Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тарасов, Стабилизаторы некоторых семейств булевых функций от n переменных, образующих Галуа-замкнутые подалгебры алгебры Шефера. II, *Матем. вопр. криптогр.*, 2017, том 8, выпуск 4, 135–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 03:22:41

**Стабилизаторы некоторых семейств булевых функций
от n переменных, образующих Галуа-замкнутые
подалгебры алгебры Шефера. II**

А. В. Тарасов

*Московский государственный университет информационных технологий,
радиотехники и электроники, Москва*

Получено 11.V.2017

Аннотация. В статье завершено описание групп подстановок множества двоичных векторов длины n , стабилизирующих классы булевых функций от n переменных из Галуа-замкнутых подалгебр алгебры Шефера.

Ключевые слова: булева функция, классы Шефера, классы Поста, соответствия Галуа, группа подстановок

**The stabilizers of certain families of Boolean functions of n variables
that form a Galois-closed subalgebra of the Schaefer algebra. II**

A. V. Tarasov

*Moscow State University of Information Technologies, Radio Engineering and Electronics,
Moscow*

Abstract. We complete the description of permutation groups over the set of binary n -dimensional vectors which stabilizes classes of Boolean functions of n variables from the Galois-closed subalgebras of the Schaefer algebra.

Key words: Boolean function, Schaefer classes, Post classes, Galois connections, permutation group

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2017, v. 8, № 4, pp. 135–156 (Russian)

© Академия криптографии Российской Федерации, 2017 г.

Введение

В статье завершено начатое в [1–3] описание максимальных групп подстановок множества двоичных n -мерных векторов, стабилизирующих Галуа-замкнутые классы булевых функций, которые образуют подалгебры алгебры Шефера.

Важной характеристикой класса булевых функций от n переменных является группа преобразований множества n -мерных двоичных векторов, стабилизирующих данный класс (стабилизатор множества функций). Вместе с тем представляют интерес для изучения классы булевых функций, порождающие эффективно решаемые системы булевых уравнений. К таким классам относятся классы 0-выполнимых, 1-выполнимых, мультиаффинных, бионктивных слабо положительных и слабо отрицательных функций, описанные, например, в монографии [11]. В [1] изучены стабилизаторы классов бионктивных, мультиаффинных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций от n переменных.

Указанные классы булевых функций и их пересечения обладают рядом свойств, позволяющих установить соответствия Галуа между ними и замкнутыми классами Поста. В [3] на основе результатов работ [4–7] введена универсальная алгебра Шефера, основное множество которой составляет множество всех булевых функций, а множество операций состоит из операций конъюнкции функций, перестановок переменных и проектирования функции по переменной. Решетка подалгебр этой алгебры состоит в основном из классов Шефера и их всевозможных пересечений. В [3] показана связь этой алгебры с итеративной алгеброй Поста, осуществляемая посредством пары соответствий Галуа. Выделены подалгебры алгебры Шефера, являющиеся Галуа-замкнутыми классами.

В [2] приведено описание стабилизаторов ряда множеств булевых функций от n переменных, лежащих в некоторых Галуа-замкнутых подалгебрах алгебры Шефера.

1. Основные определения, обозначения и факты

Обозначения введем в соответствии с работами [1–4, 11]. Пусть:

V_n — множество n -мерных двоичных векторов,

$$1_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_n), \quad 0_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_n),$$

$\|\alpha\|$ — вес Хемминга вектора $\alpha \in V_n$,

P_2 — множество всех булевых функций,

$P_2(n)$ — множество булевых функций от n переменных,

$E_f = \{\alpha \in V_n : f(\alpha) = 1\}$ — носитель (множество выполняющих векторов) функции $f \in P_2(n)$,

$\|f(x_1, \dots, x_n)\|$ — вес булевой функции $f \in P_2(n)$.

Для произвольного класса функций $K \subset P_2$ обозначим

$$K(n) = K \cap P_2(n) = \{f(x_1, \dots, x_n) \in K\}.$$

Введем важные классы функций. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется:

1) 0-выполнимой, если $f(0, \dots, 0) = 1$,

2) 1-выполнимой, если $f(1, \dots, 1) = 1$,

3) мультиаффинной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t l_i(x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

где $l_1(x_1, \dots, x_n), \dots, l_t(x_1, \dots, x_n)$ — аффинные функции,

4) биконъюнктивной, если $f \equiv 1$ или существует представление функции f в виде 2-КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} x_j^{b_j} \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_{i2}}), \quad (2)$$

5) слабо положительной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i2}} \vee \dots \vee x_{s_{ik_i}}), \quad k_i \geq 1, \quad i = \overline{1, t}, \quad (3)$$

6) слабо отрицательной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee \bar{x}_{s_{i2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{ik_i}}), \quad k_i \geq 1, \quad i = \overline{1, t}. \quad (4)$$

Множества всех функций классов 1)–6) обозначим соответственно 0- S , 1- S , A , Bi , WP , WN . Данные классы называются *классами Шефера*. Формулы (1)–(4) для функций из классов A , Bi , WP , WN будем называть *приведенными представлениями*.

В [11] показано, что именно эти классы порождают системы уравнений с полиномиально разрешимой задачей распознавания совместности. Более того, классы A, Bi, WP, WN являются *полиномиально решаемыми*, т. е. в случае совместности порожденной системы существует полиномиальная процедура построения решений системы.

Следуя [2], булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ назовем C -замкнутой, если выполнено равенство

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Класс всех таких функций обозначим CL .

Через $WP_{m,2}$, $m \geq 2$, обозначим подкласс класса слабо положительных функций, элементы которого представимы в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (x_{r_{j,1}} \vee \dots \vee x_{r_{j,m}}).$$

Аналогичным образом введем класс $WN_{m,2}$. В качестве их естественных расширений введем классы

$$WP_{\infty,2} = \bigcup_{m=0}^{\infty} WP_{m,2}, \quad WN_{\infty,2} = \bigcup_{m=0}^{\infty} WN_{m,2}.$$

Класс булевых монотонных функций обозначим через Mon , а класс антимонотонных функций — через $\overline{Mon}$.

Для векторов $\alpha, \beta \in V_n$ через $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$ (или $\alpha \cdot \beta$), $\alpha \oplus \beta$ обозначим векторы, получающиеся из векторов α и β покоординатным применением соответствующих операций. Определим далее через v тернарное преобразование пространства V_n , задаваемое равенством

$$v(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma \in V_n.$$

Для произвольного класса функций $K \subset P_2$ положим

$$K^0 = K \cap 0-S, \quad K^1 = K \cap 1-S, \quad K^{01} = K \cap 0-S \cap 1-S, \quad K(n) = K \cap P_2(n).$$

Известны следующие критерии мультиаффинности, биюнктивности, слабой положительности и слабой отрицательности.

Теорема 1 ([11]). Для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2(n)$ верны следующие утверждения:

- 1) $f(x_1, \dots, x_n) \in A(n)$ тогда и только тогда, когда для любых трех векторов $\alpha, \beta, \gamma \in E_f$ вектор $\delta = \alpha \oplus \beta \oplus \gamma \in E_f$,
- 2) $f(x_1, \dots, x_n) \in Bi(n)$ тогда и только тогда, когда для любых трех векторов $\alpha, \beta, \gamma \in E_f$ вектор $\delta = v(\alpha, \beta, \gamma) \in E_f$,
- 3) $f(x_1, \dots, x_n) \in WP(n)$ тогда и только тогда, когда для любых двух векторов $\alpha, \beta \in E_f$ вектор $\delta = \alpha \vee \beta \in E_f$,
- 4) $f(x_1, \dots, x_n) \in WN(n)$ тогда и только тогда, когда для любых двух векторов $\alpha, \beta \in E_f$ вектор $\delta = \alpha \wedge \beta \in E_f$.

Данная теорема лежит в основе построения соответствий Галуа для системы замкнутых классов Поста и системы всевозможных пересечений классов $0-S, 1-S, A, Bi, WP, WN, CL$, а также их некоторых подклассов (см. [3–7]).

Описание этих классов функций приведено в следующей таблице.

