Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Полин, Перестановочные решетки отношений эквивалентности на декартовых произведениях и согласованные с ними системы уравнений. II, *Матем. вопр. криптогр.*, 2017, том 8, выпуск 3, 85–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:48:51

**Перестановочные решетки отношений
эквивалентности на декартовых
произведениях и согласованные
с ними системы уравнений. II**
С. В. Полин

Академия криптографии Российской Федерации, г. Москва

Получено 20.IV.2015

Аннотация. Описаны введенные автором ранее *GA*-решетки и соответствующие им просто решаемые системы уравнений.

Ключевые слова: системы уравнений, решетки отношений

Permutation lattices of equivalence relations on the Cartesian products and systems of equations concordant with these lattices. II

S. V. Polin

Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow

Abstract. A description of *GA*-lattices previously introduced by the author is given and easily solved systems of equations concordant with these lattices are presented.

Keywords: systems of equations, lattice of relations

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2017, v. 8, № 3, pp. 85–108 (Russian)

© Академия криптографии Российской Федерации, 2017 г.

Настоящая работа является продолжением [12] и использует введенные в ней обозначения. Нумерация разделов, утверждений и формул продолжает нумерацию указанной работы. Ссылки вида «теорема 1.1», «лемма 2.1», «равенство (3.2)» являются ссылками на соответствующие утверждения и формулы работы [12].

4. Условие неразложимости GA -решеток

Вернемся к рассмотрению общего случая множества $A = \prod_{i=1}^n A_i$ и GA -решетки $\mathbf{L}_A$ отношений эквивалентности на множестве A .

Для произвольного подмножества $V \subset Z_n$ через $V^{\{2\}}$ обозначим множество всех подмножеств множества V , состоящих из двух различных элементов. Другими словами, $V^{\{2\}}$ состоит из всех пар $\{v_1, v_2\}$, где $v_1, v_2 \in V$ и $v_1 \neq v_2$. При этом пары $\{v_1, v_2\}$ и $\{v_2, v_1\}$ считаются одинаковыми.

В соответствии с теоремой 1.1 для всех пар $\{i_1, i_2\}$ определена GA -решетка

$$\mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}} = \langle \theta \in \mathcal{E}(B^2) \mid \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\theta) \in \mathbf{L}_A \rangle$$

отношений эквивалентности на множестве $A_{\{i_1, i_2\}} = A_{i_1} \times A_{i_2}$. При этом отображение $\zeta_{\{i_1, i_2\}}$ осуществляет изоморфизм решетки $\mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}$ и решетки $[\pi_{\{i_1, i_2\}}^n, \nabla_A]_{\mathbf{L}_A}$.

Через $\mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}^*$ обозначим множество $\mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}} \setminus \mathbf{D}^{(2)}(A_{\{i_1, i_2\}})$.

Лемма 4.1. Пусть $\theta \in \mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}^*$. Тогда отношение $\varphi = \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\theta)$ является коатомом решетки $\mathbf{L}_{B^n}$.

Доказательство. Из формулы (1.5) следует, что $\zeta_{\{i_1, i_2\}}(\nabla_{A_{\{i_1, i_2\}}}) = \nabla_A$. Поэтому $\varphi \neq \nabla_A$.

Таким образом, если утверждение не верно, то существует такое отношение $\rho \in \mathbf{L}_A$, что $\theta \subset \rho \subset \nabla_A$. Все три отношения, входящие в эту цепочку, принадлежат решетке $[\pi_{\{i_1, i_2\}}^n]$. Поэтому определен элемент $\zeta_{\{i_1, i_2\}}^{-1}(\rho)$ и имеет место цепочка вложений

$$\Delta_{A_{\{i_1, i_2\}}} \subset \theta \subset \zeta_{\{i_1, i_2\}}^{-1}(\rho) \subset \nabla_{A_{\{i_1, i_2\}}},$$

что противоречит следствию 1.2. $\square$

В дальнейших рассмотрениях нам будет удобно использовать терминологию теории графов. Для этого будем рассматривать каждую пару $\langle V, \Gamma \rangle$, где $V \subseteq Z_n$, $\Gamma \subseteq V^{\{2\}}$, как граф с множеством V вершин и множеством Γ ребер, причем ребро $\{v_1, v_2\}$ инцидентно вершинам v_1, v_2 .

Будем говорить, что ребра графа $\langle V, \Gamma \rangle$ *помечены*, если каждому ребру $\{v_1, v_2\} \in \Gamma$ сопоставлено отношение $\omega_{\{i_1, i_2\}} \in \mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}^*$. Это эквивалентно тому, что выбран *вектор пометок* $(\omega_{\{i_1, i_2\}})_{\{i_1, i_2\} \in \Gamma}$, принадлежащий множеству

$$\Omega \langle V, \Gamma \rangle = \prod_{\{i_1, i_2\} \in \Gamma} \mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}^*.$$

Отметим, что граф $\langle V, \Gamma \rangle$ нельзя пометить, если для какого-либо ребра $\{i_1, i_2\} \in \Gamma$ множество $\mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}^*$ пусто. Это приводит нас к следующему определению.

Граф $\langle V, \Gamma \rangle$ назовем *допустимым*, если

$$\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathbf{L}_A} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \{i_1, i_2\} \in Z_n^{\{2\}} \mid \mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}^* \neq \emptyset \rangle.$$

Ясно, что граф можно пометить тогда и только тогда, когда он допустим.

Для вектора пометок

$$\mathbf{w} = (\omega_{\{i_1, i_2\}})_{\{i_1, i_2\} \in \Gamma} \quad (4.1)$$

полагаем

$$T(\mathbf{w}) = \pi_{Z_n \setminus V}^{(n)} \wedge \left(\bigwedge_{\{i_1, i_2\} \in \Gamma} \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\omega_{\{i_1, i_2\}}) \right).$$

Если $\Gamma' \subset \Gamma$, то существует естественное отображение

$$\Omega \langle S, \Gamma \rangle \rightarrow \Omega \langle S, \Gamma' \rangle,$$

сопоставляющее вектору $\mathbf{w} \in \Omega \langle S, \Gamma \rangle$ вида (4.1) вектор

$$\mathbf{w}|_{\Gamma'} = (\omega_{\{i_1, i_2\}})_{\{i_1, i_2\} \in \Gamma'}.$$

Согласно определениям

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}) &= \pi_{Z_n \setminus S}^{(n)} \wedge \left(\bigwedge_{\{i_1, i_2\} \in \Gamma \setminus \Gamma'} \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\omega_{\{i_1, i_2\}}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\{i_1, i_2\} \in \Gamma'} \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\omega_{\{i_1, i_2\}}) \right) = \\ &= T(\mathbf{w}|_{\Gamma'}) \wedge \left(\bigwedge_{\{i_1, i_2\} \in \Gamma \setminus \Gamma'} \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\omega_{\{i_1, i_2\}}) \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

откуда следует включение

$$T(\mathbf{w}) \subseteq T(\mathbf{w}|_{\Gamma'}), \quad (4.3)$$

выполняющееся для любого вектора $\mathbf{w} \in \Omega \langle S, \Gamma \rangle$.

В ряде случаев неравенство (4.3) может быть уточнено.

Лемма 4.2. Пусть $d = \{u_1, u_2\}$ — такое ребро допустимого графа $\langle V, \Gamma \rangle$, что хотя бы одна из вершин u_1, u_2 является висячей. Тогда для любого вектора $\mathbf{w} \in \Omega \langle V, \Gamma \rangle$ имеет место включение

$$T(\mathbf{w}) \triangleleft_{\mathbf{L}_A} T(\mathbf{w}|_{\Gamma \setminus \{d\}}). \quad (4.4)$$

Доказательство. Для упрощения обозначений будем считать, что $d = \{1, 2\}$ и вершина 1 является висячей.

Пусть вектор $\mathbf{w}$ имеет вид (4.1). В рассматриваемом случае равенство (4.2) приобретает вид

$$T(\mathbf{w}) = T(\mathbf{w}|_{\Gamma \setminus \{d\}}) \wedge \omega_{\{1,2\}}.$$

Согласно леммам 1.3, 1.4 и следствию 1.1 либо имеет место включение (4.4), либо имеет место равенство $T(\mathbf{w}) = T(\mathbf{w}|_{\Gamma \setminus \{d\}})$, и нам нужно лишь доказать, что последнее равенство невозможно.

Рассмотрим элементы

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \mathbf{b} = (b, a_2, \dots, a_n),$$

где $a_i \in A_i$ — произвольные элементы, $b \neq a_1$. Так как $1 \notin V$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \pi_{Z_n \setminus V}^{(n)}$. Пусть $\{i, j\} \in \Gamma \setminus \{d\}$. Так как 1 — висячая вершина, то d — единственное ребро, ее содержащее. Поэтому $1 \notin \{i, j\}$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \pi_{\{i,j\}}^{(n)}$. Отсюда и из включения $\pi_{\{i,j\}}^{(n)} \subset \zeta_{\{i,j\}}(\omega_{\{i,j\}})$ следует, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \zeta_{\{i,j\}}(\omega_{\{i,j\}})$. Таким образом,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in T(\mathbf{w}|_{\Gamma \setminus \{d\}}).$$

Рассмотрим отношение $\omega_{\{1,2\}} \in \Omega_{\{1,2\}}$. Из теоремы 2.1 следует, что множества A_1, A_2 равномощны. Применив лемму 2.1, получаем, что существуют биекция $f: A_1 \rightarrow A_2$ и операция $\odot \in \mathcal{Q}(A_2)$, для которых

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \omega_{\{1,2\}} \Leftrightarrow (f(a_1) \odot a_2 = f(b_1) \odot b_2). \quad (4.5)$$

Из свойств квазигрупповых операций следует, что $((a_1, a_2), (b, a_2)) \notin \omega_{\{1,2\}}$ для всех таких элементов $a_1, b \in A_1, a_2 \in A_2$, что $b \neq a_1$. Поэтому $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \notin \zeta_{\{1,2\}}(\omega_{\{1,2\}})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \notin T(\mathbf{w})$. Следовательно, $T(\mathbf{w}) \neq T(\mathbf{w}|_{\Gamma \setminus \{d\}})$.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.3. Пусть $\langle V, \Gamma \rangle$ — ациклический допустимый граф. Тогда для любого вектора $\mathbf{w} \in \Omega \langle V, \Gamma \rangle$ в решетке $\mathbf{L}_{B^n}$ существует цепь

$$T(\mathbf{w}) = \tau_{n-|V|+|\Gamma|} \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \tau_{n-|V|+|\Gamma|-1} \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \dots \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \tau_1 \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \tau_0 = \nabla_A.$$

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по величине $|\Gamma|$.

