2^m)$. Изоморфизм $\Gamma(S') \rightarrow \bar{S}'$ задается соотношениями $a \rightarrow \bar{a}$, $a \in \Gamma(S')$. Для произвольного элемента $a \in S'$ выполняется равенство $\gamma_0(a) = a^{2^m}$.

Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S'/S)$ кольца S' над S является циклической группой порядка m и порождается автоморфизмом Фробениуса ρ , действующим по правилу

$$\rho(a) = \gamma_0(a)^2 + 2\gamma_1(a)^2 + \theta\gamma_\theta(a)^2, \quad a \in S'.$$

Отсюда, а также из соотношения (5) вытекает следующее явное описание функции след с использованием p -адического разложения элементов кольца S' :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_S^{S'}(a) &= \mathrm{Tr}(a_0) + 2\mathrm{Tr}(a_1) + \theta\mathrm{Tr}(a_\theta) = \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \left(a_0^{2^r} + 2a_1^{2^r} + \theta a_\theta^{2^r} \right), \quad a \in S'. \end{aligned} \quad (11)$$

Отображение $\text{Tr}_S^{S'}$ является сюръективным отображением множества S' на S , линейным над S , и его ограничение на множество R' совпадает с функцией след $\text{Tr}_R^{R'}$.

Опишем представление последовательностей семейств A и B с помощью функции след.

Пусть $F(x) \in S[x]$ — реверсивный многочлен Галуа степени m . В кольце S' многочлен $F(x)$ имеет корень α , и $\alpha, \rho(\alpha), \dots, \rho^{m-1}(\alpha)$ — все его корни в S' . Если к тому же $T(\overline{F}) = 2^m - 1$, то многочлен $F(x)$ является отмеченным тогда и только тогда, когда $\alpha = \gamma_0(\alpha)$, т.е. $\alpha \in \Gamma(S')$. В противном случае, т.е. при $\alpha \neq \gamma_0(\alpha)$, $F(x)$ есть многочлен максимального периода.

Для любой ЛРП $u \in L_S(F)$ существует единственный элемент $c \in S'$, для которого

$$u(i) = \text{Tr}_S^{S'}(c\alpha^i), \quad i \geq 0. \quad (12)$$

В частности, такое представление имеют последовательности семейств A и B , причем включения $u \in A$, $u \in B$ равносильны условиям $c \neq 0$ и $\overline{c} \neq 0$ соответственно.

Как известно, функция след $\text{tr} = \text{tr}_q^{q^m}$ над полем удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{x \in GF(q^m)} (-1)^{\text{tr}(x)} = 0, \quad \sum_{x \in GF(q^m)^*} (-1)^{\text{tr}(x)} = -1. \quad (13)$$

Аналогичные соотношения для функции след над кольцом Галуа приведены в [7, с. 1104]. В дальнейшем потребуются следующие соотношения ортогональности для функции след над кольцом S .

Лемма 1. Пусть $\text{Tr} = \text{Tr}_S^{S'}$ и χ — характер кольца S , определенный в (7). Тогда:

- а) $\sum_{x \in S'} \chi(\text{Tr}(x)) = 0$;
- б) $\sum_{x \in J(S')} \chi(\text{Tr}(x)) = 0$;
- в) $\sum_{x \in (S')^*} \chi(\text{Tr}(x)) = 0$;
- г) $\sum_{x \in (R')^*} \chi(\text{Tr}(cx)) = 0$ для любого $c \in (S')^*$.

Доказательство. а) Отображение $\text{Tr}: S' \rightarrow S$ линейно над S и сюръективно, поэтому каждый элемент $a \in S$ имеет одинаковое число прообразов: $|\text{Tr}^{-1}(a)| = |S'|/|S| = 2^{3m-3}$. Поэтому

$$\sum_{x \in S'} \chi(\text{Tr}(x)) = 2^{3m-3} \sum_{a \in S} \chi(a) = 0,$$

где последнее равенство есть соотношение ортогональности для характера χ группы $(S, +)$.

б) Элементы $x \in J(S')$ имеют вид $x = 2x_1 + \theta x_\theta$. Поэтому искомая сумма равна

$$\begin{aligned} \sum_{x_1, x_\theta \in \Gamma(S')} \chi(\text{Tr}(2x_1 + \theta x_\theta)) &= \sum_{x_1, x_\theta \in \Gamma(S')} \chi(2 \text{tr}(x_1) + \theta \text{tr}(x_\theta)) = \\ &= \sum_{x_1, x_\theta \in \Gamma(S')} (-1)^{\text{tr}(x_1)} (-1)^{\text{tr}(x_\theta)} = \sum_{x_1 \in \Gamma(S')} (-1)^{\text{tr}(x_1)} \cdot \sum_{x_\theta \in \Gamma(S')} (-1)^{\text{tr}(x_\theta)} = 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

в) Так как $(S')^* = S \setminus J(S')$, то искомая сумма равна разности сумм из а) и б).