Таблица 1

№	Класс	Функции класса
1	P_2	Класс всех булевых функций
2	$0-S$	$f(0, \dots, 0) = 1$
3	$1-S$	$f(1, \dots, 1) = 1$
4	CL	Класс C -замкнутых функций
5	$0-S \cap 1-S$	$f(0, \dots, 0) = f(1, \dots, 1) = 1$
6	CL^1	$CL \cap 0-S \cap 1-S, f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), f(1, \dots, 1) = 1$
7	A	Класс мультиаффинных функций вида (1)
8	A^0	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{j,1}} \oplus \dots \oplus x_{s_{i,k_i}} \oplus 1)$
9	A^1	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{j,1}} \oplus \dots \oplus x_{s_{i,k_i}}) \bigwedge_{j=1}^p (x_{r_{j,1}} \oplus \dots \oplus x_{r_{j,q_j}})$, где k_i нечетны, а q_j четны, $i = \overline{1, t}, j = \overline{1, p}$
10	Bi	Класс бионктивных функций (2)
11	M_3	$WP \cap WN, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}})$
12	M_3^0	$M_3^0 = M_4^0, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}})$
13	M_3^1	$M_3^1 = M_4^1, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}})$
14	M_3^{01}	$M_3^{01} = M_4^{01} = M_5^{01} = Bi^{01}, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}})$
15	M_1	$A \cap WP, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus 1)$
16	M_1^0	$M_1^0 = M_2^0, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus 1)$
17	M_1^1	$M_1^1 = M_2^1, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus 1)$
18	WP	Класс слабо положительных функций (3)
19	WP^0	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}} \vee \dots \vee x_{s_{l,k_l}})$
20	WP^1	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}}^{a_l} \vee x_{s_{l,2}} \vee \dots \vee x_{s_{l,k_l}}), 2 \leq k_l \leq n, l = \overline{1, t}$
21	WP^{01}	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}} \vee \dots \vee x_{s_{l,k_l}}), 2 \leq k_l \leq n, l = \overline{1, t}$
22	$WP_{\infty, 2}$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{r_{i,1}} \vee x_{r_{i,2}}) \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \vee \dots \vee x_{s_{l,k_l}})$
23	$WP_{m, 2}, m \geq 2$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i^{a_i} \bigwedge_{j=1}^t (\bar{x}_{r_{j,1}} \vee x_{r_{j,2}}) \bigwedge_{l=1}^p (x_{s_{l,1}} \vee \dots \vee x_{s_{l,m}})$

Таблица 1 (продолжение)

24	WN	Класс слабо отрицательных функций вида (4)
25	WN^0	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} \bar{x}_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l1}}^{a_l} \vee \bar{x}_{s_{l2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{lk_l}}), 2 \leq k_l \leq n, l = \overline{1, t}$
26	WN^1	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l1}} \vee \bar{x}_{s_{l2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{lk_l}}), 2 \leq k_l \leq n, l = \overline{1, t}$
27	WN^{01}	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l1}} \vee \bar{x}_{s_{l2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{lk_l}}), 2 \leq k_l \leq n, l = \overline{1, t}$
28	$WN_{\infty, 2}$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{r_{i1}} \vee x_{r_{i2}}) \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{lk_l}})$
29	$WN_{m, 2}, m \geq 2$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i^{a_i} \bigwedge_{j=1}^t (\bar{x}_{r_{j1}} \vee x_{r_{j2}}) \bigwedge_{l=1}^p (\bar{x}_{s_{l1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{lm}})$
30	A^{01}	$A \cap 0-S \cap 1-S, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}} \oplus x_{s_{i,2}} \oplus \dots \oplus x_{s_{i,k_i}} \oplus 1), \text{ где } k_i \text{ четны}$
31	M_8	$A \cap CL, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}} \oplus x_{s_{i,2}} \oplus \dots \oplus x_{s_{i,k_i}} \oplus a_i), \text{ где } k_i \text{ четны}$
32	M_2	$Bi \cap A, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i^{a_i} \bigwedge_{j=1}^m (x_{s_{j,1}} \oplus x_{s_{j,2}} \oplus b_j)$
33	M_7	$Bi \cap CL, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}} \oplus x_{s_{i,2}} \oplus a_i)$
34	M_1^{01}	$WN \cap CL = WP \cap CL, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}} \oplus x_{s_{i,2}} \oplus 1)$
35	M_9	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} \bar{x}_i \bigwedge_{j \in J} (x_{s_{j,1}} \oplus x_{s_{j,2}} \oplus 1) \wedge g(x_1, \dots, x_n), \text{ где } g \in Mon$ и несущественно зависит от переменных $x_i, i \in I$
36	M_9^1	$M_9 \cap 1-S, f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} (x_{s_{j,1}} \oplus x_{s_{j,2}} \oplus 1) \wedge g(x_1, \dots, x_n), \text{ где } g \in Mon$
37	Mon'	$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) \wedge f_2(x_1, \dots, x_n), \text{ где } f_1 \in M_1^{01}, f_2 \in Mon$
38	$Mon'_m, m \geq 2$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}} \oplus x_{s_{i,2}} \oplus 1) \bigwedge_{j=1}^p (x_{r_{j,1}} \vee \dots \vee x_{r_{j,m}})$
39	$M_{9,m}, m \geq 2$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l \in I} \bar{x}_l \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}} \oplus x_{s_{i,2}} \oplus 1) \bigwedge_{j=1}^p (x_{r_{j,1}} \vee \dots \vee x_{r_{j,m}})$
40	$WP_{m, 2}^1, m \geq 2$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (x_{r_{j,1}} \vee \dots \vee x_{r_{j,m}})$
41	M_{10}	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} x_j \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}} \oplus x_{s_{i,2}} \oplus 1) \wedge g(x_1, \dots, x_n), \text{ где } g \in \overline{Mon}$ и несущественно зависит от переменных $x_j, j \in J$
42	M_{10}^0	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}} \oplus x_{s_{i,2}} \oplus 1) \wedge g(x_1, \dots, x_n), \text{ где } g \in \overline{Mon} \text{ и}$ несущественно зависит от переменных $x_j, j \in J$

Таблица 1 (продолжение)

43	$\overline{Mon'}$	$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) \wedge f_2(x_1, \dots, x_n)$, где $f_1 \in M_1^{01}$, $f_2 \in \overline{Mon}$
44	$\overline{Mon'}_m$, $m \geq 2$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}} \oplus x_{s_{i,2}} \oplus 1) \bigwedge_{j=1}^p (\bar{x}_{r_{j,1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{r_{j,m}})$
45	$M_{10,m}$, $m \geq 2$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l \in I} x_l \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}} \oplus x_{s_{i,2}} \oplus 1) \bigwedge_{j=1}^p (\bar{x}_{r_{j,1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{r_{j,m}})$
46	$WN_{m,2}^0$, $m \geq 2$	$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (\bar{x}_{r_{j,1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{r_{j,m}})$

Заметим, что во введенных обозначениях $M_4 = Bi \cap WP = WP_{2,2}$ и $M_5 = Bi \cap WN = WN_{2,2}$.

Введем ряд теоретико-групповых обозначений:

$\text{Sym}(X)$ — симметрическая группа подстановок на конечном множестве X ,

ε — тождественная подстановка на соответствующем множестве,

$S_n = \text{Sym}(\{1, 2, \dots, n\})$,

$\text{Sym}(V_n)$ — симметрическая группа подстановок на множестве V_n (изоморфна симметрической группе S_{2^n}),

$<$ — отношение «быть подгруппой» или «быть подпространством», в зависимости от контекста,

$\dim L$ — размерность подпространства или многообразия L ,

$\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством элементов M (в произвольной группе),

$\tilde{S}_n < \text{Sym}(V_n)$ — группа, индуцированная действием группы перестановок координат векторов из V_n (изоморфна симметрической группе S_n); она состоит из всех подстановок $\tilde{s}$, задаваемых равенством

$$\tilde{s}((a_1, \dots, a_n)) = (a_{s(1)}, \dots, a_{s(n)}), \quad s \in S_n,$$

Σ_n — группа сдвигов, изоморфная пространству V_n , состоит из всех подстановок $\beta, \beta = (b_1, \dots, b_n) \in V_n$, где

$$\tilde{\beta}((a_1, \dots, a_n)) = (a_1 \oplus b_1, \dots, a_n \oplus b_n),$$

$Q_n = \langle \tilde{S}_n, \Sigma_n \rangle$ — группа Джевонса, равна полупрямому произведению $\tilde{S}_n \rtimes \Sigma_n$,

$CS_n = \langle \tilde{S}_n, \tilde{1}_n \rangle$ — подгруппа группы Джевонса, порождаемая группой $\tilde{S}_n$ и подстановкой $\tilde{1}_n$, инвертирующей векторы из V_n ,

$\overline{CS_n} = \langle CS_n, (0_n, 1_n) \rangle$ — группа, порожденная группой CS_n и транспозицией $(0_n, 1_n)$,

GL_n — полная линейная группа на пространстве V_n ,

AGL_n — полная аффинная группа на пространстве V_n ,

H_n — группа инволюций, порожденная транспозициями вида $(\alpha, \bar{\alpha})$, $\alpha \in V_n$,

$\bar{S}_{2^n-2} = \langle \text{Sym}(V_n \setminus \{0_n, 1_n\}), (0_n, 1_n) \rangle$,

T_n — двоичная $n \times n$ -матрица, в которой элементы главной диагонали и последней строки равны единице, а остальные — нулю:

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$R_n^{(1)}$ — подгруппа группы GL_n , порожденная подстановочными матрицами и матрицей T_n (см. [10]),

$AR_n^{(1)} = \langle R_n^{(1)}, \Sigma_n \rangle = R_n^{(1)} \rtimes \Sigma_n$ — соответствующая подгруппа группы AGL_n ,

изоморфизм групп обозначим символом $\cong$.