Если $|\Gamma| = 0$, то $\Gamma = \emptyset$ и $\Omega \langle V, \Gamma \rangle$ содержит единственный вектор Λ размерности 0. Для этого вектора $T(\Lambda) = \pi_{Z_n \setminus V}^{(n)}$, и утверждение вытекает из следствия 1.2.

Допустим, что утверждение верно для графов, содержащих $k \geq 0$ ребер, и рассмотрим ациклический граф $\langle V, \Gamma \rangle$, содержащий $k + 1$ ребер. Так как граф $\langle V, \Gamma \rangle$ ациклический, то его компоненты связности являются деревьями. При сделанном предположении хотя бы одно из них не одноэлементно и, следовательно, содержит висячие вершины (см. [13, гл. 4]). Пусть v — одна из висячих вершин и $d \in \Gamma$ — единственное ребро, инцидентное вершине v .

Очевидно, что граф $\langle V, \Gamma \setminus \{d\} \rangle$ ациклический и содержит k ребер. Поэтому применимо предположение индукции и существует цепь

$$T(\mathbf{w}') = \tau_{n-|V|+|\Gamma|-1} \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \dots \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \tau_1 \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \tau_0 = \nabla_A.$$

Объединив эту цепь с включением (4.4), получаем нужную нам цепь. $\square$

Теорема 4.1. Следующие свойства элемента τ GA -решетки $\mathbf{L}_A$ эквивалентны:

1. Существуют такое допустимое дерево $\langle W, \Gamma \rangle$ и такой вектор пометок $\mathbf{w} \in \Omega \langle W, \Gamma \rangle$, что $\tau = T(\mathbf{w})$.
2. Отношение τ является атомом решетки $\mathbf{L}_A$.
3. Отношение τ не равно отношению Δ_A и существуют такой полный допустимый граф $\langle V, V^{\{2\}} \rangle$ и такой вектор пометок $\mathbf{v} \in \Omega \langle V, V^{\{2\}} \rangle$, что $\tau \subseteq T(\mathbf{v})$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Предположим, что $\tau = T(\mathbf{w})$ для дерева $\langle W, \Gamma \rangle$ и вектора $\mathbf{w} \in \Omega \langle W, \Gamma \rangle$.

По свойству деревьев граф $\langle W, \Gamma \rangle$ ациклический и содержит $|W| - 1$ ребер. Применив лемму 4.3, получаем, что существует цепь

$$\tau = \tau_{n-1} \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \tau_{n-2} \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \dots \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \tau_1 \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \tau_0 = \nabla_A. \quad (4.6)$$

Допустим, что отношение τ не является атомом. Тогда либо $\tau = \Delta_A$, либо существует такой элемент $\tau' \in \mathbf{L}_A$, что $\tau \supset \tau' \supset \Delta_A$. В первом случае цепь (4.6) является максимальной цепью решетки $\mathbf{L}_A$ и длина этой решетки равна $n - 1$. Во втором существует цепь

$$\nabla_A = \tau_0 \supset \tau_1 \supset \dots \supset \tau_{n-1} = \tau \supset \tau' \supset \Delta_A$$

и длина решетки $\mathbf{L}_A$ больше или равна $n + 1$. Оба случая противоречат следствию 1.2. Таким образом, отношение τ является атомом.

2 $\Rightarrow$ 3. Предположим, что отношение τ является атомом. Положим

$$V = \langle i \in Z_n \mid \tau \not\subseteq \pi_i^{(n)} \rangle.$$

Из определений и равенства (1.3) следует неравенство

$$\tau \subseteq \pi_{Z_n \setminus V}^{(n)}. \quad (4.7)$$

Пусть $\{i_1, i_2\} \in V^{\{2\}}$. Рассмотрим элемент $\tau' = \pi_{\{i_1, i_2\}}^{(n)} \vee \tau$. Заметим, что

$$\tau' \notin \left\{ \pi_{\{i_1, i_2\}}^{(n)}, \pi_{\{i_1\}}^{(n)}, \pi_{\{i_2\}}^{(n)}, \nabla_A \right\}.$$

Действительно, если $\tau' = \pi_{\{i_1, i_2\}}^{(n)}$ или $\tau' = \pi_{\{i_j\}}^{(n)}$, то $\tau \subseteq \pi_{i_j}^{(n)}$, что противоречит определению множества V . Далее, если $\tau' = \nabla_A$, то из леммы 1.4 и следствия 1.1 вытекают включения

$$\pi_{\{i_1, i_2\}}^{(n)} \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \pi_{\{i_1\}}^{(n)} \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \nabla_A, \quad \pi_{\{i_1, i_2\}}^{(n)} \triangleleft_{\mathbf{L}_A} \nabla_A,$$

что невозможно для модулярных решеток. Теперь имеем

$$\begin{aligned} \zeta_{\{i_1, i_2\}}^{-1}(\tau') &\in \mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}} \setminus \zeta_{\{i_1, i_2\}}^{-1} \left(\left\{ \pi_{\{i_1, i_2\}}^{(n)}, \pi_{\{i_1\}}^{(n)}, \pi_{\{i_2\}}^{(n)}, \nabla_A \right\} \right) = \\ &= \mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}} \setminus \mathbf{D}^{(2)}(A_{\{i_1, i_2\}}) = \mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}^*. \end{aligned}$$

Последнее включение означает, что $\mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}^* \neq \emptyset$. Так как ребро $\{i_1, i_2\} \in V^{\{2\}}$ выбиралось произвольно, то граф $\langle V, V^{\{2\}} \rangle$ допустим.

Элемент $\zeta_{\{i_1, i_2\}}^{-1}(\tau')$ обозначим через $\varphi_{\{i_1, i_2\}}$. Имеем

$$\tau \subseteq \pi_{\{i_1, i_2\}}^{(n)} \vee \tau \subseteq \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\varphi_{\{i_1, i_2\}}). \quad (4.8)$$

Положим $\mathbf{v} = (\varphi_{\{i_1, i_2\}})_{\{i_1, i_2\} \in V^{\{2\}}}$. Из неравенств (4.7) и (4.8) следует неравенство $\tau \subseteq \mathbf{T}(\mathbf{v})$, и условие 3 выполняется.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $\Delta_A \subset \tau \subseteq T(\mathbf{v})$ для вектора пометок $\mathbf{v} \in \Omega \langle V, V^{(2)} \rangle$. Выберем произвольное дерево $\langle V, \Gamma \rangle$ с множеством V вершин. Непосредственно из определений следует, что каждый подграф допустимого графа сам является допустимым. Поэтому дерево $\langle V, \Gamma \rangle$ допустимо. Из неравенства (4.3) следует неравенство

$$\Delta_A \subset \tau \subseteq T(\mathbf{v}) \subseteq T(\mathbf{v}|_{\Gamma}).$$

Согласно доказанной нами импликации $1 \Rightarrow 2$ отношение $T(\mathbf{v}|_{\Gamma})$ является атомом решетки $\mathbf{L}_A$. Из определения атомов и предыдущих рассуждений следует, что $\tau = T(\mathbf{v}|_{\Gamma})$. $\square$

Импликация $1 \Rightarrow 3$ означает, что для любого допустимого дерева $\langle W, \Gamma \rangle$ и любого вектора пометок $\mathbf{w} \in \Omega \langle W, \Gamma \rangle$ найдутся такой допустимый полный граф $\langle V, V^{(2)} \rangle$ и такой вектор пометок $\mathbf{v} \in \Omega \langle V, V^{(2)} \rangle$, что $T(\mathbf{w}) \subseteq T(\mathbf{v})$. Нам необходимо усилить это утверждение.

Теорема 4.2. Пусть $\langle W, \Gamma \rangle$ — допустимое дерево. Тогда полный граф $\langle W, W^{\{2\}} \rangle$ допустим и для каждого вектора $\mathbf{w} \in \Omega \langle W, \Gamma \rangle$ существует такой вектор $\mathbf{v} \in \Omega \langle W, W^{\{2\}} \rangle$, что $T(\mathbf{w}) = T(\mathbf{v})$ и $\mathbf{w} = \mathbf{v}|_{\Gamma}$.

Доказательство. Если $|W| \leq 2$, то дерево $\langle W, \Gamma \rangle$ является полным графом, и утверждение очевидно.

Пусть $|W| = 3$. Для упрощения обозначений положим $W = \{1, 2, 3\}$, $\Gamma = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. Пусть $\mathbf{w} = (\omega_{\{1,2\}}, \omega_{\{2,3\}})$ — вектор пометок графа $\langle W, \Gamma \rangle$.

