Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Федченко, Показатели рассеивания линейной среды AES-подобных алгоритмов шифрования, *Матем. вопр. криптогр.*, 2017, том 8, выпуск 3, 109–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:21:26

Показатели рассеивания линейной среды AES-подобных алгоритмов шифрования

В. А. Федченко

Белорусский государственный университет, Минск

Получено 10.05.2017

Аннотация. В качестве модели для AES-подобных алгоритмов шифрования рассматриваются XSLP-шифры с условием, что все перестановки P являются равномерно рассеивающими, а блоки матриц преобразований L имеют фиксированный линейный (разностный) коэффициент рассеивания ρ . При всех допустимых ρ получена точная нижняя оценка минимального количества локальных подстановок, участвующих в системах линейных (разностных) вероятностных соотношений для произвольного числа итераций XSLP-шифра.

Ключевые слова: AES, AES-подобные алгоритмы, XSLP-шифры, линейный криптоанализ, разностный криптоанализ, активные S-блоки

Diffusion rates of linear medium in AES-like ciphers

V. A. Fedchenko

Belarusian State University, Minsk

Abstract. We model AES-like algorithms by XSLP-ciphers having uniformly diffusive permutations P and fixed linear (differential) branch number ρ of blocks of transformation matrices L . For all admissible values of ρ and arbitrary number of rounds the exact lower bound for the number of active S-boxes in systems of linear (differential) probabilistic relations is obtained.

Keywords: AES, AES-like algorithms, XSLP-ciphers, linear cryptanalysis, differential cryptanalysis, active S-boxes

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2017, v. 8, № 3, pp. 109–126 (Russian)

© Академия криптографии Российской Федерации, 2017 г.

1. XSLP-шифры в качестве модели для AES-подобных алгоритмов шифрования

Алгоритм шифрования AES [8] в настоящее время является де-факто мировым стандартом шифрования. Помимо практической стойкости и эффективности в эксплуатации достоинством этого алгоритма является доказуемая стойкость к разностному и линейному методам криптографического анализа. Это свойство во многом обеспечивается продуманной структурой алгоритма AES.

Структура алгоритма AES характерна для многих других алгоритмов шифрования, неформально называемых «AES-подобными». В качестве примеров можно привести алгоритмы Anubis [3], BKSQ [7], Crypton [10], GrandCru [5], Square [6] и другие. Общность структуры AES-подобных алгоритмов шифрования позволяет проводить их исследование с единых позиций.

В качестве модели для исследования AES-подобных алгоритмов шифрования целесообразно использовать определение XSLP-схемы [2]. Положим, что длина блока равна $n = mk^2$ битов. Алгоритм, реализующий XSLP-схему, оперирует с mk^2 -векторами $x \in V_{mk^2}$, состоящими из mk -векторов в количестве k штук:

$$x = (\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}}_{mk\text{-вектор } 0}, \underbrace{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2k-1}}_{mk\text{-вектор } 1}, \dots, \underbrace{x_{(k-1)k}, x_{(k-1)k+1}, \dots, x_{k^2-1}}_{mk\text{-вектор } k-1}),$$

где $x_j \in V_m = \text{GF}(2)^m$ ($j=0, 1, \dots, k^2-1$) — m -векторы. Для m -векторов удобно использовать нумерацию, связанную с номерами mk -векторов, в которые они входят. Пусть j — номер m -вектора. Определим его альтернативный номер как пару чисел (j_0, j_1) , $j_0, j_1 = 0, 1, \dots, k-1$, где $j = j_0 + kj_1$, j_0 — младшая цифра, j_1 — старшая. При такой записи j_0 — номер m -вектора в mk -векторе с номером j_1 . В этом случае исходный mk^2 -вектор $x \in V_{mk^2}$ имеет вид

$$x = (\underbrace{x_{(0,0)}, \dots, x_{(0,k-1)}}_{mk\text{-вектор } 0}, \underbrace{x_{(0,1)}, \dots, x_{(k-1,1)}}_{mk\text{-вектор } 1}, \dots, \underbrace{x_{(0,k-1)}, \dots, x_{(k-1,k-1)}}_{mk\text{-вектор } k-1}),$$

где $x_{(j_0, j_1)} \in V_m$, $j_0, j_1 = 0, 1, \dots, k-1$.

Базовый блочный алгоритм зашифрования XSLP-схемы состоит из r одно-типных итераций $R_i : V_{mk^2} \rightarrow V_{mk^2}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Каждая итерация представляет собой произведение биективных преобразований X_i , S_i , L_i , $\hat{P}_i$, действующих на mk^2 -векторах:

$$R_i = X_i \cdot S_i \cdot L_i \cdot \hat{P}_i, \quad b = R_i(a), \quad b = \hat{P}_i \left(L_i \left(S_i \left(X_i(a) \right) \right) \right),$$

$$a \xrightarrow{X_i} u \xrightarrow{S_i} v \xrightarrow{L_i} w \xrightarrow{\hat{P}_i} b, \quad a, b, u, v, w \in V_{mk^2}.$$

Преобразование $X_i : V_{mk^2} \rightarrow V_{mk^2}$, $i = 1, 2, \dots, r$, представляет собой наложение итерационного ключа $z_i \in V_{mk^2}$ побитово по модулю 2:

$$u = X_i(a) = a \oplus z_i = ((a_0 \oplus z_{i,0}), (a_1 \oplus z_{i,1}), \dots, (a_{k^2-1} \oplus z_{i,k^2-1})) =$$

$$= ((a_{0,0} \oplus z_{i,(0,0)}), (a_{1,0} \oplus z_{i,(1,0)}), \dots, (a_{k-1,k-1} \oplus z_{i,(k-1,k-1)})).$$