Введенные группы естественным образом задают свое действие на множестве функций $P_2(n)$: если $s \in \text{Sym}(V_n)$, то для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2(n)$ определим функцию $s(f) = f^s(x_1, \dots, x_n)$, задаваемую равенством $E_{fs} = s(E_f)$, или, что равносильно, равенством $f^s(a_1, \dots, a_n) = f(s^{-1}(a_1, \dots, a_n))$ (см. [1]).

Для произвольного класса функций $M \subset P_2(n)$ и группы $G < \text{Sym}(V_n)$ обозначим через $G_M = \{g \in G: g(f) = f \ \forall f \in M\}$ поточечный стабилизатор множества M , а через $G_{\{M\}} = \{g \in G: g(f) \in M \ \forall f \in M\}$ — стабилизатор множества M . Ясно, что $G_M < G_{\{M\}}$.

В [1] доказан ряд фактов, которые во введенных обозначениях формулируются следующим образом:

1. Если $M \subset P_2(n)$ — класс функций, содержащий функции $\{x_1, \dots, x_n\}$ ($\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$) и $\sigma \in \text{Sym}(V_n)_{\{M\}}$, то координатные функции $s_1, \dots, s_n$ подстановки σ лежат в M (все инверсии $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n$ координатных функций $s_1, \dots, s_n$ подстановки σ лежат в M).

2. $\text{Sym}(V_n)_{\{A(n)\}} = AGL_n$.

3. $\text{Sym}(V_n)_{\{Bi(n)\}} = Q_n$.

4. $\text{Sym}(V_n)_{\{WP(n)\}} = \text{Sym}(V_n)_{\{WN(n)\}} = \tilde{S}_n$.

В дальнейшем для краткости группу $\text{Sym}(V_n)$ будем обозначать через $\mathfrak{S}$.

2. Основные результаты

В [1] и [2] описаны стабилизаторы в группе $\text{Sym}(V_n)$ для некоторых классов функций от n переменных из Галуа-замкнутых подклассов классов Шефера, а именно для первых 29 классов из таблицы 1 (в [2] описано 34 группы, но с учетом неточного результата для класса M_2 и равенств $Bi_1 = WP_{2,2}^1$, $Bi_0 = WN_{2,2}^0$, $M_4 = WP_{2,2}$ и $M_5 = WN_{2,2}$ получаем 29 классов). Для завершения описания исследуемых групп необходимо описать стабилизаторы множеств функций от n переменных из классов с 30-го по 46-й из таблицы 1.

Рассмотрим класс $A^{01} = A \cap 0\text{-}S \cap 1\text{-}S$ и построим его стабилизатор $\mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}}$ при $n \geq 3$.

Теорема 2. *Функция $f \in A^{01}(n)$ тогда и только тогда, когда E_f — подпространство в V_n , содержащее вектор 1_n .*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in A^{01}(n)$. Поскольку $A^{01} \subset A$, E_f — линейное многообразие в V_n . Так как $A^{01} \subset 0\text{-}S$, то $0_n \in E_f$ и $E_f < V_n$. Поскольку $A^{01} \subset 1\text{-}S$, имеет место принадлежность $1_n \in E_f$.

Достаточность. Из того, что $E_f < V_n$, очевидно следует, что $f \in A^0$. Тогда, так как $1_n \in E_f$, то $f \in A^{01}$. $\square$

Очевидно включение $\Sigma_n < \mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}}$, из которого следует, что группа $\mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}}$ транзитивна.

Определим разбиение пространства V_n на 2^{n-1} блоков:

$$\mathbb{B} = \{\Delta_{\alpha'}, \alpha' \in V_{n-1}\}, \quad \text{где} \quad \Delta_{\alpha'} = \{(\alpha', 0), (\bar{\alpha}', 1)\}.$$

Теорема 3. *При $n \geq 3$ группа $\mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}}$ импримитивна с системой блоков импримитивности $\mathbb{B}$.*

Доказательство. Если $g \in \mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}}$, то подстановка g переводит любое подпространство, содержащее 1_n , в подпространство, содержащее 1_n . При этом сохраняется размерность подпространства. Положим $L_0 = \{0_n, 1_n\}$. Тогда $\dim L_0 = 1$. Других подпространств размерности 1, удовлетворяющих условию теоремы 1, нет. Следовательно, $g(L_0) = L_0$.

Рассмотрим подпространство размерности 2, удовлетворяющее условию теоремы 1. Оно имеет вид $L_0 = \{0_n, \alpha, \bar{\alpha}, 1_n\}$, где $\bar{\alpha} = \alpha \oplus 1_n$, $\alpha \in V_n$. Тогда очевидно, что если $g(\alpha) = \beta$, то $g(\bar{\alpha}) = \bar{\beta}$. Это означает, что подстановка g инвариантна относительно инверсии, что доказывает теорему. $\square$

Следуя [9], определим понятие табличного сплетения групп подстановок. Пусть $G < \text{Sym}(\Omega_1)$, $H < \text{Sym}(\Omega_2)$. Сплетением групп G и H назовем группу подстановок $G \wr H < \text{Sym}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, состоящую из подстановок $k = (g, h)$, где $g \in G$, $h \in H^{\Omega_1}$ с действием вида:

$$k(x, y) = (g(x), h(x)(y)) = (x^g, y^{h(x)}), \quad x \in \Omega_1, \quad y \in \Omega_2.$$

Данное равенство позволяет описать импримитивную группу как подгруппу сплетения групп подстановок, из которых первая группа действует на блоках, а вторая — на элементах внутри блоков.

Рассмотрим систему блоков $\mathbb{B}$. Пусть $\gamma = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$. Тогда легко видеть, что вектор γ лежит в блоке $\Delta_{\alpha'}$, $\alpha' = (a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n)$. То есть $\alpha' = (a_1, \dots, a_{n-1})$, если $a_n = 0$, и $\alpha' = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1})$, если $a_n = 1$. При этом $\Delta_{\alpha'} = \{(a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n, 0), (a_1 \oplus a_n \oplus 1, \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus 1, 1)\}$. Ясно, что $\Delta_{\alpha'} = \{\gamma, \bar{\gamma}\}$.

По теореме 3 импримитивная группа $\mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}}$ изоморфно вкладывается в сплетение $\text{Sym}(V_{n-1}) \wr \text{Sym}(\{0, 1\}) \cong S_{2^{n-1}} \wr S_2$. Определим действие этого сплетения на множестве $V_n = V_{n-1} \times V_1$. Пусть $k = (g, h)$, где $g \in \text{Sym}(V_{n-1})$, $h: V_{n-1} \rightarrow \text{Sym}(V_1)$.

Ввиду того что группа $\text{Sym}(V_1)$ состоит из двух подстановок (тождественной и транспозиции), можно определить действие $y^{h(x)}$, $y \in \{0, 1\}$, как $y^{h(x)} = y \oplus \tilde{h}(x)$, где

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} 0, & h(x) = \varepsilon, \\ 1, & h(x) = (0, 1). \end{cases}$$

Тогда $k(\gamma) = (g(a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n) \oplus 1_{n-1}(a_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n)), a_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n))$.

Без ограничения общности всякую подстановку k , лежащую в некоторой импримитивной группе G с системой блоков $\mathbb{B}$, будем обозначать парой $k = (g, h)$, где $g \in \text{Sym}(V_{n-1})$, $h: V_{n-1} \rightarrow \text{Sym}(V_1)$.