г) Представим элементы c, x в виде $c = a + b\theta$, $x = y(1 + 2z)$, где $a \in R'$, $b, y, z \in \Gamma(R')$, причем $\bar{a} \neq \bar{0}$, $y \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Tr}(cx) &= \text{Tr}((a + b\theta)y(1 + 2z)) = \\ &= \text{Tr}(ay + 2ayz + by\theta) = \text{Tr}(ay) + 2 \text{tr}(ayz) + \theta \text{tr}(by). \end{aligned}$$

Искомая сумма равна

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{y, z \in \Gamma(R') \\ y \neq 0}} \chi(\text{Tr}(ay) + 2 \text{tr}(ayz) + \theta \text{tr}(by)) &= \\ &= \sum_{y \in \Gamma(R')^*} \chi(\text{Tr}(ay) + \theta \text{tr}(by)) \sum_{z \in \Gamma(R')} \chi(2 \text{tr}(ayz)). \end{aligned}$$

Здесь внутренняя сумма по z равна

$$\sum_{\bar{z} \in \bar{R}'} (-1)^{\text{tr}(\bar{a}y\bar{z})} = \sum_{\bar{z} \in \bar{R}'} (-1)^{\text{tr}(\bar{z})} = 0,$$

где первое равенство следует из того, что $\bar{a}y \neq 0$, а второе — из соотношения ортогональности для функции след над полем. Следовательно, и искомая сумма равна 0. $\square$

5. Вычисление тригонометрической суммы над кольцом S

Аналогично [7], для исследования кросс-корреляционной функции последовательностей семейства A рассмотрим тригонометрическую сумму над кольцом S :

$$\zeta(\gamma) = \sum_{x \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma x)), \quad \gamma \in S', \quad (14)$$

где $\chi: S \rightarrow \mathbb{C}$ — характер, определенный в (7), и $\text{Tr} = \text{Tr}_S^{S'}$. Кросс-корреляционная функция любых двух последовательностей $u, u' \in A$ равна $\zeta(\gamma)$ для некоторого γ . Действительно, используя представление (12), запишем

$$u(i) = \text{Tr}(c\alpha^i), \quad u'(i) = \text{Tr}(c'\alpha^i), \quad i \geq 0, \quad (15)$$

где $c, c' \in S' \setminus 0$ и α — корень отмеченного многочлена $F(x)$ степени m и периода $T = 2^m - 1$. Тогда

$$C_{u,u'}(t) = \sum_{i=0}^{T-1} \chi(\text{Tr}(c\alpha^i) - \text{Tr}(c'\alpha^{i+t})) = \sum_{i=0}^{T-1} \chi(\text{Tr}((c - c'\alpha^t)\alpha^i)).$$

Так как многочлен $F(x)$ отмеченный, то $\alpha \in \Gamma(S')$, значит, α^i пробегает множество $\Gamma(S')^*$. Поэтому

$$C_{u,u'}(t) = \zeta(\gamma), \quad \text{где } \gamma = c - c'\alpha^t. \quad (16)$$

Следовательно, для нахождения значений кросс-корреляционной функции последовательностей из A достаточно найти значения суммы $\zeta(\gamma)$.

Утверждение 2. Если $\gamma \in (S')^*$, то $|1 + \zeta(\gamma)|^2 = 2^m$.

Доказательство. По определению $\zeta(\gamma)$

$$\begin{aligned} |\zeta(\gamma)|^2 &= \zeta(\gamma) \bar{\zeta}(\gamma) = \sum_{x \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma x)) \cdot \sum_{y \in \Gamma(S')^*} \bar{\chi}(\text{Tr}(\gamma y)) = \\ &= \sum_{x, y \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma x)) \chi(-\text{Tr}(\gamma y)) = \sum_{x, y \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma(x - y))) = \\ &= \sum_{x, y \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma x(1 - \frac{y}{x}))), \end{aligned}$$

где черта над комплексным числом означает комплексное сопряжение. Пусть $x \in \Gamma(S')^*$ фиксирован, а y пробегает множество $\Gamma(S')^* = \Gamma(R')^*$. Тогда частное y/x пробегает в точности множество $\Gamma(S')^*$. В силу [7, лемма 1, с. 1105] разность $1 - \frac{y}{x}$ пробегает в точности по одному разу нулевое значение (при $y = x$) и множество представителей всех различных смежных классов мультипликативной группы $(R')^*$ по подгруппе $\Gamma(R')^*$, кроме представителей двух классов $\pm\Gamma(R')^*$. Отсюда следует, что разность

$$z = x - y = x(1 - \frac{y}{x}), \quad x, y \in \Gamma(S')^*,$$

$|\Gamma(S')^*| = 2^m - 1$ раз принимает значение 0 при $y = x$, а при $y \neq x$ принимает в точности по одному разу все значения из $(R')^* \setminus (\pm\Gamma(R')^*)$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} |\zeta(\gamma)|^2 &= (2^m - 1)\chi(\text{Tr}(0)) + \sum_{z \in (R')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma z)) - \\ &- \sum_{z \in \Gamma(R')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma z)) - \sum_{z \in \Gamma(R')^*} \chi(\text{Tr}(-\gamma z)). \end{aligned}$$

Здесь $\chi(\text{Tr}(0)) = \chi(0) = 1$, первая сумма равна 0 по лемме 1г), а вторая и третья суммы равны $\zeta(\gamma)$ и $\bar{\zeta}(\gamma)$ по определению (14). В итоге

$$|\zeta(\gamma)|^2 = 2^m - 1 - \zeta(\gamma) - \bar{\zeta}(\gamma).$$

Отсюда $|1 + \zeta(\gamma)|^2 = (1 + \zeta(\gamma))(1 + \bar{\zeta}(\gamma)) = 2^m$. $\square$