Преобразование $S_i : V_{mk^2} \rightarrow V_{mk^2}$, $i = 1, 2, \dots, r$, представляет собой замену m -векторов под действием локальных подстановок $\pi_{i,j} \in S(V_m)$, $j = 0, 1, \dots, k^2 - 1$:

$$v = S_i(u) = (\pi_{i,0}(u_0), \pi_{i,1}(u_1), \dots, \pi_{i,k^2-1}(u_{k^2-1})) =$$

$$= (\pi_{i,(0,0)}(u_{0,0}), \pi_{i,(1,0)}(u_{1,0}), \dots, \pi_{i,(k-1,k-1)}(u_{k-1,k-1})).$$

Преобразование $L_i : V_{mk^2} \rightarrow V_{mk^2}$, $i = 1, 2, \dots, r$, представляет собой умножение mk -векторов справа на невырожденные матрицы $B_{i,j_1} \in GL(mk, 2)$, $j_1 = 0, 1, \dots, k - 1$:

$$w = L_i(v) = ((v_{0,0}, v_{1,0}, \dots, v_{k-1,0}) \cdot B_{i,0}, (v_{0,1}, v_{1,1}, \dots, v_{k-1,1}) \cdot B_{i,1}, \dots$$

$$\dots, (v_{0,k-1}, v_{1,k-1}, \dots, v_{k-1,k-1}) \cdot B_{i,k-1}).$$

Преобразование $\hat{P}_i : V_{mk^2} \rightarrow V_{mk^2}$, $i = 1, 2, \dots, r$, представляет собой перестановку m -векторов по правилу

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k^2-1 \\ P_i(0) & P_i(1) & \dots & P_i(k^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_i^{-1}(0) & P_i^{-1}(1) & \dots & P_i^{-1}(k^2-1) \\ 0 & 1 & \dots & k^2-1 \end{pmatrix},$$

где $P_i \in S(\overline{0, k^2 - 1})$, и предполагается, что m -вектор с номером 0 переходит на место $P_i(0)$, m -вектор с номером 1 переходит на место $P_i(1)$ и так далее:

$$b = \hat{P}_i(w) = (w_{P_i^{-1}(0)}, w_{P_i^{-1}(1)}, \dots, w_{P_i^{-1}(k^2-1)}).$$

Функциональная схема одной итерации XSLP-схемы изображена на рис. 1.

Рис. 1. Функциональная схема i -й итерации XSLP-схемы

Замечание 1. В сущности, на рис. 1 представлены также XSL-схемы и SP-сети. С одной стороны, исключив преобразование $\hat{P}_i$, получим k подстановок, заданных одной итерацией классических XSL-схем с основным алфавитом $\text{GF}(2)$. С другой стороны, объявив эти XSL-схемы отдельными подстановками на V_{mk} , получим классическую SP-сеть с основным алфавитом V_m . Также XSL-схему можно получить, рассматривая преобразования L_i и $\hat{P}_i$ как единое линейное преобразование. Линейное преобразование XSLP-схем, заданное в виде суперпозиции преобразований $\hat{P}_i$ и L_i , где последнее состоит из B_{i,j_1} , $j = 0, \dots, k-1$, является удачным компромиссом между перестановками mk^2 битов (как в классических SP-сетях) и максимально рассеивающими матрицами из $\text{GL}(mk^2, 2)$ (как в XSL-схемах, см. (10) и (11) ниже). Как правило, классические SP-сети уступают XSLP-схемам с точки зрения аналитической сложности, а максимально рассеивающие матрицы XSL-схем сложнее для реализации.

Основными ключевыми параметрами XSLP-схемы являются итерационные ключи z_i , $i = 1, 2, \dots, r$, представляющие собой mk^2 -векторы. Алгоритм развертывания итерационных ключей не специфицируется. Дополнительными ключевыми параметрами XSLP-схемы могут являться элементы итерационных преобразований (локальные подстановки, матрицы, перестановки m -векторов).

Таким образом определено понятие XSLP-схемы. В [2] предлагается также более общее понятие XSLP-шифра, структура итерации которого подходит под определение XSLP-схемы при любом порядке следования преобразований $X_i, S_i, L_i, \hat{P}_i$. Например, алгоритм AES относится к XSLP-шифрам и построен по XSLP-схеме при $m = 8, k = 4$.

2. Линейный и разностный методы криптографического анализа XSLP-шифров

Криптографический анализ XSLP-шифров линейным и разностным методами можно проводить по единой схеме, используя их двойственность [1]. Напомним эту схему на примере линейного метода в соответствии с изложенным в [1, 2].

Пусть $F : V_{mk^2} \rightarrow V_{mk^2}$ — некоторое биективное преобразование, действующее на векторах-строках длины mk^2 . Пара векторов-столбцов $p', h'' \in V_{mk^2}^* \setminus \{0\}$, где $V_{mk^2}^*$ — пространство векторов-столбцов, задает линейное вероятностное соотношение для F , как бы приближенное равенство, записываемое в виде $a \cdot p' \simeq b \cdot h''$, где $a, b \in V_{mk^2}$, $b = F(a)$, a выбирается из V_{mk^2} случайно и равномерно. Соответствующее точное равенство выполняется с некоторой вероятностью:

$$P\{a \cdot p' = b \cdot h''\} = \frac{1 + \delta_{p', h''}}{2}, \quad (1)$$

где $\delta_{p', h''} \in [-1, 1]$ — преобладание линейного вероятностного соотношения. Чем больше $\delta_{p', h''}$, тем более оправдан термин «приближенное равенство».

Основной задачей линейного метода анализа шифрпреобразований является нахождение линейного вероятностного соотношения, которое выполняется с большим модулем преобладания при любом ключе. Эта задача обычно решается путем нахождения так называемой *системы согласованных соотношений* для составных частей шифрпреобразования.