Теорема 4. Если $k = (g, h) \in \mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}}$, то $g \in GL_{n-1}$. Иными словами, $\mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}} < GL_{n-1} \wr S_2$.

Доказательство. Покажем, что g — линейная подстановка. Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ и $k(\alpha) = \gamma$, $k(\beta) = \delta$, $k = (g, h) \in \mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}}$.

Рассмотрим подпространство $L < V_n$, порожденное векторами $\alpha, \beta, 1_n$. По теореме 2 данное пространство является носителем некоторой функции $f \in A^{01}(n)$. Так как $k \in \mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}}$, то $k(L) < V_n$ и $1_n \in k(L)$.

Тогда

$$L = \{0_n, \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \alpha \oplus \beta, \alpha \oplus \beta \oplus 1_n, 1_n\},$$

$$k(L) = \{0_n, \gamma, \delta, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \gamma \oplus \delta, \gamma \oplus \delta \oplus 1_n, 1_n\}.$$

Следовательно,

$$k(\alpha \oplus \beta) \in \{\gamma \oplus \delta, \gamma \oplus \delta \oplus 1_n\} = \{k(\alpha) \oplus k(\beta), k(\alpha) \oplus k(\beta) \oplus 1_n\}.$$

Поэтому

$$k(\alpha \oplus \beta) = (g(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n) \oplus$$

$$\oplus 1_{n-1}(a_n \oplus b_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n),$$

$$a_n \oplus b_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n)).$$

Это, в частности, означает, что либо

$$a_n \oplus b_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n) =$$

$$= a_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n) \oplus b_n \oplus \tilde{h}(b_1 \oplus b_n, \dots, b_{n-1} \oplus b_n),$$

либо

$$a_n \oplus b_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n) =$$

$$= a_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n) \oplus b_n \oplus \tilde{h}(b_1 \oplus b_n, \dots, b_{n-1} \oplus b_n) \oplus 1.$$

В обоих случаях

$$g(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n) =$$

$$= g(a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n) \oplus g(b_1 \oplus b_n, \dots, b_{n-1} \oplus b_n),$$

т. е. $g \in GL_{n-1}$.

□

Теорема 5. Для класса $A^{01}(n) = A(n) \cap 0\text{-}S(n) \cap 1\text{-}S(n)$ верно соотношение

$$\mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}} \cong GL_{n-1} \wr S_2.$$

Доказательство. Пусть $k = (g, h) \in GL_{n-1} \wr S_2$. Покажем, что если $L = E_f, f \in A^{01}(n)$, то $k(L) < V_n, 1_n \in k(L)$. Из теоремы 2 следует, что $L < V_n, 1_n \in E_f$. В случаях, когда $\dim L = 1$ или $\dim L = 2$, доказательство теоремы очевидным образом следует из импримитивности группы $GL_{n-1} \wr S_2$ с системой блоков $\mathbb{B}$.

Рассмотрим случай, когда $\dim L \geq 3$. Пусть $\alpha, \beta \in L, \gamma = k(\alpha), \delta = k(\beta), \alpha = (a_1, \dots, a_n), \beta = (b_1, \dots, b_n)$. Введем векторы $\alpha' = (a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n), \beta' = (b_1 \oplus b_n, \dots, b_{n-1} \oplus b_n)$. Покажем, что $\gamma \oplus \delta \in k(L)$. Для этого рассмотрим подпространство

$$L_1 = \{0_n, \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \alpha \oplus \beta, \alpha \oplus \beta \oplus 1_n, 1_n\} < L.$$

Имеем $k(L_1) = \{0_n, \gamma, \delta, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, k(\alpha \oplus \beta), k(\alpha \oplus \beta) \oplus 1_n, 1_n\} \subset k(L)$, причем из свойств подстановки $k \in GL_{n-1} \wr S_2$ вытекают соотношения

$$k(\bar{\alpha}) = \bar{\gamma}, k(\bar{\beta}) = \bar{\delta}, k(\{0_n, 1_n\}) = \{0_n, 1_n\}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} k(\alpha \oplus \beta) &= (g(\alpha' \oplus \beta') \oplus 1_{n-1}(a_n \oplus b_n \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta')), a_n \oplus b_n \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta')) = \\ &= (g(\alpha') \oplus 1_{n-1}(a_n \oplus \tilde{h}(\alpha')), a_n \oplus \tilde{h}(\alpha')) \oplus \\ &\quad \oplus (g(\beta') \oplus 1_{n-1}(b_n \oplus \tilde{h}(\beta')), b_n \oplus \tilde{h}(\beta')) \oplus \\ &\quad \oplus (1_{n-1}(\tilde{h}(\alpha') \oplus \tilde{h}(\beta') \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta')), \tilde{h}(\alpha') \oplus \tilde{h}(\beta') \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta')) = \\ &= k(\alpha) \oplus k(\beta) \oplus \xi, \end{aligned}$$

где $\xi = (1_{n-1}(\tilde{h}(\alpha') \oplus \tilde{h}(\beta') \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta')), \tilde{h}(\alpha') \oplus \tilde{h}(\beta') \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta')) \in \{0_n, 1_n\}$.

Поэтому $k(\alpha \oplus \beta) \in \{\gamma \oplus \delta, \gamma \oplus \delta \oplus 1_n\}$. Аналогично

$$k(\alpha \oplus \beta \oplus 1_n) \in \{\gamma \oplus \delta, \gamma \oplus \delta \oplus 1_n\}.$$

Это означает, что

$$k(\{\alpha \oplus \beta, \alpha \oplus \beta \oplus 1_n\}) = \{\gamma \oplus \delta, \gamma \oplus \delta \oplus 1_n\}.$$

Следовательно, $\gamma \oplus \delta, \gamma \oplus \delta \oplus 1_n \in k(L_1) \subset k(L)$. Отсюда $k(L) < V_n, 1_n \in k(L)$. Значит, $k \in G_{\{A^{01}(n)\}}$. $\square$

Теорема 6. Для класса $M_8(n) = A(n) \cap CL(n)$ верно соотношение

$$\mathfrak{G}_{\{M_8(n)\}} \cong AGL_{n-1} \wr S_2.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы строится аналогично доказательству теоремы 5. Сначала заметим, что носителями функций $f(x_1, \dots, x_n) \in M_8(n)$ являются линейные многообразия вида $\xi \oplus E_p$, где $\xi \in V_n, p(x_1, \dots, x_n) \in A^{01}(n)$. Это все многообразия, содержащие векторы вместе с их инверсиями. Поэтому группа $\mathfrak{G}_{\{M_8(n)\}}$ импримитивна с системой блоков $\mathbb{B}$. Следовательно, группа $\mathfrak{G}_{\{M_8(n)\}}$ изоморфно вкладывается в сплетение $\text{Sym}(V_{n-1}) \wr S_2$.

Рассмотрим многообразие вида $L = E_f, f \in M_8(n)$, размерности 3. Выпишем векторы из данного многообразия в виде

$$L = \{\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \alpha \oplus \beta \oplus \gamma, \alpha \oplus \beta \oplus \gamma \oplus 1_n\}.$$

Обратно, очевидно, что всякое многообразие такого вида является носителем некоторой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in M_8(n)$. Покажем, что если $k = (g, h) \in \mathfrak{G}_{\{M_8(n)\}}$, то $g \in AGL_{n-1}$. Для этого достаточно показать, что $g(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) = g(\alpha) \oplus g(\beta) \oplus g(\gamma)$. Пусть $k(\alpha) = \alpha_1, k(\beta) = \beta_1, k(\gamma) = \gamma_1$.

Тогда $k(L) = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1, \alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1, \alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1 \oplus 1_n\}$.

Из импримитивности группы $\mathfrak{G}_{\{A^{01}(n)\}}$ с системой блоков $\mathbb{B}$ следует, что $k(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}_1, k(\bar{\beta}) = \bar{\beta}_1, k(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}_1$.

Следовательно, $k(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) \in \{\alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1, \alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1 \oplus 1_n\} = \{k(\alpha) \oplus k(\beta) \oplus k(\gamma), k(\alpha) \oplus k(\beta) \oplus k(\gamma) \oplus 1_n\}$.

Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_n), \beta = (b_1, \dots, b_n), \gamma = (c_1, \dots, c_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} k(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) &= (g(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n \oplus c_1 \oplus c_n, \dots \\ &\quad \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n \oplus c_{n-1} \oplus c_n) \oplus 1_{n-1} \oplus \\ &\quad \oplus (a_n \oplus b_n \oplus c_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n \oplus c_1 \oplus c_n, \dots \\ &\quad \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n \oplus c_{n-1} \oplus c_n)), \\ &\quad a_n \oplus b_n \oplus c_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n \oplus c_1 \oplus c_n, \dots \\ &\quad \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n \oplus c_{n-1} \oplus c_n)). \end{aligned}$$

Это, в частности, означает, что либо $a_n \oplus b_n \oplus c_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n \oplus c_1 \oplus c_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n \oplus c_{n-1} \oplus c_n) = a_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n) \oplus b_n \oplus \tilde{h}(b_1 \oplus b_n, \dots, b_{n-1} \oplus b_n) \oplus c_n \oplus \tilde{h}(c_1 \oplus c_n, \dots, c_{n-1} \oplus c_n)$, либо $a_n \oplus b_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n \oplus c_1 \oplus c_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n \oplus c_{n-1} \oplus c_n) = a_n \oplus \tilde{h}(a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n) \oplus b_n \oplus \tilde{h}(b_1 \oplus b_n, \dots, b_{n-1} \oplus b_n) \oplus c_n \oplus \tilde{h}(c_1 \oplus c_n, \dots, c_{n-1} \oplus c_n) \oplus 1$.

В обоих случаях

$$\begin{aligned} g(a_1 \oplus a_n \oplus b_1 \oplus b_n \oplus c_1 \oplus c_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n \oplus b_{n-1} \oplus b_n \oplus c_{n-1} \oplus c_n) = \\ = g(a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n) \oplus g(b_1 \oplus b_n, \dots, b_{n-1} \oplus b_n) \oplus g(c_1 \oplus c_n, \dots, c_{n-1} \oplus c_n), \end{aligned}$$

откуда следует, что $g \in AGL_{n-1}$. Таким образом, $\mathfrak{G}_{\{M_8(n)\}} \subset AGL_{n-1} \wr S_2$. Покажем, что имеет место обратное включение.

Пусть $k = (g, h) \in AGL_{n-1} \wr S_2$. Покажем, что если $L = E_f, f \in M_8(n)$, то $k(L)$ — линейное многообразие, содержащее векторы вместе с их отрицаниями. Если $\dim L = 1$, то многообразие L имеет вид $L = \{\alpha, \bar{\alpha}\}$, т. е. является блоком из системы блоков $\mathbb{B}$. В этом случае теорема, очевидно, верна. Если же $\dim L = 2$, то $L = \{\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}\}$. Любое такое многообразие является носителем некоторой функции из M_8 . Поэтому при действии подстановки k оно перейдет в аналогичное многообразие, и теорема верна.

Рассмотрим случай, когда $\dim L \geq 3$. Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in L, \alpha_1 = k(\alpha), \beta_1 = k(\beta), \gamma_1 = k(\gamma), \alpha = (a_1, \dots, a_n), \beta = (b_1, \dots, b_n), \gamma = (c_1, \dots, c_n)$. Введем векторы $\alpha' = (a_1 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n), \beta' = (b_1 \oplus b_n, \dots, b_{n-1} \oplus b_n), \gamma' = (c_1 \oplus c_n, \dots, c_{n-1} \oplus c_n)$.

Покажем, что $\alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1 \in k(L)$. Для этого рассмотрим многообразие

$$L_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \alpha \oplus \beta \oplus \gamma, \alpha \oplus \beta \oplus \gamma \oplus 1_n\}.$$

Имеем

$$k(L_1) = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1, k(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma), k(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma \oplus 1_n)\} \subset k(L),$$

причем из импримитивности группы $AGL_{n-1} \wr S_2$ вытекают соотношения $k(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}_1, k(\bar{\beta}) = \bar{\beta}_1, k(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}_1, k(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma \oplus 1_n) = k(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) \oplus 1_n$.

Далее,

$$\begin{aligned} k(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) &= (g(\alpha' \oplus \beta' \oplus \gamma') \oplus 1_{n-1}(a_n \oplus b_n \oplus c_n \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta' \oplus \gamma')), \\ &\quad a_n \oplus b_n \oplus c_n \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta \oplus \gamma'')) = \\ &= (g(\alpha') \oplus 1_{n-1}(a_n \oplus \tilde{h}(\alpha')), a_n \oplus \tilde{h}(\alpha')) \oplus \\ &\quad \oplus (g(\beta') \oplus 1_{n-1}(b_n \oplus \tilde{h}(\beta')), b_n \oplus \tilde{h}(\beta')) \oplus \\ &\quad \oplus (g(\gamma') \oplus 1_{n-1}(c_n \oplus \tilde{h}(\gamma')), c_n \oplus \tilde{h}(\gamma')) \oplus \\ &\quad \oplus (1_n(\tilde{h}(\alpha') \oplus \tilde{h}(\beta') \oplus \tilde{h}(\gamma') \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta' \oplus \gamma')), \\ &\quad \tilde{h}(\alpha') \oplus \tilde{h}(\beta') \oplus \tilde{h}(\gamma') \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta' \oplus \gamma')) \\ &= k(\alpha) \oplus k(\beta) \oplus \xi, \end{aligned}$$

где $\xi = 1_n(\tilde{h}(\alpha') \oplus \tilde{h}(\beta') \oplus \tilde{h}(\gamma') \oplus \tilde{h}(\alpha' \oplus \beta' \oplus \gamma')) \in \{0_n, 1_n\}$.

Поэтому $k(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) \in \{\alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1, \alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1 \oplus 1_n\}$. Аналогично

$$k(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma \oplus 1_n) \in \{\alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1, \alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1 \oplus 1_n\}.$$

Это означает, что

$$k(\{\alpha \oplus \beta \oplus \gamma, \alpha \oplus \beta \oplus \gamma \oplus 1_n\}) = \{\alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1, \alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1 \oplus 1_n\}.$$

Следовательно, $\alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1, \alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1 \oplus 1_n \in k(L_1) \subset k(L)$. Таким образом, $k(L)$ — многообразие, содержащее инверсии своих векторов. Значит, $k \in \mathfrak{G}_{\{M_8(n)\}}$. $\square$

Перейдем к описанию групп $\mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}}$ и $\mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}$. Следующая теорема уточняет теорему 29 из [2].

Теорема 7. При $n \geq 3$ для класса $M_2(n) = Bi(n) \cap A(n)$ верно соотношение

$$\mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}} = AR_n^{(1)}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что $AR_n^{(1)} < \mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}}$. Очевидно, что $Q_n < \mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}}$. Покажем, что класс $M_2(n)$ инвариантен относительно невырожденного линейного преобразования пространства V_n , задаваемого матрицей T_n . Это преобразование τ_n имеет следующий вид: если $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in V_n$, то

$$\tau_n(\alpha) = \alpha \cdot T_n = (a_1 \oplus a_n, a_2 \oplus a_n, \dots, a_{n-1} \oplus a_n, a_n).$$

Для произвольного множества $W \subset V_n$ введем обозначения $W \cdot T_n = \{\alpha \cdot T_n \mid \alpha \in W\}$ и f_W — функция-индикатор множества W . Для произвольных $i, j \in \overline{1, n}, a \in \{0, 1\}$ легко показать, что при $W \in \{E_{x_i}, E_{\bar{x}_i}, E_{x_i \oplus x_j \oplus a}\}$ выполнено $f_{W \cdot T_n} \in M_2(n)$.

Следовательно, $\tau_n \in \mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}}$, а тогда $R_n^{(1)} < \mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}}$. Так как $\Sigma_n < Q_n$ и $AR_n^{(1)} = \langle R_n^{(1)}, \Sigma_n \rangle$, то $AR_n^{(1)} < \mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}}$.

Докажем, что имеет место обратное включение. Пусть $\sigma = (s_1, \dots, s_n) \in \mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}}$. Поскольку функции $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ лежат в $M_2(n)$, по лемме 2 из [1] (см. факт 1 в конце первого раздела настоящей статьи) $s_1, \dots, s_n$ — равновероятные функции из $M_2(n)$. Однако легко видеть, что множество равновероятных мультиаффинных биюнктивных функций исчерпывается функциями $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ и функциями вида $x_i \oplus x_j \oplus a$, где $i, j \in \overline{1, n}, a \in \{0, 1\}$. Поэтому преобразование σ является подстановкой из AGL_n , причем матрица этого преобразования состоит из столбцов веса не более 2.