Теорема 3. Пусть элемент $\gamma \in S'$ имеет p -адическое разложение $\gamma = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \theta\gamma_\theta$. Тогда функция $\zeta(\gamma)$ принимает следующие значения:

$$\zeta(\gamma) = \begin{cases} 2^m - 1, & \text{если } \gamma_0 = 0, \gamma_1 = \gamma_\theta, \\ -1, & \text{если } \gamma_0 = 0, \gamma_1 \neq \gamma_\theta, \\ -1 \pm 2^s \pm \omega 2^s, & \text{если } \gamma_0 \neq 0, m = 2s + 1 \text{ нечетно}, \\ -1 \pm 2^s, -1 \pm \omega 2^s, & \text{если } \gamma_0 \neq 0, m = 2s \text{ чётно}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\gamma_0 = 0$. Тогда $\gamma = 2\gamma_1 + \theta\gamma_\theta$, и

$$\begin{aligned} \zeta(\gamma) &= \sum_{x \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(2\gamma_1 + \theta\gamma_\theta)x) = \\ &= \sum_{x \in \Gamma(S')^*} (-1)^{\text{tr}(\gamma_1 x)} (-1)^{\text{tr}(\gamma_\theta x)} = \sum_{x \in \Gamma(S')^*} (-1)^{\text{tr}((\gamma_1 + \gamma_\theta)x)}. \end{aligned}$$

Если $\gamma_1 + \gamma_\theta = 0$, то сумма равна $|\Gamma(S')^*| = 2^m - 1$. Если же $\gamma_1 + \gamma_\theta \neq 0$, то сумма равна -1 ввиду (13).

Пусть теперь $\gamma_0 \neq 0$. По утверждению 2 имеем $|1 + \zeta(\gamma)|^2 = 2^m$. Пусть $1 + \zeta(\gamma) = a + b\omega$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$|a + b\omega|^2 = a^2 + b^2 = 2^m, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

При $m = 1$ все очевидно, поэтому будем считать, что $m \geq 2$. Числа a, b одной четности. Если оба они нечетны, то $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$, чего не может быть. Значит, числа a, b четные, $a = 2a_1, b = 2b_1, a_1^2 + b_1^2 = 2^{m-2}$. Рассуждая аналогично, придем к уравнению $a_s^2 + b_s^2 = 2^{m-2s}$, где $a = 2^s a_s, b = 2^s b_s$. Тогда $a_s^2 + b_s^2 = 2$, если m нечетно, и $a_s^2 + b_s^2 = 1$, если m четно. Каждое из этих уравнений имеет 4 решения: $(a_s, b_s) = (\pm 1, \pm 1)$, если m нечетно, и $(a_s, b_s) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$, если m четно. Отсюда получаем, что $\zeta(\gamma)$ принимает указанные в формулировке теоремы значения. $\square$

Таким образом, сумма $\zeta(\gamma)$ принимает 6 различных значений. Теперь подсчитаем кратности, с которыми принимаются эти значения при всевозможных $\gamma \in S'$. Рассмотрим сумму $\zeta(\gamma), \gamma \in S'$, как отображение $\zeta: S' \rightarrow \mathbb{C}$. Для $z \in \mathbb{C}$ обозначим

$$N_\zeta(z) = |\zeta^{-1}(z)| = |\{\gamma \in S': \zeta(\gamma) = z\}|.$$

Целое число $N_\zeta(z) \geq 0$ назовем *кратностью* значения z функции ζ . Вместо равенства $N_\zeta(z) = n$ говорят, что функция $\zeta(\gamma)$ принимает n раз значение z или что кратность значения z равна n . Набор всех пар $(z, N_\zeta(z)), z \in \Gamma\zeta(S')$, называется *распределением значений* функции $\zeta(\gamma)$.

Теорема 4. Функция $\zeta = \zeta(\gamma): S' \rightarrow \mathbb{C}$ при $\gamma \in S'$ имеет следующее распределение значений. Если $\gamma \notin (S')^*$, то

$$\zeta(\gamma) = \begin{cases} 2^m - 1 & (2^m \text{ раз}), \\ -1 & (2^{2m} - 2^m \text{ раз}). \end{cases} \quad (17)$$

Если $\gamma \in (S')^*$, то при $m = 2s + 1$ нечетном

$$\zeta(\gamma) = \begin{cases} -1 + 2^s \pm \omega 2^s & ((2^m - 1)(2^{4s} + 2^{3s}) \text{ раз}), \\ -1 - 2^s \pm \omega 2^s & ((2^m - 1)(2^{4s} - 2^{3s}) \text{ раз}), \end{cases} \quad (18)$$

а при $m = 2s$ четном

$$\zeta(\gamma) = \begin{cases} -1 + 2^s & ((2^m - 1)(2^{4s-2} + 2^{3s-1}) \text{ раз}), \\ -1 - 2^s & ((2^m - 1)(2^{4s-2} - 2^{3s-1}) \text{ раз}), \\ 1 \pm \omega 2^s & ((2^m - 1) \cdot 2^{4s-2} \text{ раз}). \end{cases} \quad (19)$$

Доказательство. Пусть $\gamma = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \theta\gamma_\theta \in S'$. По теореме 3 равенство $\zeta(\gamma) = 2^m - 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_\theta$. В кольце S' существует в точности 2^m таких значений γ .

Аналогично, $\zeta(\gamma) = -1$ тогда и только тогда, когда $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 \neq \gamma_\theta$. Таких значений γ в точности $2^{2m} - 2^m$. Соотношение (17) доказано.