В силу теоремы 4.1 отношение $\tau = T((\omega_{\{1,2\}}, \omega_{\{2,3\}}))$ является атомом. Из той же теоремы следует, что $\tau \subseteq T(\mathbf{v})$ для подходящего вектора пометок $\mathbf{v} = (\varphi_{\{i,j\}})_{\{i,j\} \in V^{\{2\}}}$ ребер полного допустимого графа $\langle V, V^{(2)} \rangle$.

Справедливы формула (4.5) и аналогичная формула для отношения $\omega_{\{2,3\}}$:

$$\begin{aligned} (((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \omega_{\{1,2\}}) &\Leftrightarrow (f(a_1) \odot_{12} a_2 = f(b_1) \odot_{12} b_2), \\ (((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \omega_{\{2,3\}}) &\Leftrightarrow (g(a_1) \odot_{23} a_2 = g(b_1) \odot_{23} b_2), \end{aligned}$$

где $f: A_1 \rightarrow A_2$, $g: A_2 \rightarrow A_3$ — биекции, $\odot_{12}$, $\odot_{23}$ — квазигрупповые операции на множествах A_2 и A_3 соответственно.

Выберем произвольно вектор $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$ и элемент $b_1 \in A_1 \setminus \{a_1\}$. В качестве b_2 и b_3 возьмем решения уравнений

$$f(a_1) \odot_{12} a_2 = f(b_1) \odot_{12} x, \quad g(a_2) \odot_{23} a_3 = g(b_2) \odot_{23} y.$$

Теперь из определений следует, что

$$\begin{aligned} ((a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n), (b_1, b_2, b_3, a_4, \dots, a_n)) &\in \tau, \\ ((a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n), (b_1, b_2, b_3, a_4, \dots, a_n)) &\notin \pi_1^{(n)} \end{aligned}$$

и $\tau \not\subseteq \pi_1^{(n)}$. Следовательно, $T(\mathbf{v}) \not\subseteq \pi_1^{(n)}$, что возможно только в случае $1 \in V$.

Так же показываем, что $3 \in V$.

Поскольку ребра $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$ входят в допустимые графы, постольку они принадлежат множеству Γ_{L_A} и полный граф $\langle \{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\} \rangle$ допустим. Имеем $\tau \subseteq T(\mathbf{v}) \subseteq \zeta_{\{1, 3\}}(\varphi_{\{1, 3\}})$,

$$\begin{aligned} \tau &= \tau \wedge \zeta_{\{1, 3\}}(\varphi_{\{1, 3\}}) = \zeta_{\{1, 2\}}(\omega_{\{1, 2\}}) \wedge \zeta_{\{2, 3\}}(\omega_{\{2, 3\}}) \wedge \zeta_{\{1, 3\}}(\varphi_{\{1, 3\}}) = \\ &= T((\omega_{\{1, 2\}}, \omega_{\{2, 3\}}, \varphi_{\{1, 3\}})), \end{aligned}$$

и утверждение верно.

Пусть теперь $|W| \geq 4$. Будем говорить, что вектор пометок $\mathbf{w}' \in \Omega(W, \Gamma')$, где $\Gamma \subseteq \Gamma' \subseteq W^{\{2\}}$, является продолжением вектора $\mathbf{w} \in \Omega(W, \Gamma)$, если $T(\mathbf{w}) = T(\mathbf{w}')$ и $\mathbf{w} = \mathbf{w}'|_{\Gamma}$.

Пусть $\mathfrak{G}$ — множество таких подмножеств Γ' множества $W^{\{2\}}$, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и для каждого вектора $\mathbf{w} \in \Omega(W, \Gamma)$ существует продолжение $\mathbf{w}' \in \Omega(W, \Gamma')$.

Ясно, что $\Gamma \in \mathfrak{G}$. Поэтому множество $\mathfrak{G}$ не пусто. Так как множество $W^{\{2\}}$ конечно, то конечным будет и множество $\mathfrak{G}$. Поэтому оно содержит максимальные относительно теоретико-множественного порядка элементы. Пусть $\Gamma^{(0)}$ — один из таких элементов. Предположим, что $\Gamma^{(0)} \neq W^{\{2\}}$.

Так как $\Gamma \subseteq \Gamma^{(0)}$ и граф $\langle W, \Gamma \rangle$ связан, то связан и граф $\langle W, \Gamma^{(0)} \rangle$. Поэтому при сделанном предположении существуют такие ребра $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\} \in \Gamma^{(0)}$, что $i_1 \neq i_3$ и $\{i_1, i_3\} \notin \Gamma^{(0)}$.

Рассмотрим произвольный вектор пометок $\mathbf{w} = (\omega_{\{i, j\}})_{\{i, j\} \in \Gamma}$ и его продолжение $\mathbf{w}^{(0)} = (\omega_{\{i, j\}})_{\{i, j\} \in \Gamma^{(0)}}$. Также рассмотрим граф $\langle \{i_1, i_2, i_3\}, \{\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}\} \rangle$. Тогда пара $(\omega_{\{i_1, i_2\}}, \omega_{\{i_2, i_3\}})$ является вектором пометок для него. Так как число вершин этого графа равно 3, то доказываемое утверждение для него верно. Это означает, что $\{i_1, i_3\} \in \Gamma_{L_A}$ и существует такое отношение $\omega_{\{i_1, i_3\}}$, что

$$\begin{aligned} \pi_{Z_n \setminus \{i_1, i_2, i_3\}}^{(n)} \wedge \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\omega_{\{i_1, i_2\}}) \wedge \zeta_{\{i_2, i_3\}}(\omega_{\{i_2, i_3\}}) &= \\ = \pi_{Z_n \setminus \{i_1, i_2, i_3\}}^{(n)} \wedge \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\omega_{\{i_1, i_2\}}) \wedge \zeta_{\{i_2, i_3\}}(\omega_{\{i_2, i_3\}}) \wedge \zeta_{\{i_2, i_2\}}(\omega_{\{i_1, i_3\}}). \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1.4 следует равенство

$$\begin{aligned} & \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\omega_{\{i_1, i_2\}}) \wedge \zeta_{\{i_2, i_3\}}(\omega_{\{i_1, i_3\}}) = \\ & = \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\omega_{\{i_1, i_2\}}) \wedge \zeta_{\{i_2, i_3\}}(\omega_{\{i_2, i_3\}}) \wedge \zeta_{\{i_1, i_2\}}(\omega_{\{i_1, i_3\}}), \end{aligned}$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} & \pi_{Z_n \setminus W}^{(n)} \wedge \left(\bigwedge_{\{i, j\} \in \Gamma^{(0)}} \zeta_{\{i, j\}}(\omega_{\{i, j\}}) \right) \wedge \zeta_{\{i_1, i_3\}}(\omega_{\{i_1, i_3\}}) = \\ & = \pi_{Z_n \setminus W}^{(n)} \wedge \left(\bigwedge_{\{i, j\} \in \Gamma^{(0)}} \zeta_{\{i, j\}}(\omega_{\{i, j\}}) \right) = \pi_{Z_n \setminus W}^{(n)} \wedge \left(\bigwedge_{\{i, j\} \in \Gamma^{(0)}} \zeta_{\{i, j\}}(\omega_{\{i, j\}}) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, любой вектор пометок продолжается до вектора пометок, принадлежащего множеству $\Omega \langle W, \Gamma^{(0)} \cup \{\{i_1, i_3\}\} \rangle$, что противоречит предположению о максимальности множества $\Gamma^{(0)}$.

Полученное противоречие означает, что $\Gamma^{(0)} = W^{\{2\}}$, поэтому утверждение теоремы верно. $\square$

Следствие 4.1. Каждая компонента связности графа $\langle Z_n, \Gamma_{\mathbf{L}_A} \rangle$ является полным графом.

Утверждение очевидным образом вытекает из теоремы 4.2.

Теорема 4.3. Каждый элемент GA -решетки $\mathbf{L}_A$ разлагается в объединение некоторого множества ее атомов.

Доказательство. Пусть $\theta \in \mathbf{L}_A$. Если $\ell(\theta) = 0$, то $\theta = \Delta_A$ и θ — объединение пустого множества атомов. Если $\ell(\theta) = 1$, то θ является атомом и утверждение верно.

Допустим, что $\ell(\theta) = m + 1 \geq 2$ и утверждение верно для всех элементов меньшей высоты. Так как решетка $\mathbf{L}_A$ конечна, то существует такой атом τ решетки $\mathbf{L}_A$, что $\tau \subset \theta$.

Из равенств (1.2), (1.3) следует соотношение $\tau \supset \Delta_A = \bigwedge_{k=1}^n \pi_k^{(n)}$. Поэтому найдется такой номер k , что $\tau \not\subseteq \pi_k^{(n)}$.

Полагаем $\theta' = \theta \wedge \pi_k^{(n)}$. Если $\theta' \subseteq \theta$, то $\pi_k^{(n)} \supseteq \theta \wedge \pi_k^{(n)} = \theta' = \theta \supseteq \tau$, что противоречит выбору номера k . Значит, $\theta' \subset \theta$, откуда следует неравенство $\ell(\theta') < \ell(\theta)$. По предположению индукции элемент θ' разлагается в объединение атомов $\theta' = \bigvee_{j=1}^r \tau_j$.