Без ограничения общности (с точностью до преобразования из группы Σ_n) будем считать, что $\sigma(\alpha) = \alpha \cdot C$ для $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in V_n$, где $C = (c_{ij})_{n \times n}$ — невырожденная $n \times n$ -матрица, столбцы которой имеют вес не более 2. В силу включения $\tilde{S}_n < Q_n < \mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}}$ очевидно, что любая матрица, получаемая из матрицы C перестановкой строк или столбцов, также задает преобразование из группы $\mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}}$. Если все столбцы матрицы C имеют вес 1, то C — подстановочная матрица и $\sigma \in \tilde{S}_n$. Пусть в матрице C есть столбец веса 2. Поскольку матрица C — невырожденная, в ней есть столбец веса 1 (иначе все столбцы — веса 2, сумма строк равна 0_n и матрица вырождена). Без ограничения общности будем считать, что этот столбец имеет

номер n и единица в нем стоит на n -м месте: $C_n^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Покажем,

что $\vec{C}_n = 1_n$. С точностью до перестановки столбцов матрицы C будем считать, что столбец веса 2 имеет номер 1. В этом случае либо (с точностью

до перестановки первых $n-1$ строк) $C_1^\downarrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, либо $C_1^\downarrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим первый случай. Положим $f = x_1 \oplus x_n$. Тогда $f(xC) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_n \notin M_2(n)$. Следовательно, первый случай невозможен.

Значит, имеет место второй случай. Покажем, что все столбцы, кроме n -го, имеют вес 2.

Предположим противное. Без ограничения общности считаем, что вес 2-го

столбца равен 1 и он имеет вид $C_2^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (на первом и последнем местах

в столбце единица стоять не может, поскольку тогда матрица C окажется вырожденной). Значит, верно соотношение $E_{x_1 \oplus x_2} \cdot C = E_{x_1 \oplus x_2 \oplus x_n}$. Но $x_1 \oplus x_2 \oplus x_n \notin M_2(n)$, следовательно, предположение неверно. Поэтому веса всех столбцов с 1 по $(n-1)$ -й равны 2. Покажем, что n -й элемент каждого столбца равен 1. Рассмотрим столбец $C_2^\downarrow$. Аналогично проведенным рассуждениям считаем, что элемент $c_{2,2} = 1$. Тогда $c_{i,2} = 1$ для некоторого $i \in \{1\} \cup \overline{3, n}$.

Рассмотрим функцию $f = x_2 \oplus x_n$. Тогда $f(xC) = x_2 \oplus x_i \oplus x_n$ и эта функция существенно зависит не более чем от 2 переменных. Значит, $i = n$. Для других столбцов доказательство строится аналогично. Таким образом, $\mathfrak{G}_{\{M_2(n)\}} = AR_n^{(1)}$. $\square$

Рассмотрим группу $\mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}$. Данная группа, очевидно, содержит группу Q_n , а значит, является транзитивной. Поскольку

$$M_7(n) = Bi(n) \cap CL(n) \subset CL(n),$$

как и в случае с группой $\mathfrak{G}_{\{A^{01}\}}$, группа $\mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}$ является импримитивной с системой блоков $\mathbb{B}$. В этом случае носитель каждой функции из данного класса суть объединение некоторого количества таких блоков.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in CL(n)$ и $E_f = \Delta_{\alpha'_1} \cup \dots \cup \Delta_{\alpha'_m}$. Поставим функции f в соответствие такую функцию $\tilde{f} \in P_2(n-1)$, что $E_{\tilde{f}} = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_m\}$. Это соответствие, очевидно, является взаимно однозначным соответствием множеств $CL(n)$ и $P_2(n-1)$.

Лемма 8. При $n \geq 3$ функция $f \in M_7(n)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f} \in M_2(n-1)$.

Доказательство. Пусть $E_f = \Delta_{\alpha'_1} \cup \dots \cup \Delta_{\alpha'_m}$ и $E_{\tilde{f}} = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_m\}$. Предположим, что выполнено первое включение. Тогда, поскольку $f \in Bi(n)$, по критерию биюнктивности (теорема 1) для любых $i, j, k \in \overline{1, m}$ найдется такое $l \in \overline{1, m}$, что $v_n((\alpha'_i, 0), (\alpha'_j, 0), (\alpha'_k, 0)) = (\alpha'_l, 0)$, где $v_n(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\beta \oplus \alpha\gamma \oplus \beta\gamma$ — покоординатная операция. Но тогда $\alpha'_l \in E_{\tilde{f}}$ и $\alpha'_l = v_{n-1}(\alpha'_i, \alpha'_j, \alpha'_k)$. Таким образом, $\tilde{f} \in Bi(n-1)$. Заметим, что класс $M_7(n)$ является подклассом в классе функций $A(n)$. Следовательно, для множества E_f выполняется критерий мультиаффинности, т.е. для любых $i, j, k \in \overline{1, m}$ найдется такое $t \in \overline{1, m}$, что $(\alpha'_i, 0) \oplus (\alpha'_j, 0) \oplus (\alpha'_k, 0) = (\alpha'_t, 0)$. Значит, $\alpha'_i \oplus \alpha'_j \oplus \alpha'_k = \alpha'_t$ и $\tilde{f} \in A(n-1)$.

Пусть теперь $\tilde{f} \in M_2(n-1)$. Построим соответствующую функцию $f \in CL(n)$ и покажем, что $f \in M_7(n)$. Рассмотрим векторы $\alpha'_i, \alpha'_j, \alpha'_k \in E_{\tilde{f}}$. Воспользуемся критериями мультиаффинности и биюнктивности. Обозначим

$$v_{n-1}(\alpha'_i, \alpha'_j, \alpha'_k) = \alpha'_l \in E_{\tilde{f}} \quad \text{и} \quad \alpha'_i \oplus \alpha'_j \oplus \alpha'_k = \alpha'_t \in E_{\tilde{f}}.$$

Тогда множество E_f содержит векторы $(\alpha'_i, 0), (\overline{\alpha'_i}, 1), (\alpha'_j, 0), (\overline{\alpha'_j}, 1), (\alpha'_k, 0), (\overline{\alpha'_k}, 1), (\alpha'_l, 0), (\overline{\alpha'_l}, 1), (\alpha'_t, 0), (\overline{\alpha'_t}, 1)$.

Пусть $\alpha = (\alpha'_i, 0) \oplus a \cdot 1_n$, $\beta = (\alpha'_j, 0) \oplus b \cdot 1_n$, $\gamma = (\alpha'_k, 0) \oplus c \cdot 1_n$, $a, b, c \in \{0, 1\}$. Тогда очевидно, что $\alpha \oplus \beta \oplus \gamma \in \{(\alpha'_t, 0), (\overline{\alpha'_t}, 1)\}$. Следовательно, $f \in A(n)$. Дальнейшая часть доказательства вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} v_n((\alpha'_i, 0), (\alpha'_j, 0), (\alpha'_k, 0)) &= (\alpha'_l, 0), \\ v_n((\alpha'_i, 0), (\alpha'_j, 0), (\overline{\alpha'_k}, 1)) &= (\alpha'_l, 0) \oplus (\alpha'_i, 0) \oplus (\alpha'_j, 0) \in E_f, \\ v_n((\alpha'_i, 0), (\alpha'_j, 0), (\overline{\alpha'_k}, 1)) &= (\alpha'_l, 0) \oplus (\alpha'_j, 0) \oplus (\alpha'_k, 0) \in E_f. \end{aligned} \quad \square$$

Рассмотрим группу $H_n = \langle (\alpha, \bar{\alpha}), \alpha \in V_n \rangle$. Очевидно, что $|H_n| = 2^{2^{n-1}}$ и $Q_n \cap H_n = \{\varepsilon, \bar{1}_n\}$. Легко показать, что группа H_n изоморфна табличному сплетению групп $E(V_{n-1}) \wr S_2$, где $E(V_{n-1})$ — группа, состоящая из одной тождественной подстановки на множестве V_{n-1} . Положим $Y_n = \langle Q_n, H_n \rangle$.