Пусть $F : V_{mk^2} \rightarrow V_{mk^2}$ — произведение t биективных преобразований, действующих на векторах-строках длины mk^2 : $F = F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_t$. Пусть для каждого $j \in \overline{1, t}$ векторы-столбцы $p'_j, h''_j \in V_{mk^2}^* \setminus \{0\}$ задают линейное вероятностное соотношение для преобразования F_j , выполняющееся с преобладанием $\delta_{p'_j, h''_j}$. Условие согласованности в данном случае означает, что $h''_j = p'_{j+1}$ для всех $j \in \overline{1, t-1}$. Тогда $p' = p'_1$ и $h'' = h''_t$ задают линейное вероятностное соотношение для преобразования F . В качестве оценки модуля преобладания $|\delta_{p', h''}|$ этого соотношения используют величину $\tilde{\delta}_{p', h''} = \prod_{j=1}^t |\delta_{p'_j, h''_j}|$ и решают задачу по ее максимизации.

В XSLP-шифрах в качестве отдельных преобразований, произведение которых составляет все шифрпреобразование $E = R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_r$, выступают $X_i, S_i, L_i, \hat{P}_i, R_i = X_i \cdot S_i \cdot L_i \cdot \hat{P}_i$, $i = 1, 2, \dots, r$. Рассмотрим свойства их линейных вероятностных соотношений.

Для преобразования S_i обозначим векторы-столбцы, задающие линейное вероятностное соотношение, через $l'_i, l''_i \in V_{mk^2}^* \setminus \{0\}$. Представим l'_i и l''_i в виде $l'_i = ((l'_{i,0})^\top, (l'_{i,1})^\top, \dots, (l'_{i,k^2-1})^\top)^\top$, $l''_i = ((l''_{i,0})^\top, (l''_{i,1})^\top, \dots, (l''_{i,k^2-1})^\top)^\top$, где $l'_{i,j}, l''_{i,j} \in V_m^*$, $j = 0, 1, \dots, k^2 - 1$, $\top$ — знак транспонирования. Очевидно, что

$$|\delta_{l'_i, l''_i}| = \prod_{j=0}^{k^2-1} |\delta_{l'_{i,j}, l''_{i,j}}|, \quad (2)$$

где $l'_{i,j}, l''_{i,j}$ задают линейные вероятностные соотношения с преобразованиями $\delta_{l'_{i,j}, l''_{i,j}}$ для локальных подстановок $\pi_{i,j}$.

Для преобразований $X_i, L_i, \hat{P}_i$ обозначим векторы-столбцы, задающие линейные вероятностные соотношения, соответственно $p'_i, p''_i \in V_{mk^2}^*$, $t'_i, t''_i \in V_{mk^2}^*$ и $h'_i, h''_i \in V_{mk^2}^*$. Покажем, что они выражаются через l'_i, l''_i благодаря согласованности, предполагающей равенства $p''_i = l'_i$, $l''_i = t'_i$ и $t''_i = h'_i$, а также $h''_i = p'_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, r - 1$.

1. Рассмотрим преобразование X_i . Можно заметить, что вне зависимости от итерационного ключа z_i справедливо соотношение

$$|\delta_{p'_i, p''_i}| = \begin{cases} 1, & \text{если } p'_i = p''_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

Исключая нуль и используя согласованность, имеем $p'_i = p''_i = l'_i$.

2. Рассмотрим преобразование L_i . Оно задается умножением на матрицу, также обозначаемую L_i . Тогда

$$|\delta_{t'_i, t''_i}| = \begin{cases} 1, & \text{если } t'_i = L_i \cdot t''_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Исключая нуль и используя согласованность, имеем $t'_i = l''_i$, $t''_i = L_i^{-1} \cdot t'_i = L_i^{-1} \cdot l''_i$.

3. Рассмотрим преобразование $\hat{P}_i$. С учетом равенств $h'_i = t''_i = L_i^{-1} \cdot l''_i$ аналогично предыдущему имеем: $h''_i = \hat{P}_i^{-1} \cdot h'_i = \hat{P}_i^{-1} \cdot L_i^{-1} \cdot l''_i = (L_i \cdot \hat{P}_i)^{-1} \cdot l''_i$. Заметим, что если $h'_i, h''_i \in V_{mk}^*$ составлены соответственно из векторов-столбцов $h'_{i,j}, h''_{i,j} \in V_m^*$, то $h''_{i,j} = h'_{i, P^{-1}(j)}$, $j = 0, 1, \dots, k^2 - 1$.

Поскольку каждое из преобразований X_i , S_i , $\hat{P}_i$ преобразует отдельные m -векторы независимо друг от друга, в соотношениях для них любым $p'_{i,j'}, l'_{i,j'}, h'_{i,j'} \in V_m^* \setminus \{0\}$, $j' = 0, 1, \dots, k^2 - 1$, соответствуют вполне определенные $p''_{i,j''}, l''_{i,j''}, h''_{i,j''} \in V_m^* \setminus \{0\}$, $j'' = 0, 1, \dots, k^2 - 1$. Причем $j' = j''$ в случае преобразований X_i , S_i , а $j'' = P_i(j')$ в случае преобразования $\hat{P}_i$.

Линейное вероятностное соотношение для $R_i = X_i \cdot S_i \cdot L_i \cdot \hat{P}_i$ задается векторами-столбцами l'_i, h''_i , $i = 1, 2, \dots, r$, причем (по согласованности) $h''_i = l'_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, r - 1$. Линейное вероятностное соотношение для $E = R_1 \cdot R_r \cdot \dots \cdot R_r$ задается векторами-столбцами l'_1, h''_r .

Взаимосвязь между линейными вероятностными соотношениями для составных частей XSLP-схемы представлена на рис. 2.