Пусть теперь $\gamma \in (S')^*$. Тогда $\zeta(\gamma)$ принимает значения, перечисленные в теореме 3, и эти значения указаны в (18), (19). Подсчитаем кратности этих значений.

Из определения (14) следует, что значения $\zeta(\gamma)$ одинаковы для всех γ , принадлежащих одному смежному классу группы $(S')^*$ по подгруппе $\Gamma(S')^*$. Пусть H — некоторая полная система представителей смежных классов $(S')^*$ по $\Gamma(S')^*$. Тогда

$$|H| = |(S')^*|/|\Gamma(S')^*| = (2^{3m} - 2^{2m})/(2^m - 1) = 2^{2m}.$$

Кратности значений функции $\zeta(\gamma)$, $\gamma \in (S')^*$, равны кратностям значений функции $\zeta(\gamma)$, $\gamma \in H$, умноженным на $|\Gamma(S')^*| = 2^m - 1$.

Так как $(-1)^{2^m} = 1 \neq -1$, то $-1 \notin \Gamma(S')$. Поэтому элементы γ и $-\gamma$ представляют различные смежные классы $(S')^*$ по $\Gamma(S')^*$. Будем считать, что система представителей H удовлетворяет условию

$$\gamma \in H \Rightarrow -\gamma \in H. \quad (20)$$

Пусть $m = 2s + 1$. Рассмотрим разбиение множества H на 4 подмножества в соответствии с тем, какие значения принимает функция $\zeta(\gamma)$:

$$H = H_{++} \cup H_{+-} \cup H_{-+} \cup H_{--},$$

где

$$H_{\pm,\pm} = \{\gamma \in H : \zeta(\gamma) = -1 \pm 2^s \pm \omega 2^s\}.$$

Из определения (14) следует, что $\zeta(-\gamma) = \bar{\zeta}(\gamma)$. Поэтому ввиду (20) $|H_{\pm+}| = |H_{\pm-}|$. Обозначим

$$|H_{++}| = |H_{+-}| = M, \quad |H_{-+}| = |H_{--}| = N.$$

Тогда $2M + 2N = |H| = 2^{2m} = 2^{4s+2}$.

Применяя лемму 1в), находим:

$$\sum_{\gamma \in H} \zeta(\gamma) = \sum_{\gamma \in H} \sum_{x \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma x)) = \sum_{y \in (S')^*} \chi(\text{Tr}(y)) = 0. \quad (21)$$

Сумму в левой части можно разбить на четыре суммы по $\gamma \in H_{\pm, \pm}$. В результате получим соотношение

$$M(-1+2^s+\omega 2^s)+M(-1+2^s-\omega 2^s)+N(-1-2^s+\omega 2^s)+N(-1-2^s-\omega 2^s)=0,$$

или $M+N=2^s(M-N)$. Решение системы из двух уравнений

$$\begin{cases} 2M+2N=2^{4s+2}, \\ M+N=2^s(M-N), \end{cases}$$

имеет вид $M=2^{4s}+2^{3s}$, $N=2^{4s}-2^{3s}$. Это кратности значений функции $\zeta(\gamma)$ при $\gamma \in H$. Умножая их на 2^m-1 , получаем соотношение (18).

Пусть $m=2s$. Рассуждая аналогично, обозначим

$$\begin{aligned} M &= |\{\gamma \in H: \zeta(\gamma) = -1+2^s\}|, \\ N &= |\{\gamma \in H: \zeta(\gamma) = -1-2^s\}|, \\ P &= |\{\gamma \in H: \zeta(\gamma) = -1 \pm \omega 2^s\}|. \end{aligned}$$

Тогда $M+N+2P=|H|=2^{2m}=2^{4s}$. Разбивая равную нулю сумму (21) на четыре суммы, приходим к равенству

$$M(-1+2^s)+N(-1-2^s)+P(-1+\omega 2^s)+P(-1-\omega 2^s)=0,$$

откуда $M-N=2^s$. Чтобы найти третье уравнение относительно M, N, P , вычислим «второй момент»:

$$\begin{aligned} m_2 &= \sum_{\gamma \in H} \zeta(\gamma)^2 = \sum_{\gamma \in H} \left(\sum_{x \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma x)) \right)^2 = \\ &= \sum_{\gamma \in H} \sum_{x, y \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma x)) \chi(\text{Tr}(\gamma y)). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\chi(\text{Tr}(\gamma x)) \chi(\text{Tr}(\gamma y)) = \chi(\text{Tr}(\gamma(x+y))) = \chi\left(\text{Tr}\left(\gamma x\left(1+\frac{y}{x}\right)\right)\right).$$

Заменяя y/x на $z \in \Gamma(S')^*$, получаем

$$m_2 = \sum_{\gamma \in H} \sum_{x, z \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(\gamma x(1+z))).$$

Выделим слагаемое при $z = 1$:

$$\begin{aligned} m_2 &= \sum_{\gamma \in H} \sum_{x \in \Gamma(S')^*} \chi(\text{Tr}(2\gamma x)) + \sum_{\gamma \in H} \sum_{x \in \Gamma(S')^*} \sum_{z \in \Gamma(S')^* \setminus \{1\}} \chi(\text{Tr}(\gamma x(1+z))) = \\ &= \sum_{x \in (S')^*} \chi(\text{Tr}(2x)) + \sum_{z \in \Gamma(S')^* \setminus \{1\}} \sum_{x \in (S')^*} \chi(\text{Tr}(x(1+z))). \end{aligned}$$