Лемма 9. При $n \geq 3$ верны соотношения

$$H_n \triangleleft Y_n, \quad |Y_n| = 2^{2^{n-1}+n-1} \cdot n!$$

Доказательство. Для доказательства первого включения достаточно показать, что для $\sigma \in Q_n, \tau \in H_n$ выполнено $\sigma\tau\sigma^{-1} \in H_n$. Рассмотрим действие подстановки σ на блоки системы $\mathbb{B}$. В силу импримитивности группы Q_n данная подстановка сохраняет разбиение на блоки, переводя блок с номером $(0, \dots, 0)$ в блок с номером $\beta_0, \dots$, блок с номером $(1, \dots, 1)$ — в блок с номером $\beta_{2^{n-1}-1}$. Подстановка τ стабилизирует блоки (сохраняет их на месте), а подстановка σ^{-1} совершает обратное преобразование блоков. Поэтому подстановка $\sigma\tau\sigma^{-1}$ импримитивно действует на блоках, а значит, $\sigma\tau\sigma^{-1} \in H_n$ и $H_n \triangleleft Y_n$.

Докажем второе равенство. Очевидно, что $|Y_n| \leq |Q_n| \cdot |H_n| = 2^{2^{n-1}+n} \cdot n!$. Далее, в силу нормальности группы H_n в Y_n каждая подстановка σ из Y_n может быть представлена в виде

$$\sigma = \pi \cdot \eta, \quad \pi \in Q_n, \eta \in H_n.$$

Положим теперь $\pi'(x) = \pi(x) \oplus 1_n, \eta'(x) = \eta(x) \oplus 1_n, x \in V_n$. Ясно, что $\pi' \in Q_n, \eta'(x) \in H_n$ и $\pi' \cdot \eta' = \sigma$. Поэтому $|Y_n| \leq 2^{2^{n-1}+n-1} \cdot n!$

Докажем неравенство в другую сторону. Пусть $\sigma = \pi_1 \cdot \eta_1 = \pi_2 \cdot \eta_2$, $\pi_1, \pi_2 \in Q_n, \eta_1, \eta_2 \in H_n$. Тогда $\varepsilon = \sigma \cdot \sigma^{-1} = \pi_1 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2^{-1} \cdot \pi_2^{-1}$, откуда $\pi_1^{-1} \cdot \pi_2 = \eta_1 \cdot \eta_2^{-1}$. Это означает, что $\pi_1^{-1} \cdot \pi_2 \in Q_n \cap H_n = \{\varepsilon, \bar{1}_n\}$. Поэтому либо $\pi_2 = \pi_1$, либо $\pi_2 = \pi_1 \bar{1}_n$. Аналогичным образом либо $\eta_2 = \eta_1$, либо $\eta_2 = \eta_1 \bar{1}_n$. Поэтому $|Y_n| \geq 2^{2^{n-1}+n-1} \cdot n!$, откуда $|Y_n| = 2^{2^{n-1}+n-1} \cdot n!$ $\square$

Теорема 10. При $n \geq 3$ для класса функций $M_7(n) = Bi(n) \cap CL(n)$ верно соотношение

$$\mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}} = Y_n.$$

Доказательство. Включение $Q_n < \mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}$ очевидно. Кроме того, очевидно, что группа $\mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}$ транзитивна и инвариантна относительно разбиения пространства V_n на блоки системы $\mathbb{B}$. Поэтому она импримитивна с этой системой блоков. Поскольку носитель каждой функции $f \in M_7(n)$ состоит из целого числа блоков, инверсия вектора внутри блока сохраняет эту функцию. Поэтому $H_n < \mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}$ и $Y_n < \mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}$.

Докажем обратное включение. Для произвольной импримитивной группы $G < \mathfrak{G}$ с системой блоков $\mathbb{B}$ через $\tilde{G} = \{\tilde{g}, g \in G\}$ обозначим группу, задаваемую действием группы G на V_{n-1} по принципу: если $g \in G$ и $g(\Delta_{\alpha'}) = \Delta_{\beta'}$, то $\tilde{g}(\alpha') = \beta'$. Следуя [8], построим подстановочный гомоморфизм

$$\xi: (\mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}, V_n) \rightarrow (\tilde{\mathfrak{G}}_{\{M_7(n)\}}, V_{n-1})$$

по правилу $\xi(g) = \tilde{g}$. Теперь заметим, что если $g \in \mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}$, то $\tilde{g} \in \mathfrak{G}_{\{M_2(n-1)\}} = AR_{n-1}^{(1)}$ по лемме 8. Таким образом, $\tilde{\mathfrak{G}}_{\{M_7(n)\}} < AR_{n-1}^{(1)}$.

С другой стороны, для каждой подстановки $\tilde{g} \in AR_{n-1}^{(1)}$ можно построить соответствующую подстановку $g \in \mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}$. Тогда по теореме 1.16 из [8] ядро $\text{Ker} \xi$ состоит из всех подстановок из $\mathfrak{G}$, оставляющих на месте разбиение на блоки. Такие подстановки составляют группу H_n .

Следовательно, $\mathfrak{G}_{\{M_7(n)\}}/H_n \cong AR_{n-1}^{(1)}$. Осталось заметить, что $|T_n| = 2^{2^{n-1}+n-1} \cdot n! = |AR_{n-1}^{(1)}| \cdot |H_n|$. $\square$

Теорема 11. При $n \geq 3$ для класса $M_1^{01}(n) = WP(n) \cap CL(n)$ выполняется равенство

$$\mathfrak{G}_{\{M_1^{01}(n)\}} = \langle \tilde{S}_n, H_n \rangle.$$

Теорема 11 доказывается аналогично теореме 10 с учетом того факта, что $M_1^{01}(n) \subset M_7(n)$.

Перейдем к рассмотрению классов $M_9(n)$, $M_9^1(n)$, $Mon'(n)$, $M_{10}(n)$, $M_{10}^0(n)$ и $\overline{Mon'}(n)$.

Теорема 12. При $n \geq 3$ группы $\mathfrak{G}_{\{M_9(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{M_9^1(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{Mon'(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{M_{10}(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{M_{10}^0(n)\}}$ и $\mathfrak{G}_{\{\overline{Mon'}(n)\}}$ совпадают с группой $\tilde{S}_n$.

Доказательство. Включение группы $\tilde{S}_n$ в группы $\mathfrak{G}_{\{M_9(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{M_9^1(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{Mon'(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{M_{10}(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{M_{10}^0(n)\}}$ и $\mathfrak{G}_{\{\overline{Mon'}(n)\}}$ очевидно. Докажем обратное включение. Заметим, что функциями веса $2^n - 2$ в классах $M_9(n)$, $M_9^1(n)$, $Mon'(n)$ являются только функции вида $h_i = x_1 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому если $\sigma \in \mathfrak{G}_{\{M_9(n)\}}$ (либо $\sigma \in \mathfrak{G}_{\{M_9^1(n)\}}$, либо $\sigma \in \mathfrak{G}_{\{Mon'(n)\}}$), то $\sigma(E_{h_i}) \in \{E_{h_1}, \dots, E_{h_n}\}$.

Соответственно, функциями веса $2^n - 2$ в классах $M_{10}(n)$, $M_{10}^0(n)$, $\overline{Mon'}(n)$ являются только функции вида $q_i = \bar{x}_1 \vee \dots \vee \bar{x}_{i-1} \vee \bar{x}_{i+1} \vee \dots \vee \bar{x}_n$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому если $\sigma \in \mathfrak{G}_{\{M_{10}(n)\}}$ (либо $\sigma \in \mathfrak{G}_{\{M_{10}^0(n)\}}$, либо $\sigma \in \mathfrak{G}_{\{\overline{Mon'}(n)\}}$), то $\sigma(E_{q_i}) \in \{E_{q_1}, \dots, E_{q_n}\}$.

Проведем рассуждения для класса $M_9(n)$. Для остальных классов рассуждения аналогичны.

Пусть $\sigma = (s_1, \dots, s_n) \in \mathfrak{G}_{\{M_9(n)\}}$. Положим $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1) \in V_n$. Единственной функцией веса $2^n - 1$ в классе $M_9(n)$ является функция $g = x_1 \vee \dots \vee x_n$. Поэтому $\sigma(E_g) = E_g$, откуда следует, что $\sigma(0_n) = 0_n$.

Покажем, что если $\alpha \in V_n$ и $\|\alpha\| = 1$, то $\|\sigma(\alpha)\| = 1$. В самом деле, функции $h_i, i = \overline{1, n}$, образуют совокупность орбит действия группы $\mathfrak{G}_{\{M_9(n)\}}$ на $P_2(n)$ как единственные функции веса $2^n - 2$ в классе $M_9(n)$. Если $\alpha = e_i$, то $\alpha \notin E_{h_i}$ и $\alpha \in E_{h_j}, j \neq i$. Однако если $\|\sigma(\alpha)\| > 1$, то вектор $\sigma(\alpha)$ входит во все носители $E_{h_j}, j = \overline{1, n}$, что невозможно из мощностных соображений, так как множества $E_{h_j}, j = \overline{1, n}$, равномощны и переходят одно в другое под действием подстановки σ .