Из тождества модулярности следует

$$\theta' \vee \tau = \theta \wedge \left(\pi_k^{(n)} \vee \tau \right) = \theta \wedge \nabla_A = \theta, \quad \theta = \theta' \vee \tau = \left(\bigvee_{j=1}^r \tau_j \right) \vee \tau,$$

что дает интересующее нас разложение. $\square$

Теорема 4.4. *GA-решетка $\mathbf{L}_A$ неразложима тогда и только тогда, когда граф $\langle Z_n, \Gamma_{\mathbf{L}_A} \rangle$ является полным графом.*

Доказательство. Предположим, что решетка $\mathbf{L}_A$ разложима и отображение $\zeta_I \wedge \zeta_{Z_n \setminus I}$ является изоморфизмом. Допустим, что существуют такие элементы $i_1 \in I, i_2 \in Z_n \setminus I$, что $\{i_1, i_2\} \in \Gamma_{\mathbf{L}_A}$. Последнее означает, что множество $\mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}^*$ не пусто. Пусть ω — элемент из множества $\mathbf{L}_{\{i_1, i_2\}}^*$. Тогда $G = \langle \{i_1, i_2\}, \{\{i_1, i_2\}\} \rangle$ — допустимый граф и $(\omega) \in \Omega(G)$. Это позволяет построить атом $\tau = T(\omega) \in \mathbf{L}_A$.

Для отношения ω справедлив аналог формулы (4.5). Используя эту формулу, аналогично доказательству леммы 4.2 показываем, что $\tau \not\subseteq \pi_I^{(n)}, \tau \not\subseteq \pi_{Z_n \setminus I}^{(n)}$. Так как отношение τ является атомом, то

$$\Delta_A = \tau \wedge \pi_I^{(n)} = \tau \wedge \pi_{Z_n \setminus I}^{(n)}. \quad (4.9)$$

Из сделанного предположения следует, что

$$T(\omega) = \zeta_I(\theta_1) \wedge \zeta_{Z_n \setminus I}(\theta_2)$$

для некоторых отношений $\theta_1 \in \mathbf{L}_{A^I}, \theta_2 \in \mathbf{L}_{A^{Z_n \setminus I}}$. Используя равенство (4.9), получаем

$$\pi_I^{(n)} \wedge \pi_{Z_n \setminus I}^{(n)} = \Delta_A = \pi_I^{(n)} \wedge \tau = \pi_I^{(n)} \wedge \zeta_I(\theta_1) \wedge \zeta_{Z_n \setminus I}(\theta_2) = \pi_I^{(n)} \wedge \zeta_{Z_n \setminus I}(\theta_2).$$

Из леммы 1.4 следует, что $\pi_{Z_n \setminus I}^{(n)} = \zeta_{Z_n \setminus I}(\theta_2)$ и

$$T(\omega) = \zeta_I(\theta_1) \wedge \pi_{Z_n \setminus I}^{(n)} \subseteq \pi_{Z_n \setminus I}^{(n)},$$

что противоречит неравенствам (4.9).

Полученное противоречие показывает, что таких смежных вершин i_1, i_2 , что $i_1 \in I, i_2 \in Z_n \setminus I$, не существует, и граф $\langle Z_n, \Gamma_{\mathbf{L}_A} \rangle$ не связан. Тем более он не является полным.

Теперь предположим, что граф $\langle Z_n, \Gamma_{\mathbf{L}_A} \rangle$ не полон. В силу следствия 4.1 он не связан. Пусть I — одна из компонент связности.

Рассмотрим произвольный атом τ решетки $\mathbf{L}_A$. В силу теоремы 4.1 существуют такое допустимое дерево $\langle V, \Gamma \rangle$ и такой вектор $\mathbf{w} \in \Omega(V, \Gamma)$, что $\tau = T(\mathbf{w})$. При сделанном предположении либо $V \subseteq I$, либо $V \subseteq Z_n \setminus I$.

Если $V \subseteq I$, то $\tau \subseteq \pi_{Z_n \setminus I}^{(n)}$. Отсюда и из тождества модулярности следует, что

$$\left(\tau \vee \pi_I^{(n)} \right) \wedge \pi_{Z_n \setminus I}^{(n)} = \tau \vee \left(\pi_I^{(n)} \wedge \pi_{Z_n \setminus I}^{(n)} \right) = \tau \vee \Delta_A = \tau. \quad (4.10)$$

Так как $\nabla_A \supseteq \tau \vee \pi_I^{(n)} \supseteq \pi_I^{(n)}$, то существует такой элемент $\rho \in \mathbf{L}_{A^I}$, что $\tau \vee \pi_I^{(n)} = \zeta_I(\rho)$. Также имеем $\pi_{Z_n \setminus I}^{(n)} = \zeta_{Z_n \setminus I}(\Delta_{A_{Z_n \setminus I}})$. Поэтому равенство (4.10) можно записать в виде

$$\tau = \zeta_I(\rho) \wedge \zeta_{Z_n \setminus I}(\Delta_{A_{Z_n \setminus I}}),$$

т. е.

$$\tau \in \zeta_I(\mathbf{L}_{A^I}) \wedge \zeta_{Z_n \setminus I}(\mathbf{L}_{A_{Z_n \setminus I}}). \quad (4.11)$$

Так же доказываем, что включение (4.11) выполняется и в случае $V \subseteq Z_n \setminus I$.

Отсюда и из теоремы 4.3 следует, что $\mathbf{L}_A = \zeta_I(\mathbf{L}_{A^I}) \wedge \zeta_{Z_n \setminus I}(\mathbf{L}_{A_{Z_n \setminus I}})$, и решетка $\mathbf{L}_A$ разложима. $\square$

Следствие 4.2. Если $A = \prod_{i=1}^n A_i$ и GA -решетка $\mathbf{L}_A$ неразложима, то все множества A_i имеют одинаковую мощность.

Доказательство. Пусть $i, j \in Z_n$ и $i < j$. Из теоремы 4.4 следует, что GA -решетка $\mathbf{L}_{\{i,j\}}$ отношений эквивалентности на множестве $A_i \times A_j$ не равна $\mathbf{D}^{(2)}(A_1 \times A_2)$. Из теоремы 2.1 следует, что множества A_i, A_j имеют одинаковую мощность.

Так как номера i, j выбирались произвольно, то все множества A_i имеют одинаковую мощность. $\square$

5. I-системы

В настоящем разделе проводятся некоторые рассуждения, которые понадобятся при описании GA -решеток больших длин. Так же, как выше, B — конечное множество.

Пусть $\otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \in \mathcal{Q}(B)$. Определим на множестве B^3 отношения эквивалентности $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, положив

$$\begin{aligned} ((b_1, b_2, b_3), (b'_1, b'_2, b'_3) \in \theta_1) &\Leftrightarrow (b_2 \otimes_1 b_3 = b'_2 \otimes_1 b'_3), \\ ((b_1, b_2, b_3), (b'_1, b'_2, b'_3) \in \theta_2) &\Leftrightarrow (b_1 \otimes_2 b_3 = b'_1 \otimes_2 b'_3), \\ ((b_1, b_2, b_3), (b'_1, b'_2, b'_3) \in \theta_3) &\Leftrightarrow (b_1 \otimes_3 b_2 = b'_1 \otimes_3 b'_2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Скажем, что упорядоченная тройка $(\otimes_1, \otimes_2, \otimes_3)$ *инцидентна*, если выполняется включение

$$\theta_2 \wedge \theta_3 \subseteq \theta_1. \quad (5.2)$$

Лемма 5.1. Пусть тройка $\langle \otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \rangle$ квазигрупповых операций инцидентна. Тогда операции $\otimes_1, \otimes_2, \otimes_3$ изотопны некоторой групповой операции $+$, определенной на множестве B , т. е.

$$x \otimes_i y = \kappa_i^{-1} (\lambda_i(x) + \mu_i(y)) \quad (5.3)$$

для подходящих подстановок $\kappa_i, \lambda_i, \mu_i$, причем подстановки λ_i, μ_i могут быть выбраны так, что

$$\lambda_i(0) = \mu_i(0) = 0. \quad (5.4)$$

Доказательство. Пусть $c_2, c_3 \in B$. Выберем элементы $b_1, b_2, b_3 \in B$ так, чтобы

$$c_2 = b_1 \otimes_3 b_2, \quad c_3 = b_1 \otimes_2 b_3.$$

Например, это можно сделать следующим образом: элемент $b_1 \in B$ выбираем произвольно, а в качестве элементов $b_2, b_3 \in B$ берем решения уравнений $c_2 = b_1 \otimes_3 y$ и $c_3 = b_1 \otimes_2 y$ соответственно. Эти уравнения однозначно разрешимы по определению квазигрупп.

Полагаем $c_2 \odot c_3 = b_2 \otimes_1 b_3$. Определение этой операции корректно. Действительно, если $b'_1, b'_2, b'_3 \in B$ — другие элементы и выполняются равенства

$$c_2 = b'_1 \otimes_3 b'_2, \quad c_3 = b'_1 \otimes_2 b'_3,$$

то

$$b_1 \otimes_2 b_3 = b'_1 \otimes_2 b'_3, \quad b_1 \otimes_3 b_2 = b'_1 \otimes_3 b'_2.$$

Из определений (5.1) следует, что справедливо включение

$$((b_1, b_2, b_3), (b'_1, b'_2, b'_3)) \in \theta_2 \wedge \theta_3.$$

Из (5.2) следует, что $((b_1, b_2, b_3), (b'_1, b'_2, b'_3)) \in \theta_1$ и $b'_2 \otimes_1 b'_3 = b_2 \otimes_1 b_3 = c_2 \odot c_3$.

Таким образом, нами определена операция $\odot$.

Рассмотрим уравнение $c_2 \odot x = d$. Чтобы решить его, опять выберем разложение $c_2 = b_1 \otimes_3 b_2$. Пусть a есть решение уравнения $b_2 \otimes_1 x = d$. Тогда

$$c_2 \odot (b_1 \otimes a) = (b_1 \otimes_3 b_2) \odot (b_1 \otimes a) = b_2 \otimes_1 a = d,$$

т. е. рассматриваемое уравнение разрешимо. Однозначность решения вытекает из конечности множества B .

Так же показываем, что каждое уравнение $x \odot c_3 = d$ имеет единственное решение.

Таким образом, операция $\odot$ является квазигрупповой.