В силу леммы 1в) вторая сумма равна 0. Тогда

$$\begin{aligned} m_2 &= \sum_{x \in (S')^*} \chi(\text{Tr}(2\gamma x)) = \sum_{x \in (S')^*} (-1)^{\text{tr}(\overline{\gamma x})} = \\ &= 2^{2m} \sum_{\overline{x} \in (\overline{S'})^*} (-1)^{\text{tr}(\overline{\gamma x})} = 2^{2m} \cdot (-1) = -2^{2m}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к определению второго момента, разобьем сумму (22) на четыре суммы в соответствии с четырьмя значениями, принимаемыми функцией $\zeta(\gamma)$:

$$m_2 = M(-1 + 2^s)^2 + N(-1 - 2^s)^2 + P(-1 + \omega 2^s)^2 + P(-1 - \omega 2^s)^2 = -2^{2m},$$

или после сокращений $M + N - 2P = 0$. Решая систему из трех уравнений

$$\begin{cases} M + N + 2P = 2^{4s}, \\ M - N = 2^{3s}, \\ M + N - 2P = 0, \end{cases}$$

получаем $M = 2^{4s-2} + 2^{3s-1}$, $N = 2^{4s-2} - 2^{3s-1}$, $P = 2^{4s-2}$. Умножение этих кратностей значений функции $\zeta(\gamma)$, $\gamma \in H$, на $2^m - 1$ дает соотношения (19). $\square$

Следствие. Пусть H — произвольная полная система представителей смежных классов группы $(S')^*$ по подгруппе $\Gamma(S')^*$, удовлетворяющая условию (20). Тогда функция $\zeta(\gamma)$ при $\gamma \in H$ имеет следующее распределение значений: если $m = 2s + 1$ нечетно, то

$$\zeta(\gamma) = \begin{cases} -1 + 2^s \pm \omega 2^s & (2^{4s} + 2^{3s} \text{ раз}), \\ -1 - 2^s \pm \omega 2^s & (2^{4s} - 2^{3s} \text{ раз}), \end{cases}$$

и если $m = 2s$ четно, то

$$\zeta(\gamma) = \begin{cases} -1 + 2^s & (2^{4s-2} + 2^{3s-1} \text{ раз}), \\ -1 - 2^s & (2^{4s-2} - 2^{3s-1} \text{ раз}), \\ -1 \pm \omega 2^s & (2^{4s-2} \text{ раз}). \end{cases}$$

6. Корреляционная функция семейства A

Для $z \in \mathbb{C}$ обозначим

$$N_A(z) = |\{(u, v, t) : C_{u,v}(t) = z, u, v \in A, 0 \leq t < T\}|.$$

Набор пар $(z, N_A(z))$, где числа $z \in \mathbb{C}$ берутся такими, что $N_A(z) > 0$, называется распределением значений кросс-корреляционной функции семейства A , а число $N_A(z)$ — кратностью значения z . Пользуясь найденными кратностями значений функции $\zeta(\gamma)$ и соотношениями (14), найдем кратности значений кросс-корреляционной функции $C_{u,v}(t)$ для последовательностей $u, v \in A$.

Теорема 5. Пусть $F(x) \in S[x]$ — отмеченный многочлен степени $m \geq 1$ и периода $T = 2^m - 1$, и пусть $A = L_S(F) \setminus 0$. Тогда функция кросс-корреляции $C_{u,v}(t)$, $u, v \in A$, $0 \leq t < T$, принимает следующие значения со следующими кратностями:

$$C_{u,v}(t) = \begin{cases} 2^m - 1 & ((2^m - 1)((2^{3m} - 2)(2^m + 1) + 1) \text{ раз}), \\ -1 & ((2^m - 1)(2^{3m} - 2)(2^{2m} - 2^m) \text{ раз}), \end{cases} \quad (23)$$

кроме того, если $m = 2s + 1$ нечетно, то

$$C_{u,v}(t) = \begin{cases} -1 + 2^s \pm \omega 2^s & ((2^m - 1)^2 (2^{3m} - 2) (2^{4s} + 2^{3s}) \text{ раз}), \\ -1 - 2^s \pm \omega 2^s & ((2^m - 1)^2 (2^{3m} - 2) (2^{4s} - 2^{3s}) \text{ раз}), \end{cases} \quad (24)$$

и если $m = 2s$ четно, то

$$C_{u,v}(t) = \begin{cases} -1 + 2^s & ((2^m - 1)^2 (2^{3m} - 2) (2^{4s-2} + 2^{3s-1}) \text{ раз}), \\ -1 - 2^s & ((2^m - 1)^2 (2^{3m} - 2) (2^{4s-2} - 2^{3s-1}) \text{ раз}), \\ -1 \pm \omega 2^s & ((2^m - 1)^2 (2^{3m} - 2) \cdot 2^{4s-2} \text{ раз}). \end{cases} \quad (25)$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in S'$ — корень многочлена $F(x)$ и последовательности $u, u' \in A$ имеют представления (15) функцией след. Согласно (16) $C_{u,u'}(t) = \zeta(\gamma)$, где $\gamma = c - c'\alpha^t$. Обозначим

$$N(\gamma) = |\{(c, c', t) : \gamma = c - c'\alpha^t, c, c' \in S' \setminus 0, 0 \leq t < T\}|.$$

Тогда, очевидно,

$$N_A(z) = \sum_{\gamma \in S', \zeta(\gamma)=z} N(\gamma). \quad (26)$$

Найдем величину $N(\gamma)$ для фиксированного $\gamma \in S'$.