Рис. 2. Иллюстрация к линейным вероятностным соотношениям для XSLP-схемы

Принимая во внимание указанные выше свойства, можно заметить, что для r итераций XSLP-шифра оценка модуля преобладания выражается формулой

$$\tilde{\delta}_{\mathcal{L}}(r) = \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{k^2-1} |\delta_{l'_{i,j}, l''_{i,j}}|, \quad (5)$$

где $\mathcal{L} = \{(l'_{i,j}, l''_{i,j}), i = 1, 2, \dots, r, j = 0, 1, \dots, k^2 - 1\}$ — согласованная система линейных вероятностных соотношений для локальных подстановок $\pi_{i,j}$. При этом можно считать, что для всех $i \in \overline{1, r}$, $j \in \overline{0, k^2 - 1}$ либо $l'_{i,j} = 0$, $l''_{i,j} = 0$, либо $l'_{i,j} \neq 0$, $l''_{i,j} \neq 0$. Другие две ситуации в случае подстановок заведомо приводят к нулевому преобладанию $\delta_{l'_{i,j}, l''_{i,j}}$.

Пусть W — все возможные системы $\mathcal{L}$, удовлетворяющие условиям $l'_{i,j} \neq 0$ и $l''_{i,j} \neq 0$ при некоторых $i \in \overline{1, r}$ и $j \in \overline{0, k^2 - 1}$. Тогда оценка стойкости XSLP-шифра к линейному методу предполагает нахождение точного значения или оценки сверху величины

$$\tilde{\delta}_{\max}(r) = \max_{\mathcal{L} \in W} \tilde{\delta}_{\mathcal{L}}(r). \quad (6)$$

Будем считать, что для локальных подстановок в рассматриваемых шифрах не существует ненулевых соотношений, выполняющихся с модулем преобладания 1. Тогда важное значение имеет количество сомножителей в (5). Обозначим через

$$\theta_{\mathcal{L}}(r) = |\{i = 1, 2, \dots, r, j = 0, 1, \dots, k^2 - 1: l'_{i,j} \neq 0, l''_{i,j} \neq 0\}| \quad (7)$$

количество ненулевых локальных линейных вероятностных соотношений в системе $\mathcal{L}$ для r итераций XSLP-шифра.

Эта величина полностью определяется *линейной средой*, т. е. совокупностью линейных преобразований XSLP-шифра [1].

Определение 1 ([2]). Показателем рассеивания линейной среды XSLP-шифра с r итерациями называется величина

$$\theta_{\min}(r) = \min_{\mathcal{L} \in W} \theta_{\mathcal{L}}(r). \quad (8)$$

Иногда подстановки (S-блоки), входящие в систему $\mathcal{L}$ с ненулевыми соотношениями, называют *активными*. Тогда $\theta_{\min}(r)$ представляет собой *минимальное количество активных S-блоков*.

Используя показатель рассеивания линейной среды, можно получить, например, следующую оценку:

$$\tilde{\delta}_{\max}(r) \leq \left(\max_{i \in \overline{1, r}, j \in \overline{0, k^2-1}} \delta_{\pi_{i,j}} \right)^{\theta_{\min}(r)}, \quad (9)$$

где $\delta_{\pi_{i,j}}$ — наибольший модуль преобладания по всем ненулевым линейным вероятностным соотношениям (*линейная характеристика*) локальной подстановки $\pi_{i,j}$.

С учетом двойственности [1] показатель рассеивания линейной среды XSLP-шифра определяется для линейного и разностного методов одинаково, но сами значения, вообще говоря, могут быть различными.

Естественным образом возникают задачи оценки линейных (разностных) характеристик локальных подстановок и показателя рассеивания линейной среды. Настоящая работа посвящена второй задаче и связанным с ней вопросам.

Вычисление показателя рассеивания линейной среды основывается на рассеивающих характеристиках линейных преобразований L_i и $\hat{P}_i$.

Перестановки m -векторов в AES-подобных алгоритмах шифрования, а значит, и преобразования $\hat{P}_i$ в XSLP-шифрах, обычно выбирают в соответствии со следующим определением.

Определение 2 ([2]). Будем говорить, что преобразование $\hat{P}_i : V_{mk^2} \rightarrow V_{mk^2}$ является *равномерно рассеивающим*, если для соответствующей перестановки

$$\begin{aligned} P_i &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k^2-1 \\ P_i(0) & P_i(1) & \dots & P_i(k^2-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & \dots & (k-1,0) & \dots & (0,k-1) & (1,k-1) & \dots & (k-1,k-1) \\ P_i(0,0) & P_i(1,0) & \dots & P_i(k-1,0) & \dots & P_i(0,k-1) & P_i(1,k-1) & \dots & P_i(k-1,k-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

выполняется условие

$$\left| \left\{ \left[\frac{P_i(j_0, j_1)}{k} \right], j_0 \in \overline{0, k-1} \right\} \right| = k \text{ для всех } j_1 \in \overline{0, k-1},$$

т.е. m -векторы из каждого mk -вектора после перестановки распределяются равномерно по всем mk -векторам.

Для оценки рассеивающих свойств преобразований L_i используют характеристики матриц $B_{i,j_1} \in GL(mk, 2)$, $j_1 = 0, 1, \dots, k-1$, из которых состоит это преобразование. Обозначим через $[x]$ количество ненулевых m -векторов в mk -векторе $x \in V_{mk}$.

Определение 3 ([2]). *Линейным коэффициентом рассеивания* матрицы $M \in \text{GL}(mk, 2)$ будем называть величину

$$\rho_L(M) = \min_{l \in V_{mk} \setminus \{0\}} ([l] + [l \cdot M^T]). \quad (10)$$

Определение 4 ([2]). *Разностным коэффициентом рассеивания* матрицы $M \in \text{GL}(mk, 2)$ будем называть величину

$$\rho_D(M) = \min_{l \in V_{mk} \setminus \{0\}} ([l] + [l \cdot M]). \quad (11)$$

Для любой матрицы $M \in \text{GL}(mk, 2)$ справедливы неравенства $2 \leq \rho_D(M) \leq k + 1$ и $2 \leq \rho_L(M) \leq k + 1$. Известно, что верхние границы этих неравенств достигаются одновременно. В случае когда $\rho_D(M) = \rho_L(M) = k + 1$, матрицу M называют *максимально рассеивающей*.