Произвольно выберем элементы $b_1, b_2, b_3 \in B$. Имеют место тавтологии

$$b_1 \circledast_3 b_2 = b_1 \circledast_3 b_2, \quad b_1 \circledast_2 b_3 = b_1 \circledast_2 b_3.$$

Теперь из определения операции $\odot$ следует, что

$$(b_1 \circledast_3 b_2) \odot (b_1 \circledast_2 b_3) = b_2 \circledast_1 b_3,$$

т. е. операции $\circledast_1, \circledast_2, \circledast_3, \odot$ связаны общим *тождеством транзитивности*.

В [2] доказано, что все операции, входящие в общее тождество транзитивности, изотопны некоторой групповой операции.

Возможность выбора подстановок, обладающих свойством (5.4), вытекает из леммы 3.1. $\square$

Теорема 5.1. Пусть $\langle B; + \rangle$ — конечная группа, $\circledast_1, \circledast_2, \circledast_3$ — операции, заданные равенствами (5.3), в которых подстановки λ_i, μ_i удовлетворяют равенствам (5.4), и тройка $\langle \circledast_1, \circledast_2, \circledast_3 \rangle$ инцидентна. Тогда существуют такие автоморфизмы h, f группы $\langle B; + \rangle$, что выполняются равенства $\lambda_3 = (f^{-1}h)\lambda_2$, $\mu_3 = -f\lambda_1$, $\mu_2 = h\mu_1$.

Доказательство. Выберем произвольно элементы $u, v \in B$. Для каждого $a \in B$ полагаем

$$c_{uv}(a) = (a, \mu_3^{-1}(-\lambda_3(a) + u), \mu_2^{-1}(-\lambda_2(a) + v)).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \kappa_2^{-1}(\lambda_2(a) + \mu_2(\mu_2^{-1}(-\lambda_2(a) + v))) &= \kappa_2^{-1}(v), \\ \kappa_3^{-1}(\lambda_3(a) + \mu_3(\mu_3^{-1}(-\lambda_3(a) + u))) &= \kappa_3^{-1}(u). \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что каждая пара $(c_{uv}(a), c_{uv}(a'))$ принадлежит отношению $\theta_2 \wedge \theta_3$. Следовательно, каждая такая пара находится в отношении θ_1 .

В частности, $(c_{uv}(a), c_{uv}(0)) \in \theta_1$. Это означает, что выполняется равенство

$$\kappa_1^{-1}(\lambda_1\mu_3^{-1}(-\lambda_3(a) + u) + \mu_1\mu_2^{-1}(-\lambda_2(a) + v)) = \kappa_1^{-1}(\lambda_1\mu_3^{-1}(u) + \mu_1\mu_2^{-1}(v)).$$

Применив к обеим частям равенства подстановку и сгруппировав члены, получим

$$\mu_1\mu_2^{-1}(-\lambda_2(a) + v) - \mu_1\mu_2^{-1}(v) = -\lambda_1\mu_3^{-1}(-\lambda_3(a) + u) + \lambda_1\mu_3^{-1}(u).$$

Левая часть равенства не зависит от величины u , а правая — от величины v .

Поэтому обе части равенства не зависят существенно от этих величин и для некоторой функции γ

$$\begin{aligned}\mu_1\mu_2^{-1}(-\lambda_2(a) + v) - \mu_1\mu_2^{-1}(v) &= \gamma(a), \\ -\lambda_1\mu_3^{-1}(-\lambda_3(a) + u) + \lambda_1\mu_3^{-1}(u) &= \gamma(a).\end{aligned}$$

Эти равенства можно записать в эквивалентном виде

$$\begin{aligned}\mu_1\mu_2^{-1}(c + v) &= \gamma(-\lambda_2^{-1}(c)) + \mu_1\mu_2^{-1}(v), \\ -\lambda_1\mu_3^{-1}(d + u) &= \gamma(-\lambda_3^{-1}(d)) - \lambda_1\mu_3^{-1}(u).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Положив $u = v = 0$, получим

$$\mu_1\mu_2^{-1}(c) = \gamma(-\lambda_2^{-1}(c)), \quad -\lambda_1\mu_3^{-1}(d) = \gamma(-\lambda_3^{-1}(d)).\tag{5.6}$$

Подставив последние выражения в равенства (5.5), получим

$$\begin{aligned}\mu_1\mu_2^{-1}(c + v) &= \mu_1\mu_2^{-1}(c) + \mu_1\mu_2^{-1}(v), \\ -\lambda_1\mu_3^{-1}(d + u) &= -\lambda_1\mu_3^{-1}(d) - \lambda_1\mu_3^{-1}(u).\end{aligned}$$

Таким образом, отображения $\mu_1\mu_2^{-1}$, $-\lambda_1\mu_3^{-1}$ являются автоморфизмами, которые обозначим через h и f соответственно.

Из равенств (5.6) следует, что отображение является подстановкой. Поэтому из них же следуют равенства

$$\begin{aligned}\lambda_2^{-1}(c) &= -\gamma^{-1}h(c), \quad \lambda_2(c) = h^{-1}\gamma(-c), \\ \lambda_3^{-1}(d) &= -\gamma^{-1}f(d), \\ \lambda_3(d) &= f^{-1}\gamma(-d) = (f^{-1}h)h^{-1}\gamma(-d) = (f^{-1}h)\lambda_2(d).\end{aligned}$$

□

Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \subseteq \mathcal{Q}(B)$. Скажем, что упорядоченная тройка $\langle \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \rangle$ образует *I-систему*, если для любой подстановки s множества $\{1, 2, 3\}$ и любых операций $\otimes_{s(1)} \in \Omega_{s(1)}$, $\otimes_{s(2)} \in \Omega_{s(2)}$ найдется такая операция $\otimes_{s(3)} \in \Omega_{s(3)}$, что тройка $\langle \otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \rangle$ инцидентна.

Лемма 5.2. Пусть $\langle \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \rangle$ — *I-система* и множества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ не пусты. Тогда существует такая групповая операция $+$ на множестве B , что каждая операция из множества $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ изотопна операции $+$.

Доказательство. Выберем операции $\otimes_1 \in \Omega_1$, $\otimes_2 \in \Omega_2$. По определению существует такая операция $\otimes_3 \in \Omega_3$, что тройка $\langle \otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \rangle$ инцидентна. В силу леммы 5.1 существует такая групповая операция $+$, что операции $\otimes_1, \otimes_2, \otimes_3$ ей изотопны.

Выберем еще одну операцию $\odot_1 \in \Omega_1$. Опять же по определению существует такая операция $\odot_3 \in \Omega_3$, что тройка $\langle \odot_1, \otimes_2, \odot_3 \rangle$ инцидентна, и в силу леммы 5.1 существует такая групповая операция $\oplus$, что операции $\odot_1, \otimes_2, \odot_3$ ей изотопны.

Таким образом, групповые операции $+$, $\oplus$ изотопны операции $\otimes_2$. Так как отношение изотопии является отношением эквивалентности, то операции $+$, $\oplus$ изотопны. Следовательно, операции $+$, $\odot_1$ изотопны операции $\oplus$, откуда следует, что операции $+$, $\odot_1$ изотопны друг другу. Так как операция $\odot_1 \in \Omega_1$ выбиралась произвольно, то все операции из множества Ω_1 изотопны операции $+$.

Аналогично показываем, что все операции из множеств Ω_2 и Ω_3 изотопны операции $+$. $\square$

Лемма 5.3. Пусть $\langle \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \rangle$ — I -система, множества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ не пусты и $+$ — такая групповая операция на множестве B , что каждая операция из множества $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ ей изотопна. Тогда существуют такие подстановки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Sigma_B^{(0)}$, что

$$\Omega_1 \subseteq \mathcal{H}(+, -\alpha_2, \alpha_3), \quad \Omega_2 \subseteq \mathcal{H}(+, -\alpha_1, \alpha_3), \quad \Omega_3 \subseteq \mathcal{H}(+, -\alpha_1, \alpha_2).$$

Доказательство. Выберем произвольно операции $\otimes_3 \in \Omega_3$, $\otimes_2 \in \Omega_2$. В качестве $\otimes_1$ возьмем такую операцию $\otimes_1 \in \Omega_1$, что тройка $\langle \otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \rangle$ инцидентна. В условиях леммы

$$x \otimes_i y = \kappa_i^{-1}(\lambda_i(x) + \mu_i(y)), \quad (5.7)$$

где $\lambda_i, \mu_i \in \Sigma_B^{(0)}$, $\kappa_i \in \Sigma_B$ (см. лемму 3.1).

Применив к тройке $\langle \otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \rangle$ теорему 5.1, получим, что существуют такие автоморфизмы f, h группы $\langle B; + \rangle$, для которых выполняются равенства

$$\mu_2 = h\mu_1, \quad \lambda_1 = -f^{-1}\mu_3, \quad \lambda_3 = f^{-1}h\lambda_2.$$

Положим

$$\alpha_1 = -\lambda_3, \quad \alpha_2 = \mu_3, \quad \alpha_3 = \mu_2. \quad (5.8)$$

В этих обозначениях имеем

$$\mu_1 = h^{-1}\alpha_3, \quad \lambda_1 = -f^{-1}\alpha_2, \quad \lambda_2 = -h^{-1}f\alpha_1.$$

Выберем еще одну произвольную операцию $\odot_3 \in \Omega_3$. Она также представима в виде изотопа

$$x \odot_3 y = \kappa^{-1}(\lambda(x) + \mu(y)).$$

Существуют такие операции $\odot_1 \in \Omega_1$, $\odot_2 \in \Omega_2$, что тройки $\langle \odot_1, \otimes_2, \odot_3 \rangle$, $\langle \otimes_1, \odot_2, \odot_3 \rangle$ инцидентны. Применив к ним теорему 5.1, получим, что существуют автоморфизмы g, q группы $\langle B; + \rangle$, для которых выполняются равенства

$$\mu = -g\lambda_1 = gf^{-1}\alpha_2, \quad \lambda = q\lambda_2 = -qh^{-1}f\alpha_1,$$

т. е. $\odot_3 \subseteq \mathcal{H}(+, -\alpha_1, \alpha_2)$. Так как операция $\odot_3$ выбиралась произвольно, то $\Omega_3 \subseteq \mathcal{H}(+, -\alpha_1, \alpha_2)$.