Условие $\gamma = c - c'\alpha^t$ запишем в виде

$$c = \gamma + c'\alpha^t, \quad c, c' \in S' \setminus 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (27)$$

и рассмотрим его как уравнение относительно c, c', t . Пусть вначале $\gamma \neq 0$. Заметим, что для каждого t существует единственное такое $c' \in S' \setminus 0$, что $\gamma + c'\alpha^t = 0$, и для этого c' уравнение (27) не имеет решений $c \in S' \setminus 0$. Таких пар (c', t) имеется T штук. Для остальных пар (c', t) , число которых равно $(2^{3m} - 1)T - T = (2^{3m} - 2)T$, уравнение (27) имеет единственное решение c . Поэтому число решений

$$N(\gamma) = (2^{3m} - 2)T = (2^{3m} - 2)(2^m - 1), \quad \gamma \neq 0.$$

Если же $\gamma = 0$, то для каждой пары (c', t) существует единственное решение c , значит, число решений уравнения (27) равно числу пар (c', t) , т. е.

$$N(0) = (2^{3m} - 1)T = (2^{3m} - 1)(2^m - 1).$$

Теперь найдем сумму (26), подставив в нее найденные значения $N(\gamma)$. Согласно определению (14) $\zeta(0) = |\Gamma(S')^*| = 2^m - 1$. Поэтому в сумме (26) величина $N(0)$ присутствует только при $z = 2^m - 1$. В этом случае

$$N_A(2^m - 1) = \sum_{\gamma \in S', \zeta(\gamma)=2^m-1} N(\gamma) = N(0) + \sum_{\gamma \in S' \setminus 0, \zeta(\gamma)=2^m-1} (2^{3m} - 2)(2^m - 1).$$

По теореме 4 количество таких элементов $\gamma \in S' \setminus 0$, что $\zeta(\gamma) = 2^m - 1$, равно $N_\zeta(2^m - 1) = 2^m$. Отсюда

$$N_A(2^m - 1) = N(0) + 2^m(2^{3m} - 2)(2^m - 1) = (2^m - 1)((2^{3m} - 2)(2^m + 1) + 1).$$

При $z \neq 2^m - 1$ сумма (26) вычисляется проще:

$$N_A(z) = \sum_{\gamma \in S', \zeta(\gamma)=z} (2^{3m} - 2)(2^m - 1) = N_\zeta(z)(2^{3m} - 2)(2^m - 1).$$

Остается воспользоваться значениями $N_\zeta(z)$, найденными в теореме 4. $\square$

Следствие. Для кросс-корреляционной функции последовательностей из семейства A справедлива оценка

$$C_{\max} \leq 1 + \sqrt{T + 1}.$$

Доказательство. Если $m = 2s + 1$, то

$$C_{\max} \leq \sqrt{(-1 - 2^s)^2 + (2^s)^2} = \sqrt{2^{2s+1} + 2^{s+1} + 1} \leq 1 + \sqrt{2^{2s+1}}.$$

Если же $m = 2s$, то

$$C_{\max} \leq 1 + 2^s = 1 + \sqrt{2^{2s}}.$$

Так как $T + 1 = 2^m$, то в обоих случаях получили требуемую оценку. $\square$

На практике используются семейства, которые не содержат последовательностей, являющихся сдвигами друг друга. Построим такое семейство на основе семейства A .

Пусть $\tilde{A}$ — некоторое полное множество представителей сдвигов последовательностей семейства A . Так как A содержит $2^{3m} - 1$ последовательностей периода $2^m - 1$, то множество $\tilde{A}$ содержит $(2^{3m} - 1)/(2^m - 1) = 2^{2m} + 2^m + 1$ последовательностей. Понятно, что кросс-корреляционная функция последовательностей семейства $\tilde{A}$ принимает те же значения, что и кросс-корреляционная функция последовательностей семейства A . Ниже мы подсчитаем распределение этих значений для семейства $\tilde{A}$, а также покажем, что это распределение не зависит от выбора представителей, образующих $\tilde{A}$.

Занумеруем последовательности, входящие в семейство $\tilde{A}$, следующим образом:

$$\tilde{A} = \{u_0, u_1, \dots, u_{2^m+2^{2m}}\}.$$

Будем считать, что последовательность u_n имеет следующее представление функцией след:

$$u_n(i) = \text{Tr}(c_n \alpha^i), \quad i \geq 0, \quad 0 \leq n \leq 2^m + 2^{2m},$$

где $c_n \in S' \setminus 0$. Рассмотрим подробнее последовательности u_n и коэффициенты c_n .

Пусть $u \in A$ — произвольная последовательность с представлением функцией след $u(i) = \text{Tr}(c\alpha^i)$. Ее циклические сдвиги есть последовательности из A , у которых константа в представлении функцией след равна $c\alpha^t$, $0 \leq t < T$. Возможны два случая: $c \in J(S') \setminus 0$ или $c \in (S')^*$.