Показатель рассеивания линейной среды XSLP-шифра полностью определяется перестановками P_i , $i = 1, 2, \dots, r$, коэффициентами рассеивания матриц B_{i,j_1} , $i = 1, 2, \dots, r$, $j_1 = 0, 1, \dots, k-1$, а также количеством итераций r . Таким образом, задача определения показателя рассеивания является оптимизационной задачей дискретной математики. С одной стороны, для ее решения существуют различные *алгоритмические* подходы.

1. Подход, основанный на переборе методом ветвей и границ [4].
2. Подход, основанный на решении систем линейных неравенств [11].
3. Подход, основанный на поиске с использованием графов [9].

С другой стороны, *теоретический* подход использовался авторами алгоритма AES при оценке показателя рассеивания четырех итераций этого шифра [8]. В [2] получена общая формула для показателя рассеивания XSLP-шифров с равномерно рассеивающими перестановками $\hat{P}_i$ и максимально рассеивающими матрицами B_{i,j_1} , $i = 1, 2, \dots, r$, $j_1 = 0, 1, \dots, k-1$.

3. Графовая модель для XSLP-шифров с равномерно рассеивающими перестановками

Для исследования рассеивающих свойств итерациями удобно использовать графовую модель XSLP-шифров с длиной блока $n = mk^2$ битов и r итерациями [2].

Системе согласованных линейных (разностных) вероятностных соотношений $\mathcal{L}$ для XSLP-шифра поставим в соответствие ориентированный *граф системы соотношений* $\Gamma_{\mathcal{L}}$. Такой граф состоит из r слоев вершин и $r + 1$ слоев направленных ребер (дуг). Пусть далее $\mathcal{L}$ — система, например, линейных вероятностных соотношений.

С некоторой вершиной v_{i,j_1} слоя $i = 1, 2, \dots, r$ ассоциируется матрица B_{i,j_1} преобразования L_i , для которой в системе $\mathcal{L}$ присутствует ненулевое линейное вероятностное соотношение, задаваемое векторами-столбцами $t'_{i,j_1}, t''_{i,j_1} \in V_{mk}^* \setminus \{0\}$, $j_1 = 0, 1, \dots, k-1$.

Укажем правило соединения вершин дугами. Рассмотрим соседние итерации с номерами i и $i+1$, имеющие вид $X_i \cdot S_i \cdot L_i \cdot \hat{P}_i$ и $X_{i+1} \cdot S_{i+1} \cdot L_{i+1} \cdot \hat{P}_{i+1}$. Для преобразования $\hat{P}_i \cdot X_{i+1} \cdot S_{i+1}$ линейное вероятностное соотношение задается векторами-столбцами $t''_i, t'_{i+1} \in V_{mk}^*$, состоящими из k^2 векторов-столбцов $t''_{i,(j'_0,j'_1)}, t'_{i+1,(j'_0,j'_1)} \in V_m^*$, $j'_0, j'_1, j''_0, j''_1 \in \overline{0, k-1}$. По свойству преобразований $\hat{P}_i, X_{i+1}, S_{i+1}$ каждому ненулевому вектору-столбцу $t''_{i,(j''_0,j''_1)}$ соответствует вполне определенный ненулевой вектор-столбец $t'_{i+1,(j'_0,j'_1)}$, где $(j'_0, j'_1) = P^{-1}(j''_0, j''_1)$. Тогда в графе $\Gamma_{\mathcal{L}}$ дуга проводится от вершины v_{i,j''_1} к вершине v_{i+1,j'_1} . В вершину v_{1,j_1} слоя 1 графа $\Gamma_{\mathcal{L}}$ входят (не имея начала) дуги, соответствующие ненулевым векторам-столбцам $t'_{1,(j_0,j_1)}$, $j_0 \in \overline{0, k-1}$. Из вершины v_{r,j_1} слоя r графа $\Gamma_{\mathcal{L}}$ выходят (не имея окончания) дуги, соответствующие ненулевым векторам-столбцам $t''_{r,(j_0,j_1)}$, $j_0 \in \overline{0, k-1}$.

Введем следующие обозначения, связанные с графом $\Gamma_{\mathcal{L}}$:

$q_i \in \mathbb{N}$ — количество вершин на i -м слое $\Gamma_{\mathcal{L}}$,

$D_i = \{d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,q_i}\}$ — набор степеней вершин i -го слоя $\Gamma_{\mathcal{L}}$,

$D_i^\downarrow = \{d_{i,1}^\downarrow, d_{i,2}^\downarrow, \dots, d_{i,q_i}^\downarrow\}$ — набор степеней захода вершин i -го слоя $\Gamma_{\mathcal{L}}$,

$D_i^\uparrow = \{d_{i,1}^\uparrow, d_{i,2}^\uparrow, \dots, d_{i,q_i}^\uparrow\}$ — набор степеней исхода вершин i -го слоя $\Gamma_{\mathcal{L}}$.

По определению $d_{i,j} = d_{i,j}^\downarrow + d_{i,j}^\uparrow$ для всех $i \in \overline{1, r}$, $j \in \overline{1, q_i}$. Из способа построения графа $\Gamma_{\mathcal{L}}$ следует, что

$$\sum_{j=1}^{q_i} d_{i,j}^\uparrow = \sum_{j=1}^{q_{i+1}} d_{i+1,j}^\downarrow =: s_{i+1} \quad \text{для всех } i \in \overline{1, r-1}.$$

Определим также $s_1 = \sum_{j=1}^{q_1} d_{1,j}^\downarrow$ и $s_{r+1} = \sum_{j=1}^{q_1} d_{r,j}^\uparrow$.