Выбрав произвольно операцию $\odot_2 \in \Omega_2$ и рассмотрев инцидентные тройки $\langle \odot_1, \odot_2, \otimes_3 \rangle$, $\langle \otimes_1, \odot_2, \odot_3 \rangle$, получим, что $\Omega_2 \subseteq \mathcal{H}(+, -\alpha_1, \alpha_3)$.

Третье включение доказывается аналогично. $\square$

З а м е ч а н и е. При доказательстве леммы мы указали конструктивный способ построения подстановок α_i : *выбрать произвольно операции $\otimes_3 \in \Omega_3$, $\otimes_2 \in \Omega_2$, рассмотреть одно из их представлений (5.7) в виде изотопы группы и определить подстановки равенствами (5.8).*

В ряде случаев удобно применять другие способы, аналогичные рассмотренному. Например, можно выбрать операции $\otimes_1 \in \Omega_3$, $\otimes_2 \in \Omega_2$, рассмотреть представление (5.7) и положить

$$\alpha_1 = -\lambda_2, \quad \alpha_2 = \lambda_1, \quad \alpha_3 = \mu_2$$

или

$$\alpha_1 = -\lambda_2, \quad \alpha_2 = \lambda_1, \quad \alpha_3 = \mu_1.$$

Лемма 5.4. Пусть

$$\Omega_1 = \mathcal{H}(+, -\alpha_2, \alpha_3, S_1), \quad \Omega_2 = \mathcal{H}(+, -\alpha_1, \alpha_3, S_2), \quad \Omega_3 = \mathcal{H}(+, -\alpha_1, \alpha_2, S_3)$$

— непустые множества.

Тогда тройка $\langle \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \rangle$ является I -системой в том и только в том случае, когда существуют такая подгруппа $T \subseteq \text{Aut} \langle B; + \rangle$ и такие элементы $e_1, e_3 \in \text{Aut} \langle B; + \rangle$, что $S_1 = Te_1$, $S_3 = e_3T$, $S_2 = e_3Te_1$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные операции $\otimes_1 \in \Omega_1$, $\otimes_2 \in \Omega_2$, $\otimes_3 \in \Omega_3$. Учитывая равенство (3.1), их можно представить в виде

$$x \otimes_1 y = \kappa_1^{-1}(-\alpha_2(x) + h_1\alpha_3(y)),$$

$$x \otimes_2 y = \kappa_2^{-1}(-\alpha_1(x) + h_2\alpha_3(y)),$$

$$x \otimes_3 y = \kappa_3^{-1}(-\alpha_1(x) + h_3\alpha_2(y)),$$

где $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \Sigma_B$, $h_1 \in S_1, h_2 \in S_2, h_3 \in S_3$.

Теорема 5.1 показывает, что тройка $\langle \otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \rangle$ инцидентна тогда и только тогда, когда найдутся такие автоморфизмы $f, q \in \text{Aut} \langle B; + \rangle$, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} h_2 \alpha_3 &= q h_1 \alpha_3, \\ h_3 \alpha_2 &= f \alpha_2, \\ -\alpha_1 &= -f q^{-1} \alpha_1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Легко видеть, что если равенство

$$h_2 = h_3 h_1 \quad (5.10)$$

не выполняется, то система равенств (5.9) не выполняется ни для каких автоморфизмов f, q . Если равенство (5.10) выполняется, то система равенств (5.9) выполняется при $q = f = h_3$.

Таким образом, рассматриваемая тройка $\langle \otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \rangle$ инцидентна тогда и только тогда, когда выполняется равенство (5.10). Следовательно, тройка $\langle \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \rangle$ является I -системой тогда и только тогда, когда тройка $\langle S_1, S_2, S_3 \rangle$ удовлетворяет следующему условию: для любой подстановки s множества $\{1, 2, 3\}$ и любых элементов $h_{s(1)} \in S_{s(1)}$, $h_{s(2)} \in S_{s(2)}$ найдется такой элемент $h_{s(3)} \in S_{s(3)}$, что выполняется равенство (5.10). Это эквивалентно тому, что выполняются включения

$$S_1 \supseteq S_3^{-1} S_2, \quad S_2 \supseteq S_3 S_1, \quad S_3 \supseteq S_2 S_1^{-1}. \quad (5.11)$$

Легко видеть, что если $S_1 = T e_1$, $S_3 = e_3 T$, $S_2 = e_3 T e_1$ для некоторой группы T , то включения (5.11) выполняются и тройка $\langle \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \rangle$ является I -системой.

Допустим, что включения (5.11) выполняются. Выберем произвольно элементы $e_1 \in S_1$, $e_3 \in S_3$. Положим $T = e_3^{-1} S_2 e_1^{-1}$.

Пусть $g \in T$. Тогда $e_3 g e_1 \in S_2$ и $e_3 g = (e_3 g e_1) e_1^{-1} \in S_2 S_1^{-1} \subseteq S_3$, т.е. $e_3 T \subseteq S_3$. Обратно пусть $h \in S_3$. Тогда $h e_1 \in S_3 S_1 \subseteq S_2$, $e_3^{-1} h = e_3^{-1} (h e_1) e_1^{-1} \in T$ и $h = e_3 (e_3^{-1} h) \in e_3 T$. Таким образом, $e_3 T = S_3$.

Аналогично показываем, что $S_1 = T e_1$.

Пусть $g_1, g_3 \in T$. Тогда произведение $(e_3 g_3) (g_1 e_1)$ принадлежит множеству S_2 и, следовательно, произведение $g_3 g_1$ принадлежит множеству T . Таким образом, множество T является группой. $\square$

6. GA -решетки длины 3 и более

Исследуем неразложимые GA -решетки длины 3 и более. Следствие 4.2 и лемма 1.5 показывают, что каждая такая решетка изоморфна GA -решетке отношений эквивалентности на множестве B^n для некоторого конечного множества B .

Рассмотрим множество B^n , где $n \geq 3$, и неразложимую GA -решетку L_{B^n} отношений эквивалентности на множестве B^n . Будем использовать обозначения, введенные в разделе 4. В частности, там определены GA -решетки $L_{\{i,j\}}$ отношений эквивалентности на множестве B^2 . Из теоремы 2.3 следует, что

$$L_{\{i,j\}} = L_{B^2} (\Omega_{\{i,j\}} \cup \{\diamond_r, \diamond_l\})$$

для слабо ортогонального Σ_B -подмножества $\Omega_{\{i,j\}} \subseteq \mathcal{Q}(B)$. Из определений следует равенство

$$L_{\{i,j\}}^* = \langle \ker \otimes \mid \otimes \in \Omega_{\{i,j\}} \rangle.$$

Согласно теореме 4.4 все множества $\Omega_{\{i,j\}}$ не пусты.

Следствие 6.1. Пусть $i_1 < i_2 < i_3$. Тогда тройка

$$\langle \Omega_{\{i_2,i_3\}}, \Omega_{\{i_1,i_3\}}, \Omega_{\{i_1,i_2\}} \rangle$$

является I -системой.

Доказательство. Для простоты обозначений будем считать, что $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 3$.

Выберем произвольные операции $\otimes_1 \in \Omega_{\{2,3\}}$, $\otimes_2 \in \Omega_{\{1,3\}}$. В силу теоремы 4.1 элемент

$$\tau = \pi_{Z_n \setminus \{1,2,3\}}^{(n)} \wedge (\zeta_{\{2,3\}}(\ker \otimes_1) \wedge \zeta_{\{1,3\}}(\ker \otimes_2))$$

является атомом решетки L_{B^n} . В силу теоремы 4.2 существует такая операция $\otimes_3 \in \Omega_{\{1,2\}}$, что

$$\tau = \pi_{Z_n \setminus \{1,2,3\}}^{(n)} \wedge (\zeta_{\{2,3\}}(\ker \otimes_1) \wedge \zeta_{\{1,3\}}(\ker \otimes_2) \wedge \zeta_{\{1,2\}}(\ker \otimes_3)).$$

Из последнего равенства следует соотношение

$$\tau \subseteq \pi_{Z_n \setminus \{1,2,3\}}^{(n)} \wedge (\zeta_{\{1,3\}}(\ker \otimes_2) \wedge \zeta_{\{1,2\}}(\ker \otimes_3)).$$

Так как обе части неравенства являются атомами, то они равны, значит,

$$\begin{aligned} \pi_{Z_n \setminus \{1,2,3\}}^{(n)} \wedge (\zeta_{\{2,3\}}(\ker \otimes_1) \wedge \zeta_{\{1,3\}}(\ker \otimes_2) \wedge \zeta_{\{1,2\}}(\ker \otimes_3)) = \\ = \pi_{Z_n \setminus \{1,2,3\}}^{(n)} \wedge (\zeta_{\{1,3\}}(\ker \otimes_2) \wedge \zeta_{\{1,2\}}(\ker \otimes_3)). \end{aligned}$$

Применив лемму 1.4, получим

$$\zeta_{\{2,3\}}(\ker \otimes_1) \wedge \zeta_{\{1,3\}}(\ker \otimes_2) \wedge \zeta_{\{1,2\}}(\ker \otimes_3) = \zeta_{\{1,3\}}(\ker \otimes_2) \wedge \zeta_{\{1,2\}}(\ker \otimes_3),$$

откуда следует, что

$$\zeta_{\{1,3\}}(\ker \otimes_2) \wedge \zeta_{\{1,2\}}(\ker \otimes_3) \subseteq \zeta_{\{2,3\}}(\ker \otimes_1).$$

Сравнив это неравенство с формулами (5.1) и (5.2), получаем, что тройка $\langle \otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \rangle$ инцидентна.