Если $c \in J(S') \setminus 0$, то $c = 2x + \theta y$, где $x, y \in \Gamma(S')$, и $c\alpha^t = cx\alpha^t + cy\alpha^t$. Так как $|J(S') \setminus 0| = 2^{2m} - 1$, то в множество $\tilde{A}$ входит $(2^{2m} - 1)/(2^m - 1) = 2^m + 1$ таких последовательностей. Одна из них имеет константу c вида $c = 2x + \theta x$. Эту последовательность обозначим через u_0 , а остальные — $u_1, \dots, u_{2^m}$. Множество соответствующих им констант обозначим:

$$H_0 = \{c_0, c_1, \dots, c_{2^m}\}.$$

Если же $c \in (S')^*$, то константы $c\alpha^t$, $0 \leq t < T$, соответствующие сдвигам последовательности u , образуют смежный класс группы $(S')^*$ по подгруппе $\Gamma(S')^*$ с представителем c . Поэтому элементы $c_{2^m+1}, \dots, c_{2^m+2^m}$ образуют полную систему представителей смежных классов группы $(S')^*$ по подгруппе $\Gamma(S')^*$. Обозначим эту систему

$$H = \{c_{2^m+1}, \dots, c_{2^m+2^m}\}.$$

Пусть $H_1 = H_0 \cup H$. Окончательно можем записать:

$$H_1 = H_0 \cup H = \{c_0, c_1, \dots, c_{2^m}, c_{2^m+1}, \dots, c_{2^m+2^m}\},$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{2^m} \in J(S')$, причем $\gamma_1(c_0) = \gamma_\theta(c_0)$ и $\gamma_1(c_i) \neq \gamma_\theta(c_i)$ для $1 \leq i \leq 2^m$, и $c_{2^m+1}, \dots, c_{2^m+2^m} \in (S')^*$.

Заметим, что если $c \in J(S')$, то $c = -c$. Если же $c \in (S')^*$, то элементы c и $-c$ различны и лежат в разных смежных классах по подгруппе $\Gamma(S')^*$, поскольку $-1 \notin \Gamma(S')$. Для последовательностей из A это означает, что если $u \in A$, то либо $u = -u$ (в случае, когда $u(i) \in J(S')$, $i \geq 0$), либо последовательности u , $-u$ лежат на разных циклах. Поэтому семейство $\tilde{A}$ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$u \in \tilde{A} \Rightarrow -u \in \tilde{A}. \quad (28)$$

Это условие равносильно тому, что множество H удовлетворяет условию (20).

Теорема 6. Пусть $F(x) \in S[x]$ — отмеченный многочлен степени $m \geq 1$ и периода $T = 2^m - 1$, $A = L_S(F) \setminus 0$, и пусть $\tilde{A}$ — некоторое полное множество представителей сдвигов последовательностей семейства A , удовлетворяющее условию (28). Тогда $\tilde{A}$ состоит из $2^{2^m} + 2^m + 1$ последовательностей периода T , и функция кросс-корреляции $C_{u,v}(t)$, $u, v \in \tilde{A}$, $0 \leq t < T$, принимает следующие значения со следующими кратностями:

$$C_{u,v}(t) = \begin{cases} 2^m - 1 & (2^{3m} + 2^{2m} + 2^m - 1 \text{ раз}), \\ -1 & (2^m (2^{3m} - 2) \text{ раз}), \end{cases} \quad (29)$$

кроме того, если $m = 2s + 1$ нечетно, то

$$C_{u,v} = \begin{cases} -1 + 2^s \pm \omega 2^s & ((2^{3m} - 2) (2^{4s} + 2^{3s}) \text{ раз}), \\ -1 - 2^s \pm \omega 2^s & ((2^{3m} - 2) (2^{4s} - 2^{3s}) \text{ раз}), \end{cases} \quad (30)$$

а если $m = 2s$ чётно, то

$$C_{u,v} = \begin{cases} -1 + 2^s & ((2^{3m} - 2)(2^{4s-2} + 2^{3s-1}) \text{ раз}), \\ -1 - 2^s & ((2^{3m} - 2)(2^{4s-2} - 2^{3s-1}) \text{ раз}), \\ -1 \pm \omega 2^s & ((2^{3m} - 2) \cdot 2^{4s-2} \text{ раз}). \end{cases} \quad (31)$$

Доказательство. Для $z \in \mathbb{C}$ обозначим

$$N_{\tilde{A}}(z) = |\{(u_i, u_j, t) : C_{u_i, u_j}(t) = z, u_i, u_j \in \tilde{A}, 0 \leq t < T\}|.$$

Наша цель заключается в том, чтобы найти $N_{\tilde{A}}(z)$ для всех z . Согласно (16)

$$C_{u_i, u_j}(t) = \zeta(\gamma), \quad \text{где } \gamma = c_i - c_j \alpha^t.$$

Обозначим

$$\tilde{N}(\gamma) = |\{(c_i, c_j, t) : \gamma = c_i - c_j \alpha^t, 0 \leq i, j \leq 2^{2m} + 2^m, 0 \leq t < T\}|.$$

Тогда, очевидно,

$$N_{\tilde{A}}(z) = \sum_{\gamma \in S', \zeta(\gamma)=z} \tilde{N}(\gamma). \quad (32)$$

Найдем величину $\tilde{N}(\gamma)$ для $\gamma \in S'$.

Для заданного γ рассмотрим уравнение $\gamma = c_i - c_j \alpha^t$ относительно неизвестных (i, j, t) , где $c_i, c_j \in H_1$, $0 \leq t < T$. Согласно определению множества H_1 произведение $c_j \alpha^t$ пробегает по одному разу все элементы из $S' \setminus 0$. Поэтому если $\gamma \notin H_1$, то $c_i - \gamma \neq 0$, и для каждого i уравнение имеет единственное решение (j, t) . Общее число решений уравнения равно $2^{2m} + 2^m + 1$.