Условия согласованности системы $\mathcal{L} \in W$ для графа $\Gamma_{\mathcal{L}}$ означают, что необходимо выполнены условия

$$q_i \geq 1 \quad \text{для всех } i \in \overline{1, r}, \quad (12)$$

$$d_{i,j}^\downarrow \geq 1, \quad d_{i,j}^\uparrow \geq 1 \quad \text{для всех } i \in \overline{1, r}, \quad j \in \overline{1, q_i}. \quad (13)$$

Нетрудно заметить, что $\theta_{\mathcal{L}}(r) = \sum_{i=1}^r s_i = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} d_{i,j}^\downarrow$, поэтому дальнейшие исследования показателя рассеивания линейной среды XSLP-шифра и связанных с ним понятий можно проводить на языке теории графов.

Далее рассматриваются XSLP-шифры с ограничениями на выбор составляющих преобразований. Пусть для всех $i \in \overline{1, r}$ преобразования $\widehat{P}_i$ являются равномерно рассеивающими. Пусть также для всех $i \in \overline{1, r}$, $j_1 \in \overline{0, k-1}$ матрицы $B_{i,j_1} \in GL(mk, 2)$ преобразований $L_i \in GL(mk^2, 2)$ имеют линейный (разностный) коэффициент рассеивания ρ .

Заметим, что в [2] рассматривается случай $\rho = k + 1$. Однако на практике встречается ситуация, когда $\rho < k + 1$ (см., например, алгоритм Crypton [10]), исследование которой представляет отдельный интерес.

Введенные ограничения на рассматриваемый класс XSLP-шифров приводят к ограничениям на множество систем $\mathcal{L} \in \mathcal{W}$, что выражается следующими условиями на графы $\Gamma_{\mathcal{L}}$:

$$\text{вершины } i\text{-го слоя соединяются с вершинами } (i+1)\text{-го слоя,} \quad (14)$$

$$d_{i,j} \geq \rho \text{ для всех } i \in \overline{1, r}, j \in \overline{1, q_i}, \text{ где } \rho \text{ — коэффициент} \quad (15)$$

$$\text{рассеивания матриц } B_{i,j}.$$

Рис. 3. Иллюстрация к определению графа $\Gamma_{\mathcal{L}}$

При $r \in \mathbb{N}$ множество всех r -слойных графов, удовлетворяющих условиям (12)–(15), обозначим $G(r)$. Отметим, что в графовой модели умышленно не вводятся ограничения сверху на количества вершин на каждом слое графа. При этом если для некоторого $\Gamma^{(r)} \in G(r)$ справедливы неравенства $q_i \leq k'$, $d_{i,j}^\downarrow \leq k'$, $d_{i,j}^\uparrow \leq k'$ для всех $i \in \overline{1, r}$, $j \in \overline{1, q_i}$, то ему соответствует некоторая согласованная система соотношений для r итераций XSLP-шифра с длиной блока mk^2 для всех $k \geq k'$.

4. Свойства r -слойных графов

Для любого графа $\Gamma^{(r)} \in G(r)$ количество ребер (кроме выходящих из вершин r -го слоя) обозначим $S(\Gamma^{(r)}) = \sum_{i=1}^r s_i$. При каждом $r \in \mathbb{N}$ определена величина $S_{\min}(r) = \min_{\Gamma^{(r)} \in G(r)} S(\Gamma^{(r)})$.

Определение 5. Будем называть граф $\Gamma^{(r)} \in G(r)$ *реберно минимальным*, если $S(\Gamma^{(r)}) = S_{\min}(r)$.

Теорема 1. Пусть $\Gamma^{(r)}$ — реберно минимальный r -слойный граф. Тогда

$$S(\Gamma^{(r)}) = S_{\min}(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r = 1, \\ \rho, & \text{если } r = 2, \\ 2\rho - 1, & \text{если } r = 3, \\ \rho^2, & \text{если } r = 4, \\ S_{\min}(r-4) + \rho^2, & \text{если } r > 4. \end{cases} \quad (16)$$

Доказательство. Применим метод математической индукции по r . База индукции включает случаи $r = 1, 2, 3, 4$. При $r = 1$ и $r = 2$ доказательство очевидно. Примеры реберно минимальных графов при данных значениях r изображены на рис. 4.

Рис. 4. Примеры 1- и 2-слойных графов

Пусть $r = 3$. Рассмотрим произвольный реберно минимальный 3-слойный граф $\Gamma^{(3)}$. Заметим, что $S(\Gamma^{(3)}) \leq 2\rho - 1$, так как можно привести пример 3-слойного графа с количеством ребер $2\rho - 1$ (рис. 5).

Докажем, что для графа $\Gamma^{(3)}$ всегда $q_1 = 1$, $q_2 = 1$. Действительно, учитывая указанную оценку, условие (15) и неравенства $s_3 \geq q_2 \geq 1$, $s_1 \geq q_1 \geq 1$, получаем:

$$2\rho - 1 \geq S(\Gamma^{(3)}) = \left(\sum_{j=1}^{q_1} d_{1,j} \right) + s_3 \geq q_1\rho + 1,$$

$$2\rho - 1 \geq S(\Gamma^{(3)}) = s_1 + \sum_{j=1}^{q_2} d_{2,j} \geq q_2\rho + 1,$$

отсюда следует, что $q_1 \leq 2 - \frac{2}{\rho}$ и $q_2 \leq 2 - \frac{2}{\rho}$, поэтому $q_1 = 1$, $q_2 = 1$.