Аналогично рассматриваются случаи, когда выбраны две другие операции из тройки $\langle \otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \rangle$. $\square$

Следствие 6.2. Все операции из множества $\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Omega_{\{i,j\}}$ изотопны некоторой групповой операции.

Доказательство. Применив следствие 6.1 и лемму 5.2 к тройке $\{1, 2, 3\}$, получаем, что все операции из множества $\Omega_{\{1,2\}}$ изотопны некоторой групповой операции $+$. Из тех же утверждений, примененных к тройке $\{1, 2, m\}$ ($m \geq 3$), получаем, что все операции из множества $\Omega_{\{1,m\}}$ изотопны всем операциям из множества $\Omega_{\{1,2\}}$. Так как отношение изотопии является отношением эквивалентности, то все операции из множества $\Omega_{\{1,m\}}$ изотопны той же операции $+$.

Пусть $1 < i < j$. Тогда те же утверждения показывают, что все операции из множества $\Omega_{\{i,j\}}$ изотопны всем операциям из множества $\Omega_{\{1,i\}}$ и, следовательно, изотопны операции $+$. $\square$

Допустим, что рассматриваемое множество B является носителем векторного пространства $\mathbf{B} = \langle B; +, \mathbb{F} \rangle$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — семейство подстановок, принадлежащих множеству $\Sigma_B^{(0)}$. Через $\mathcal{F}_{\vec{\alpha}} \langle B; +, \mathbb{F} \rangle$ обозначим множество всех форм $\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x_i)$, $c_i \in \mathbb{F}$, определенных на множестве B^n . Множество всех отношений, являющихся пересечением какого-либо множества ядер таких форм, обозначим $\mathcal{L}_{\vec{\alpha}} \langle B; +, \mathbb{F} \rangle$.

Теорема 6.1. Пусть $\mathbf{L}_{B^n}$ — неразложимая GA -решетка отношений эквивалентности на множестве B^n и $n \geq 3$. Тогда на множестве B можно так определить структуру векторного пространства над полем $\mathbb{F}$, что $\mathbf{L}_{B^n} = \mathcal{L}_{\vec{\alpha}} \langle B; +, \mathbb{F} \rangle$ для подходящих подстановок $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Sigma_B^{(0)}$.

Доказательство. В силу следствия 6.2 существует такая групповая операция $+$ на множестве B , что все операции из каждого множества $\Omega_{\{i,j\}}$ ей изотопны.

Произвольно выберем операции $\otimes_m \in \Omega_{\{1,m\}}$. В силу выбора операции $+$ и леммы 3.1 для подходящих подстановок $\lambda_m, \mu_m \in \Sigma_B^{(0)}$, $\kappa_m \in \Sigma_B$ выполняются равенства $\kappa_m + \mu_m \in \Omega_{\{1,m\}}$.

Применив следствие 6.1, леммы 5.3, 3.3 и 5.4 к тройке $\{1, 2, m\}$, получим, что

$$\begin{aligned}\Omega_{\{2,m\}} &= \mathcal{H}\left(+, -\alpha_2, \alpha_m, T^{(m)}e_1^{(m)}\right), \\ \Omega_{\{1,m\}} &= \mathcal{H}\left(+, -\alpha_1, \alpha_m, e_3^{(m)}T^{(m)}e_1^{(m)}\right), \\ \Omega_{\{1,2\}} &= \mathcal{H}\left(+, -\alpha_1, \alpha_2, e_3^{(m)}T^{(m)}\right).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Здесь $T^{(m)}$ — подгруппа группы $\text{Aut}\langle B; + \rangle$, $e_j^{(m)} \in \text{Aut}\langle B; + \rangle$, $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\alpha_k = \mu_k$ ($k \geq 2$).

Из определений следует, что $\kappa_{-\alpha_1 + \alpha_2} \in \mathcal{H}\left(+, -\alpha_1, \alpha_2, e_3^{(m)}T^{(m)}\right)$ тогда и только тогда, когда $1_B \in e_3^{(m)}T^{(m)}$, что выполняется тогда и только тогда, когда $e_3^{(m)} \in T^{(m)}$. В этом случае $e_3^{(m)}T^{(m)} = T^{(m)}$ и элемент $e_3^{(m)}$ можно удалить из формул (6.1).

Теперь

$$\kappa_{-\alpha_1} + \alpha_m \in \mathcal{H}\left(+, -\alpha_1, \alpha_2, T^{(m)}e_1^{(m)}\right),$$

отсюда так же, как выше, получаем равенство $T^{(m)}e_1^{(m)} = T^{(m)}$, поэтому элемент $e_1^{(m)}$ также можно удалить.

Далее,

$$\mathcal{H}\left(+, -\alpha_1, \alpha_2, T^{(m)}\right) = \mathcal{H}\left(+, -\alpha_1, \alpha_2, T^{(3)}\right).$$

Из определений следует, что последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $T^{(m)} = T^{(3)}$ для всех m . В дальнейшем группу $T^{(3)}$ будем обозначать через T , что дает выражение

$$\Omega_{\{1,m\}} = \mathcal{H}\left(+, -\alpha_1, \alpha_m, T\right).$$

Применив те же результаты к тройке $\{1, i, j\}$, где $1 < i < j$, получим с учетом замечания, приведенного после доказательства леммы 5.3, что

$$\Omega_{\{i,j\}} = \mathcal{H}\left(+, -\alpha_i, \alpha_j, T\right).$$

Пусть $h_2, h_3 \in T$. Тогда операция $\otimes_{1j} = -\alpha_1 + h_j \alpha_j$ принадлежит множеству $\Omega_{\{1,j\}}$. Следовательно, каждое отношение $\ker \otimes_{1j}$ принадлежит решетке $\mathbf{L}_{\{1,j\}}$, а отношения

$$\theta_2 = \zeta_{\{1,2\}} (\ker \otimes_{12}) \wedge \pi_3^{(n)}, \quad \theta_3 = \zeta_{\{1,3\}} (\ker \otimes_{13}) \wedge \pi_2^{(n)}$$

принадлежат решетке $\mathbf{L}_{B^n}$. Вычислим их объединение ρ_{h_2, h_3} . Так как отношения θ_2, θ_3 перестановочны, то $\rho_{h_2, h_3} = \theta_2 \circ \theta_3$, и нам достаточно вычислить произведение рассматриваемых отношений.

Рассмотрим произвольные векторы $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$. В соответствии с определением $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \theta_2 \circ \theta_3$ тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, что

$$\begin{cases} -\alpha_1(x_1) + h_2 \alpha_2(x_2) = -\alpha_1(a_1) + h_2 \alpha_2(a_2), \\ x_3 = a_3, \\ -\alpha_1(x_1) + h_3 \alpha_3(x_3) = -\alpha_1(b_1) + h_3 \alpha_3(b_3), \\ x_2 = b_2. \end{cases} \quad (6.2)$$

Другими словами, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \theta_2 \circ \theta_3$ тогда и только тогда, когда система уравнений (6.2) относительно неизвестных x_1, x_2, x_3 совместна. Нетрудно видеть, что неизвестные x_2, x_3 однозначно определяются, а первое и третье уравнения дают два выражения для неизвестного x_1 . Ясно, что система совместна тогда и только тогда, когда значения этих выражений совпадают, т. е. выполняется равенство

$$-\alpha_1(a_1) + h_2 \alpha_2(a_2) - h_2 \alpha_2(b_2) = -\alpha_1(b_1) + h_3 \alpha_3(b_3) - h_3 \alpha_3(a_3),$$

которое можно записать в эквивалентном виде:

$$h_3 \alpha_3(a_3) - h_3 \alpha_3(b_3) + \alpha_1(b_1) - \alpha_1(a_1) + h_2 \alpha_2(a_2) - h_2 \alpha_2(b_2) = 0. \quad (6.3)$$

Получили явное описание отношения $\rho_{h_2, h_3} = \theta_2 \vee \theta_3$: векторы $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ находятся в отношении ρ_{h_2, h_3} тогда и только тогда, когда выполняется равенство (6.3).

Отношение $\theta_2 \vee \theta_3$ является отношением эквивалентности. В частности, это означает, что равенство (6.3) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется «симметричное» равенство

$$h_3 \alpha_3(b_3) - h_3 \alpha_3(a_3) + \alpha_1(a_1) - \alpha_1(b_1) + h_2 \alpha_2(b_2) - h_2 \alpha_2(a_2) = 0. \quad (6.4)$$

Произвольно выберем элементы $d_1, d_2 \in B$. Положим

$$a_1 = \alpha_1^{-1}(d_1), \quad a_2 = (h_2 \alpha_2)^{-1}(-d_2), \quad a_3 = (h_3 \alpha_3)^{-1}(d_2 + d_1), \\ b_1 = b_2 = b_3 = 0.$$

Подставив эти значения в формулу (6.3), получим

$$\begin{aligned} & h_3\alpha_3 \left((h_3\alpha_3)^{-1} (d_2 + d_1) \right) - h_3\alpha_3 (0) + \alpha_1 (0) - \alpha_1 (\alpha_1^{-1} (d_1)) + \\ & + h_2\alpha_2 \left((h_2\alpha_2)^{-1} (-d_2) \right) - h_2\alpha_2 (0) = d_2 + d_1 - d_1 - d_2 = 0, \end{aligned}$$

т. е. равенство (6.3) выполняется. Следовательно, для этих значений должно выполняться и равенство (6.4). Таким образом,

$$\begin{aligned} 0 &= h_3\alpha_3 (0) - h_3\alpha_3 \left((h_3\alpha_3)^{-1} (d_2 + d_1) \right) + \alpha_1 (\alpha_1^{-1} (d_1)) - \alpha_1 (0) + \\ &+ h_2\alpha_2 (0) - h_2\alpha_2 \left((h_2\alpha_2)^{-1} (-d_2) \right) = - (d_2 + d_1) + d_1 + d_2, \end{aligned}$$

и $d_2 + d_1 = d_1 + d_2$. Так как элементы d_1, d_2 выбирались произвольно, то группа $\langle B; + \rangle$ абелева.