Если же $\|\sigma(\alpha)\| = 0$, то $0_n = \sigma(\alpha) \notin E_{h_j}, j = \overline{1, n}$, и опять получается противоречие. Таким образом, векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют орбиту группы $\mathfrak{G}_{\{M_9(n)\}}$ (то, что это именно орбита, а не объединение орбит, следует из включения $\tilde{S}_n < \mathfrak{G}_{\{M_9(n)\}}$). Без ограничения общности будем считать, что $\sigma(e_i) = e_i, i = \overline{1, n}$.

Поскольку $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in M_9(n)$, по лемме 1.6 из [1] (см. факт 1 из первого раздела) функции $s_1, \dots, s_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n$ являются равновероятными функциями из класса $M_9(n)$. Рассмотрим функцию s_1 . Возможны следующие варианты:

- а) $s_1 \in \{x_1, \dots, x_n\}$,
- б) $s_1 \in \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$,
- в) $s_1 \in \{x_i \oplus x_j \oplus 1, 1 \leq i < j \leq n\}$,

г) s_1 — равновероятная монотонная функция, существенно зависящая не менее чем от трех переменных.

В силу задания класса $M_9(n)$ (см. табл. 1) других случаев быть не может. Случаи б)—в) невозможны, так как $\sigma(0_n) = 0_n$. Рассмотрим случай г). Функция s_1 существенно зависит от x_1 , так как $s_1(0_n) = 0$ и $s_1(e_1) = 1$. В этом случае, поскольку функция s_1 монотонна, она равна 1 на всех векторах вида $(1, *, \dots, *)$. Но таких векторов ровно 2^{n-1} , а s_1 — равновероятная монотонная функция. Следовательно, $s_1 = x_1$. Остается только случай а). Проведя аналогичные рассуждения для функций $s_2, \dots, s_n$, получим, что $\sigma \in \tilde{S}_n$. $\square$

Следующая теорема завершает описание стабилизаторов классов функций из Галуа-замкнутых подалгебр алгебры Шефера от n переменных.

Теорема 13. При $n \geq 3$, $m \geq 2$ группы $\mathfrak{G}_{\{Mon'_m(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{M_{9,m}(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{WP_{m,2}^1(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{\overline{Mon'_m}(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{M_{10,m}(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{WN_{m,2}^0(n)\}}$ совпадают с группой $\tilde{S}_n$.

Доказательство. Для групп $\mathfrak{G}_{\{Mon'_m(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{M_{9,m}(n)\}}$, $\mathfrak{G}_{\{\overline{Mon'_m}(n)\}}$ и $\mathfrak{G}_{\{M_{10,m}(n)\}}$, а также $\mathfrak{G}_{\{WP_{m,2}^1(n)\}}$ и $\mathfrak{G}_{\{WN_{m,2}^0(n)\}}$ при $m \geq 3$ доказательство теоремы строится аналогично доказательству теоремы 12 путем рассмотрения функций максимального веса, отличных от константы. Такими функциями будут либо функции вида $x_{i_1} \vee \dots \vee x_{i_m}$, либо функции вида $\bar{x}_{i_1} \vee \dots \vee \bar{x}_{i_m}$, в зависимости от рассматриваемого класса.

Для групп $\mathfrak{G}_{\{WP_{2,2}^1(n)\}}$ и $\mathfrak{G}_{\{WN_{2,2}^0(n)\}}$ результат вытекает из теоремы А в [2], поскольку $WP_{2,2}^1(n) = Bi^1(n)$ и $WN_{2,2}^0(n) = Bi^0(n)$. $\square$

Объединяя результаты настоящей статьи с результатами из [1] и [2], получаем перечень стабилизаторов семейств функций, зависящих от n переменных, из Галуа-замкнутых подалгебр алгебры Шефера.

Таблица 2

№	Класс	Группа	№	Класс	Группа
1	P_2	S_{2^n}	24	WN	$\tilde{S}_n$
2	$0-S$	S_{2^n-1}	25	WN^0	$\tilde{S}_n$
3	$1-S$	S_{2^n-1}	26	WN^1	$\tilde{S}_n$
4	CL	S_{2^n-1}	27	WN^{01}	$\tilde{S}_n$
5	$0-S \cap 1-S$	$\bar{S}_{2^n-2}$	28	$WN_{\infty,2}$	$\tilde{S}_n$
6	CL^1	S_{2^n-1-1}	29	$WN_{m,2}, m \geq 2$	$\tilde{S}_n$
7	A	AGL_n	30	A^{01}	$GL_{n-1} \wr S_2$
8	A^0	GL_n	31	M_8	$AGL_{n-1} \wr S_2$
9	A^1	$(AGL_n)_{1_n}$	32	M_2	$AR_n^{(1)}$
10	Bi	Q_n	33	M_7	$\langle Q_n, H_n \rangle$
11	M_3	CS_n	34	M_1^{01}	$\langle \tilde{S}_n, H_n \rangle$
12	M_3^0	$\tilde{S}_n$	35	M_9	$\tilde{S}_n$
13	M_3^1	$\tilde{S}_n$	36	M_9^1	$\tilde{S}_n$
14	M_3^{01}	$\overline{CS}_n$	37	Mon'	$\tilde{S}_n$
15	M_1	CS_n	38	$Mon'_m, m \geq 2$	$\tilde{S}_n$
16	M_1^0	$\tilde{S}_n$	39	$M_{9,m}, m \geq 2$	$\tilde{S}_n$
17	M_1^1	$\tilde{S}_n$	40	$WP_{m,2}^1, m \geq 2$	$\tilde{S}_n$
18	WP	$\tilde{S}_n$	41	M_{10}	$\tilde{S}_n$
19	WP^0	$\tilde{S}_n$	42	M_{10}^0	$\tilde{S}_n$
20	WP^1	$\tilde{S}_n$	43	$\overline{Mon'}$	$\tilde{S}_n$
21	WP^{01}	$\tilde{S}_n$	44	$\overline{Mon'_m}, m \geq 2$	$\tilde{S}_n$
22	$WP_{\infty,2}$	$\tilde{S}_n$	45	$M_{10,m}, m \geq 2$	$\tilde{S}_n$
23	$WP_{m,2}, m \geq 2$	$\tilde{S}_n$	46	$WN_{m,2}^0, m \geq 2$	$\tilde{S}_n$

Список литературы

- [1] Горшков С. П., Тарасов А. В., “О максимальных группах инвариантных преобразований мультиаффинных, бионктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций”, *Дискретная математика*, **21**:2 (2009), 94–101.
- [2] Тарасов А. В., “Стабилизаторы некоторых семейств булевых функций от n переменных, образующих Галуа-замкнутые подалгебры алгебры Шефера”, *Математические вопросы криптографии*, **6**:4 (2015), 79–105.
- [3] Литвиненко В. С., Тарасов А. В., “Классы Шефера, классы Поста и соответствия Галуа”, *Математические вопросы криптографии*, **6**:1 (2015), 81–108.
- [4] Тарасов А. В., “Обобщение критерия бионктивности Шефера”, *Дискретная математика*, **24**:2 (2012), 91–99.
- [5] Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А., “Теория Галуа для классов Поста”, *Кибернетика*, № 3 (1969), 1–10; № 5, 1–9.
- [6] Марченков С. С., “Инварианты классов Поста”, *Фундам. и прикл. матем.*, **4**:4 (1998), 1385–1404.
- [7] Марченков С. С., *Замкнутые классы булевых функций*, М.: Физматлит, 2001, 126 с.
- [8] Погорелов Б. А., *Основы теории групп подстановок. Ч.1. Общие вопросы*, М., 1986.
- [9] Калужнин Л. А., Клиш М. Х., Сушанский В. И., “Экспоненцирование групп подстановок, Γ ”, *Известия ВУЗов. Математика*, № 8(207) (1979), 26–33.
- [10] Погорелов Б. А., “Подметрики метрики Хемминга и теорема А. А. Маркова”, *Труды по дискретной математике*, **9** (2006), 190–219.
- [11] Горшков С. П., Тарасов А. В., *Сложность решения систем булевых уравнений*, М.: Курс, 2017, 192 с.