Теперь нетрудно заметить, что $s_2 = 1$ и $s_1 = s_3 = \rho - 1$, значит, $S_{\min}(3) = S(\Gamma^{(3)}) = 2\rho - 1$.

Рис. 5. Примеры 3- и 4-слойных графов

Пусть $r = 4$. Рассмотрим произвольный реберно минимальный 4-слойный граф $\Gamma^{(4)}$. Заметим, что $S(\Gamma^{(4)}) \leq \rho^2$, так как можно привести пример 4-слойного графа с количеством ребер ρ^2 (рис. 5).

Докажем, что для графа $\Gamma^{(4)}$ всегда $q_1 \leq \rho - 1$, $q_2 \leq \rho - 1$, $q_3 \leq \rho - 1$. Действительно,

$$\rho^2 \geq S(\Gamma^{(4)}) = \left(\sum_{j=1}^{q_1} d_{1,j} \right) + \sum_{j=1}^{q_3} d_{3,j} \geq (q_1 + q_3)\rho,$$

т. е. $q_1 + q_3 \leq \rho$. Поэтому с учетом (12) имеем $q_1 \leq \rho - 1$ и $q_3 \leq \rho - 1$.

Далее,

$$\rho^2 \geq S(\Gamma^{(4)}) = s_1 + \left(\sum_{j=1}^{q_2} d_{2,j} \right) + s_4 \geq 1 + q_2 \rho + 1 > q_2 \rho,$$

значит, $q_2 \leq \rho - 1$.

При подсчете количества ребер можно считать, что в графе $\Gamma^{(4)}$ каждая вершина 1-го слоя соединена со всеми вершинами 2-го слоя. Действительно, если это не так и существуют не соединенные вершины v_{1,j_1} , $j_1 = 1, 2, \dots, q_1$, и v_{2,j_2} , $j_2 = 1, 2, \dots, q_2$, соответствующих слоев, то $d_{1,j_1}^\uparrow \leq q_2 - 1 \leq \rho - 2$. Следовательно, $d_{1,j_1}^\downarrow \geq 2$, и можно соединить вершины v_{1,j_1} и v_{2,j_2} за счет исключения одного из ребер, входящих в v_{1,j_1} , оставив при этом $d_{1,j_1}^\downarrow \geq 1$. Аналогично, можно считать, что в графе $\Gamma^{(4)}$ каждая вершина 3-го слоя соединена со всеми вершинами 2-го слоя.

Если в графе $\Gamma^{(4)}$ в указанном смысле есть полная связность между слоями 1 и 2, 2 и 3, то

$$\begin{aligned} d_{1,j}^\downarrow &\geq \rho - d_{1,j}^\uparrow = \rho - q_2 \quad \text{для всех } j \in \overline{1, q_1}, \\ d_{2,j}^\downarrow &= q_1 \quad \text{для всех } j \in \overline{1, q_2}, \\ d_{3,j}^\downarrow &= q_2, \quad d_{3,j}^\uparrow \geq \rho - d_{3,j}^\downarrow = \rho - q_2 \quad \text{для всех } j \in \overline{1, q_3}, \\ q_3 &\geq \rho - d_{2,j}^\downarrow = \rho - q_1 \quad \text{для всех } j \in \overline{1, q_2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Воспользуемся формулами (17) для оценки количества ребер в графе $\Gamma^{(4)}$:

$$\begin{aligned} S(\Gamma^{(4)}) &= \sum_{j=1}^{q_1} d_{1,j}^\downarrow + \sum_{j=1}^{q_2} d_{2,j}^\downarrow + \sum_{j=1}^{q_3} d_{3,j}^\downarrow + \sum_{j=1}^{q_3} d_{3,j}^\uparrow \geq \\ &\geq q_1(\rho - q_2) + q_2 q_1 + q_3 q_2 + q_3(\rho - q_2) = (q_1 + q_3)\rho \geq \rho^2. \end{aligned}$$

Так как последняя оценка достижима, то $S_{\min}(4) = S(\Gamma^{(4)}) = \rho^2$.

Покажем, что для любого $r > 4$ из справедливости (16) при $r' < r$ следует справедливость (16) при $r' = r$. Заметим сначала, что $S_{\min}(r)$ не может превосходить значения, задаваемого формулами (16), так как это значение достижимо. Для построения соответствующего графа необходимо к объединению из $\left\lceil \frac{r}{4} \right\rceil$ реберно минимальных 4-слойных графов добавить реберно минимальный $\left\{ \frac{r}{4} \right\}$ -слойный граф (если 4 не делит r), где $\left\lceil \frac{r}{4} \right\rceil$ — целая часть числа $\frac{r}{4}$, $\left\{ \frac{r}{4} \right\}$ — остаток от деления r на 4.

Принцип построения таких графов легко понять по рис. 6.

Рис. 6. Пример 7-слойного графа

Рассмотрим произвольный r -слойный граф $\Gamma^{(r)}$. Представим его в виде двух графов: $\Gamma^{(4)}$ — четыре верхних слоя $\Gamma^{(r)}$ и $\Gamma^{(r-4)}$ — $(r-4)$ нижних слоев $\Gamma^{(r)}$. При этом оба графа $\Gamma_1^{(4)}$ и $\Gamma_2^{(r-4)}$ наследуют s_5 ребер между четвертым и пятым слоями вершин $\Gamma^{(r)}$. По предположению индукции для числа ребер графа $\Gamma^{(r)}$ имеем:

$$S(\Gamma^{(r)}) = S(\Gamma_1^{(4)}) + S(\Gamma_2^{(r-4)}) \geq S_{\min}(4) + S_{\min}(r-4) = \rho^2 + S_{\min}(r-4).$$

Доказываемая формула следует из достижимости этой оценки. $\square$

Согласно доказательству теоремы 1 минимально возможное количество ребер достигается по крайней мере на одном r -слойном графе, для которого $q_i \leq k'$, $d_{i,j}^{\downarrow} \leq k'$, $d_{i,j}^{\uparrow} \leq k'$ при всех $i \in \overline{1, r}$, $j \in \overline{1, q_i}$. Поэтому можно утверждать, что $S_{\min}(r) = \theta_{\min}(r)$, и для вычисления показателя рассеивания линейной среды XSLP-шифров можно использовать формулу (16).