Для абелевой группы $\langle B; + \rangle$ условие (6.3) эквивалентно условию

$$-\alpha_1 (a_1) + h_2\alpha_2 (a_2) + h_3\alpha_3 (a_3) = -\alpha_1 (b_1) + h_2\alpha_2 (b_2) + h_3\alpha_3 (b_3), \quad (6.5)$$

которое и определяет отношение ρ_{h_2, h_3} .

Пусть $g \in T$. Рассмотрим отношение $\sigma_g = \zeta_{23} (\ker (-\alpha_2 + g\alpha_3))$ и отношение $\eta = (\rho_{h_2, h_3} \wedge \sigma_g) \vee \pi_{\{1, 2\}}^{(n)}$. Опять воспользовавшись тем, что решетка L_{B^n} перестановочна, получим $\eta = (\rho_{h_2, h_3} \wedge \sigma_g) \circ \pi_{\{1, 2\}}^{(n)}$. Поэтому векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ находятся в отношении η тогда и только тогда, когда совместна система уравнений

$$\begin{cases} -\alpha_1 (a_1) + h_2\alpha_2 (a_2) + h_3\alpha_3 (a_3) = -\alpha_1 (x_1) + h_2\alpha_2 (x_2) + h_3\alpha_3 (x_3), \\ -\alpha_2 (a_2) + g\alpha_3 (a_3) = -\alpha_2 (x_2) + g\alpha_3 (x_3), \\ x_1 = b_1, \\ x_2 = b_2. \end{cases}$$

Последние три уравнения однозначно определяют неизвестные значения:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1, \quad x_2 = b_2, \\ x_3 &= \alpha_3^{-1} g^{-1} (\alpha_2 (b) - \alpha_2 (a_2) + g\alpha_3 (a_3)). \end{aligned}$$

Подставив эти значения в первое уравнение, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} & -\alpha_1 (a_1) + h_2\alpha_2 (a_2) + h_3\alpha_3 (a_3) = \\ & = -\alpha_1 (b_1) + h_2\alpha_2 (b_2) + h_3\alpha_3 (\alpha_3^{-1} g^{-1} (\alpha_2 (b) - \alpha_2 (a_2) + g\alpha_3 (a_3))) = \\ & = -\alpha_1 (b_1) + h_2\alpha_2 (b_2) + h_3g^{-1}\alpha_2 (b) - h_3g^{-1}\alpha_2 (a_2) + h_3\alpha_3 (a_3), \end{aligned}$$

дающую равенство

$$-\alpha_1 (a_1) + (h_2 + h_3g^{-1}) \alpha_2 (a_2) = -\alpha_1 (b_1) + (h_2 + h_3g^{-1}) \alpha_2 (b_2).$$

Отношение $\zeta_{\{1,2\}}^{-1}(\eta)$ принадлежит решетке $\mathbf{L}_{\{1,2\}}$. Поэтому либо $\zeta_{\{1,2\}}^{-1}(\eta) \in \mathbf{D}^{(2)}(B^2)$, либо $\zeta_{\{1,2\}}^{-1}(\eta) \in \mathbf{L}_{\{1,2\}}^*$. В первом случае отображение $h_2 + h_3g^{-1}$ является нулевым эндоморфизмом O_B . Во втором отображение $h_2 + h_3g^{-1}$ равно некоторому автоморфизму $f \in T$.

Так как автоморфизмы $h_2 + h_3g^{-1}$ выбирались произвольно, то множество $\mathbb{F} = T \cup \{O_B\}$ замкнуто относительно операции $+$ и, следовательно, является полем, а множество B — векторным пространством над этим полем.

Все отношения, входящие в решетку $\mathcal{L}_{\vec{\alpha}}\langle B; +, \mathbb{F} \rangle$, перестановочны (см. [8]). Легко проверяется, что и другие свойства, входящие в определение GA -решеток, также выполняются и $\mathcal{L}_{\vec{\alpha}}\langle B; +, \mathbb{F} \rangle$ является GA -решеткой.

Рассмотрим отношение

$$\theta \in \left[\pi_{\{i,j\}}^{(2)}, \nabla_{B^n} \right]_{\mathcal{E}(B^n)}.$$

Допустим, что $\theta \in \mathbf{L}_{B^n}$. Тогда либо $\theta \in \mathbf{D}^{(n)}(B^n)$, либо $\theta \in \Omega_{\{i,j\}}$. В первом случае $\theta \in \mathcal{L}_{\vec{\alpha}}\langle B; +, \mathbb{F} \rangle$ в силу леммы 1.2. Во втором отношении θ имеет вид $\zeta_{\{i,j\}}(\ker(\kappa_{-g\alpha_i + gc\alpha_j}))$. Из равенств (3.1) и (1.5) следует, что отношение θ является ядром формы $(-1_B)(-\alpha_i(x_i)) + c\alpha_j(x_j)$, т. е. оно принадлежит решетке $\mathcal{L}_{\vec{\alpha}}\langle B; +, \mathbb{F} \rangle$.

Допустим, что, напротив, $\theta \in \mathcal{L}_{\vec{\alpha}}\langle B; +, \mathbb{F} \rangle$. Тогда $\theta = \ker(\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x_i))$ для подходящих элементов $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$. Если хотя бы один из элементов c_k ($k \notin \{i, j\}$) отличен от O_B , то неравенство $\theta \supseteq \pi_{\{i,j\}}^{(n)}$ не выполняется, что противоречит условию. Поэтому все эти элементы равны 0.

Если $c_i = 0$ или $c_j = 0$, то $\theta \in \mathbf{D}^{(n)}(B^n)$ и $\theta \in \mathbf{L}_{B^n}$.

Осталось рассмотреть случай, когда $c_i, c_j \neq 0$. Имеем

$$c_i \alpha_i(x_i) + c_j \alpha_j(x_j) = x_i \left(\begin{smallmatrix} -c_i \\ -\alpha_i \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} -c_i^{-1}c_j \\ (-c_i^{-1}c_j)\alpha_j \end{smallmatrix} \right) x_j,$$

откуда следует, что

$$\theta = \zeta_{\{i,j\}} \left(\ker \left(\begin{smallmatrix} -c_i \\ -\alpha_i \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} -c_i^{-1}c_j \\ (-c_i^{-1}c_j)\alpha_j \end{smallmatrix} \right) \right),$$

и опять же $\theta \in \mathbf{L}_{B^n}$.

Таким образом, следы решеток $\mathbf{L}_{B^n}$ и $\mathcal{L}_{\vec{\alpha}}\langle B; +, \mathbb{F} \rangle$ в каждом из множеств $B_i \times B_j$, где B_i, B_j — копии множества B , одинаковы. Результаты раздела 4 показывают, что множество таких следов однозначно определяет GA -решетку. Поэтому $\mathbf{L}_{B^n} = \mathcal{L}_{\vec{\alpha}}\langle B; +, \mathbb{F} \rangle$. $\square$

Список литературы

- [1] Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп*, М.: Наука, 1967, 224 с.
- [2] Белоусов В. Д., “Системы квазигрупп с обобщенными тождествами”, *Успехи матем. наук*, **XX**:1 (121), 75–146.
- [3] Глухов М. М., “О методах построения систем ортогональных квазигрупп с использованием групп”, *Математические вопросы криптографии*, **2**:4 (2011), 5–24.
- [4] Горчинский Ю. Н., “О гомоморфизмах многоосновных универсальных алгебр в связи с криптографическими применениями”, *Труды по дискретной математике*, **1**, М.: Научное изд-во ТВП, 1997, 67–84.
- [5] Гретцер Г., *Общая теория решеток*, М.: Мир, 1982, 456 с.
- [6] Кон П., *Универсальная алгебра*, М.: Мир, 1968, 359 с.
- [7] Курош А. Г., *Лекции по общей алгебре*, М.: Наука, 1973, 40 с.
- [8] Мальцев А. И., “К общей теории алгебраических систем”, *Матем. сб. (новая серия)*, **35(77)**:1 (1954), 3–20.
- [9] Полин С. В., “Решение уравнений методом последовательного группирования и его оптимизация”, *Математические вопросы криптографии*, **3**:1 (2012), 97–123.
- [10] Полин С. В., “Системы уравнений и решетки конгруэнций универсальных алгебр”, *Математические вопросы криптографии*, **4**:4 (2013), 109–144.
- [11] Полин С. В., “Перестановочные решетки отношений эквивалентности декартовых произведений”, *Математические вопросы криптографии*, **5**:3 (2014), 81–116.
- [12] Полин С. В., “Перестановочные решетки отношений эквивалентности на декартовых произведениях и согласованные с ними системы уравнений. I”, *Математические вопросы криптографии*, **6**:1 (2015), 135–158.
- [13] Харари Ф., *Теория графов*, М.: Мир, 1973, 300 с.