Если же $\gamma \in H_1$, то уравнение имеет единственное решение (j, t) для каждого i , за исключением того, для которого $\gamma = c_i$; в последнем случае решения нет. Общее число решений равно $2^{2m} + 2^m$. Таким образом,

$$\tilde{N}(\gamma) = \begin{cases} 2^{2m} + 2^m + 1, & \gamma \in S' \setminus H_1, \\ 2^{2m} + 2^m, & \gamma \in H_1. \end{cases}$$

Подставляя в (32), получаем

$$\begin{aligned} N_{\tilde{A}}(z) &= \sum_{\gamma \in S', \zeta(\gamma)=z} (2^{2m} + 2^m + 1) - \sum_{\gamma \in H_1, \zeta(\gamma)=z} 1 = \\ &= (2^{2m} + 2^m + 1)N_{\zeta}(z) - |\{\gamma \in H_1 : \zeta(\gamma) = z\}|. \end{aligned} \quad (33)$$

Величина $N_{\zeta}(z)$ найдена в теореме 4. Остается подсчитать величину

$$N_{\zeta, H_1}(z) = |\{\gamma \in H_1 : \zeta(\gamma) = z\}|.$$

Это будет сделано с помощью теоремы 3.

Напомним, что множество $H_1 = H_0 \cup H$ содержит один элемент $c_0 \in J(S')$, у которого $\gamma_1(c_0) = \gamma_\theta(c_0)$, и 2^m элементов $c_1, \dots, c_{2^m} \in J(S')$, у которых $\gamma_1(c_i) \neq \gamma_\theta(c_i)$. Остальные элементы из H_1 лежат в $(S')^*$. Отсюда по теореме 3 получаем, что

$$N_{\zeta, H_1}(2^m - 1) = 1, \quad N_{\zeta, H_1}(-1) = 2^m.$$

Подставляя в (33) и учитывая, что по теореме 4 выполняются равенства $N_{\zeta}(2^m - 1) = 2^m$ и $N_{\zeta}(-1) = 2^{2m} - 2^m$, находим

$$N_{\tilde{A}}(2^m - 1) = (2^{2m} + 2^m + 1)2^m - 1 = 2^{3m} + 2^{2m} + 2^m - 1,$$

$$N_{\tilde{A}}(-1) = (2^{2m} + 2^m + 1)(2^{2m} - 2^m) - 2^m = 2^m(2^{3m} - 2).$$

Соотношение (29) доказано.

Найдем теперь $N_{\zeta, H_1}(z)$ при $z \notin \{2^m - 1, -1\}$. По теореме 3 тогда $\zeta(\gamma) = z$ только для $\gamma \in (S')^*$. Следовательно,

$$N_{\zeta, H_1}(z) = N_{\zeta, H}(z) = |\{\gamma \in H : \zeta(\gamma) = z\}|.$$

Эта величина найдена в следствии теоремы 4. В результате соотношение (33) принимает вид

$$N_{\tilde{A}}(z) = (2^{2m} + 2^m + 1)N_{\zeta}(z) - N_{\zeta, H}(z),$$

где величина $N_{\zeta}(z)$ найдена в теореме 4, а величина $N_{\zeta, H}(z)$ — в следствии теоремы 4. Сравнивая теорему 4 и ее следствие, находим, что $N_{\zeta}(z) = (2^m - 1)N_{\zeta, H}(z)$, поэтому

$$N_{\tilde{A}}(z) = ((2^{2m} + 2^m + 1)(2^m - 1) - 1)N_{\zeta, H}(z) = (2^{3m} - 2)N_{\zeta, H}(z).$$

Пользуясь теперь следствием теоремы 4, получаем соотношения (30) и (31). $\square$

Список литературы

1. Кузьмин А. С., Куракин В. Л., Нечаев А. А. Статистические свойства линейных рекуррент над кольцами Галуа и квазифробениусовыми модулями характеристики 4. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 4. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, с. 91–128.
2. Нечаев А. А., Кузьмин А. С., Куракин В. Л. Структурные, аналитические и статистические свойства линейных и полилинейных рекуррент. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 3. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000, с. 155–194.
3. Нечаев А. А., Кузьмин А. С., Куракин В. Л. Вполне равномерные линейные рекурренты над кольцами Галуа и QF-модулями характеристики 4. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 5. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, с. 103–158.
4. Нечаев А. А. Код Кердока в циклической форме. — Дискретная математика, 1989, т. 1, вып. 4, с. 123–139.
5. Нечаев А. А. Конечные квазифробениусовы модули, приложения к кодам и линейным рекуррентам. — Фундам. и Прикл. Матем., 1995, т. 1, № 1, с. 229–254.
6. Сидельников В. М. О взаимной корреляции последовательностей. — Доклады АН СССР, 1971, т. 196, с. 531–534.
7. Boztas S., Hammons R., Kumar P. V. 4-phase sequences with near-optimum correlation properties. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1992, v. 38, № 3, p. 1101–1113.
8. McDonald B. R. Finite rings with identity. — New York, Dekker, 1974.
9. Nechaev A. A. Finite rings with applications. — Handbook of Algebra (M. Hazewinkel ed.), v. 5, 2008, Elsevier, p. 213–320.
10. Welch L. R. Lower bounds on the maximum cross correlation of signals. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1974, v. 20, № 3, p. 397–399.