В некоторых криптографических задачах, в частности при оценке стойкости SP-сетей с локальными подстановками из $S(V_{mk})$, может оказаться существенным не только количество ребер, но и количество вершин в соответствующих графах. Для любого $\Gamma^{(r)} \in G(r)$ количество его вершин обозначим $Q(\Gamma^{(r)}) = \sum_{i=1}^r q_i$. Положим $Q_{\min}(r) = \min_{\Gamma^{(r)} \in G(r)} Q(\Gamma^{(r)})$.

Определение 6. Будем называть r -слойный граф $\Gamma^{(r)} \in G(r)$ *вершинно минимальным*, если $Q(\Gamma^{(r)}) = Q_{\min}(r)$.

Теорема 2. Пусть $\Gamma^{(r)} \in G(r)$ — вершинно минимальный r -слойный граф. Тогда

$$Q(\Gamma^{(r)}) = Q_{\min}(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r = 1, \\ 2, & \text{если } r = 2, \\ \rho + 1, & \text{если } r = 3, \\ 2\rho, & \text{если } r = 4, \\ Q_{\min}(r-4) + 2\rho, & \text{если } r > 4. \end{cases} \quad (18)$$

Доказательство. Воспользуемся идеей доказательства теоремы 1 и применим метод математической индукции по r . При $r = 1$ и $r = 2$ доказательство очевидно. Вершинно минимальными графами при данных значениях r являются, например, реберно минимальные графы, представленные на рис. 4.

Рассмотрим вершинно минимальный 3-слойный граф $\Gamma^{(3)}$. С одной стороны, $Q(\Gamma^{(3)}) \leq \rho + 1$, так как можно привести пример 3-слойного графа с количеством вершин $\rho + 1$ (рис. 5). С другой стороны, так как $q_2 \geq 1$ и $d_{2,j} \geq \rho$ для всех $j \in \overline{1, q_2}$, то $q_1 + q_3 \geq \rho$. Поэтому $Q(\Gamma^{(3)}) \geq \rho + 1$.

Рассмотрим вершинно минимальный 4-слойный граф $\Gamma^{(4)}$. Легко заметить, что $Q(\Gamma^{(4)}) = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \leq 2\rho$, так как можно привести пример 4-слойного графа с количеством вершин 2ρ (рис. 5). Вместе с тем $q_1 + q_3 \geq \rho$ и $q_2 + q_4 \geq \rho$ ввиду (12) и (15). Поэтому $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \geq 2\rho$. Из этих двух неравенств следует искомое равенство.

Покажем, что для любого $r > 4$ из справедливости (18) при $r' < r$ следует справедливость (18) при $r' = r$. Заметим, что $Q_{\min}(r)$ не может превосходить значение, задаваемое формулами (18), так как это значение достижимо, например, для реберно минимальных r -слойных графов из доказательства теоремы 1.

Рассмотрим произвольный r -слойный граф $\Gamma^{(r)}$. Разобьем его на два графа: $\Gamma^{(4)}$ — четыре верхних слоя $\Gamma^{(r)}$ и $\Gamma^{(r-4)}$ — $(r-4)$ нижних слоев $\Gamma^{(r)}$. По предположению индукции для числа вершин графа $\Gamma^{(r)}$:

$$Q(\Gamma^{(r)}) = Q(\Gamma_1^{(4)}) + Q(\Gamma_2^{(r-4)}) \geq Q_{\min}(4) + Q_{\min}(r-4) = 2\rho + Q_{\min}(r-4).$$

Доказываемая формула следует из достижимости этой оценки. $\square$

Автор работы благодарен Ф. М. Малышеву за помощь в подготовке статьи и ценные замечания к первому ее варианту.

Список литературы

- [1] Малышев Ф. М., “Двойственность разностного и линейного методов в криптографии”, *Математические вопросы криптографии*, **5**:3 (2014), 35–47.
- [2] Малышев Ф. М., Трифонов Д. И., “Рассеивающие свойства XSLLP-шифров”, *Математические вопросы криптографии*, **7**:3 (2016), 47–60.
- [3] Barreto P. S. L. M., Rijmen V., “The Anubis Block Cipher”, *Submission to NESSIE* (2000).
- [4] Biryukov A., Nikolic I., “Automatic search for related-key differential characteristics in byte-oriented block ciphers: applications to AES, Camellia, Khazad and others”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **6110**, 2010, 322–344.
- [5] Borst J., “The Block Cipher: GrandCru”, *Submission to NESSIE* (2000).
- [6] Daemen J., Knudsen L., Rijmen V., “The Block Cipher Square”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **1267**, 1997, 149–165.
- [7] Daemen J., Rijmen V., “The Block Cipher BKSQ”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **1820**, 2000, 236–245.
- [8] Daemen J., Rijmen V., *The Design of Rijndael: AES — The Advanced Encryption Standard*, Heidelberg etc.: Springer, 2002, 238 p.
- [9] Fouque P.-A., Jean J., Peyrin T., “Structural evaluation of AES and chosen-key distinguisher of 9-round AES-128”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **8042**, 2013, 183–203.
- [10] Lim C., “A revised version of Crypton: Crypton v1.0”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **1636**, 1999, 31–45.
- [11] Mouha N., Wang Q., Gu D., Preneel B., “Differential and linear cryptanalysis using mixed-integer linear programming”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **7537**, 2012, 57–76.