Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, Управляемая полиномиальная схема размещения, *Матем. вопр. криптогр.*, 2018, том 9, выпуск 1, 75–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:30:22

Управляемая полиномиальная схема размещения

В. Г. Михайлов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Получено 17.V.2017

Аннотация. В работе изучаются распределения ряда характеристик (в частности числа пустых ячеек) в схеме размещения частиц, управляемой стационарным случайным процессом, удовлетворяющим условию равномерно сильного перемешивания. Получены оценки точности пуассоновской аппроксимации для этих распределений и соответствующие предельные теоремы.

Ключевые слова: управляемая полиномиальная схема размещения, условие равномерно сильного перемешивания, число пустых ячеек

Controlled multinomial allocation scheme

V. G. Mikhailov

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow

Abstract. We study the distribution of some characteristics (in particular, the number of empty cells) for the allocation scheme controlled by a stationary random process satisfying uniform mixing property. The estimates of the accuracy of Poisson approximation for these distributions and the corresponding limit theorems are obtained.

Key words: controlled polynomial allocation scheme, uniform strong mixing condition, number of empty cells

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2018, v. 9, № 1, pp. 75–88 (Russian)

© Академия криптографии Российской Федерации, 2018 г.

1. Введение

Рассмотрим совокупность из M наборов вероятностей

$$(p_1^{(m)}, \dots, p_N^{(m)}), \quad p_1^{(m)} + \dots + p_N^{(m)} = 1, \quad m = 1, \dots, M,$$

каждый из которых задает некоторое полиномиальное распределение на множестве $1, \dots, N$, и случайный процесс Z_t с дискретным временем и со значениями в множестве $\{1, \dots, M\}$. Полиномиальная схема размещения, управляемая процессом Z_t , задается следующим правилом: частица с номером t размещается в соответствии с распределением с номером Z_t и при фиксации Z_t не зависит от Z_u , $u \neq t$. Здесь $t = 1, \dots, T$, а T — общее число размещаемых частиц.

Такая схема представляет собой математическую модель косвенных наблюдений над физическим процессом или над процессом изменения внутренних состояний автомата.

Интересна она и в математическом плане. В качестве управляющего процесса могут выступать конечная цепь Маркова или стационарный процесс с дискретным временем, удовлетворяющий тем или иным условиям сильного перемешивания. В первом случае наша постановка попадает в класс «скрытых марковских моделей» (см., например, [1]).

В настоящей работе изучаются асимптотические свойства распределений случайных величин μ_0, μ_1, μ_2 (здесь μ_r — число ячеек, содержащих ровно r частиц) в схеме размещения, управляемой стационарным случайным процессом, удовлетворяющим условию равномерно сильного перемешивания. Рассматривается случай, когда число T размещаемых частиц при переходе к пределу бесконечно мало по сравнению с общим числом ячеек N и практически все ячейки содержат не более двух частиц («левая область» изменения параметров, см. [2]). В этом случае удобно начать исследование с величины ξ_2 — числа повторений исходов в последовательности $X_1, \dots, X_T$, образованной номерами ячеек, в которые попадали частицы; в более общей ситуации

$$\xi_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq T} \mathbb{I}\{X_{i_1} = \dots = X_{i_r}\}, \quad r = 2, 3, \dots, T, \quad (1)$$

где $\mathbb{I}\{E\}$ — индикатор события E .

Легко проверить (см. [2]), что

$$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_N = N,$$

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + T\mu_T = T,$$

$$\xi_r = \mu_r + C_{r+1}^r \mu_{r+1} + \dots + C_T^r \mu_T, \quad r = 2, 3, \dots, T.$$

Из этих тождеств следуют соотношения

$$0 \leq \xi_2 - \mu_2 \leq 3\xi_3, \quad (2)$$

$$\mu_2 \leq T - N + \mu_0 \leq \mu_2 + 2\xi_3, \quad (3)$$

$$0 \leq \frac{T - \mu_1}{2} - \mu_2 \leq \frac{3}{2}\xi_3. \quad (4)$$

Для распределения случайной величины ξ_2 будут получены оценки точности пуассоновской аппроксимации в терминах расстояния по вариации. Из них будут выведены предельные теоремы для случайных величин ξ_2 , μ_0 , μ_1 , μ_2 .

2. Формулировки результатов

Пусть $(X_t)_{t=1}^\infty$ — последовательность случайных величин, принимающих значения $1, \dots, N$, распределение которой определяется управляющей стационарной последовательностью $(Z_t)_{t=1}^\infty$ со значениями в множестве $\{1, \dots, M\}$ следующим образом: при всех T

$$\mathbf{P}\{X_t = x_t, t = 1, \dots, T \mid Z_t = z_t, t = 1, \dots, T\} = \prod_{t=1}^T p_{x_t}^{(z_t)}, \quad (5)$$

где $x_1, \dots, x_T \in \{1, \dots, N\}$, $z_1, \dots, z_T \in \{1, \dots, M\}$, а набор $(p_1^{(m)}, \dots, p_N^{(m)})$ при каждом $m = 1, \dots, M$ задает вероятности исходов $1, \dots, N$ в m -й полиномиальной схеме.

Будем считать, что стационарная последовательность $(Z_t)_{t=1}^\infty$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания: при всех $t \geq 1$ для любых событий A и B , принадлежащих σ -алгебрам, порожденным случайными величинами $X_1, \dots, X_{t-1}, X_t$ и $X_{t+s}, X_{t+s+1}, \dots$ соответственно, выполнено неравенство

$$|\mathbf{P}\{AB\} - \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}| \leq \mathbf{P}\{A\}\varphi(s), \quad (6)$$

где функция $\varphi(s)$ неотрицательна и монотонно убывает при $s \rightarrow \infty$ (см., например, [3]).

Условию (6) удовлетворяют, в частности, неразложимые непериодические цепи Маркова с конечным числом состояний. Для них функция $\varphi(s)$ при $s \rightarrow \infty$ убывает экспоненциально быстро.

Пусть

$$\pi_k = \mathbf{P}\{Z_t = k\} > 0, \quad k \in \{1, \dots, M\}.$$

В силу стационарности эти величины не зависят от $t = 1, 2, \dots$

Пусть

$$P_2 = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M p_n^{(k)} p_n^{(l)} \pi_k \pi_l, \quad \lambda_2 = C_T^2 P_2, \quad (7)$$

$$p = \max_{k,n} p_n^{(k)}, \quad Q = \max_k \frac{1}{\pi_k}, \quad \Psi(T) = \frac{Q}{T-1} \sum_{s=1}^T \varphi(s). \quad (8)$$

Введем обозначение $\text{Po}(\lambda)$ для распределения Пуассона с параметром λ и обозначение $\rho(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ для расстояния по вариации между распределениями $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. Напомним, что расстояние по вариации между распределениями на множестве $\{0, 1, \dots\}$ выражается формулой

$$\rho(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{P}_1(\{k\}) - \mathcal{P}_2(\{k\})|.$$

Через $\mathcal{L}(W)$ будем обозначать распределение случайной величины W .

Теорема 1. Если выполнено неравенство

$$\Psi(T) < \frac{1}{2}, \quad (9)$$

то

$$\rho(\mathcal{L}(\xi_2), \text{Po}(\mathbf{E}\xi_2)) < 4pT + G, \quad (10)$$

где

$$G = \frac{16 \lambda_2^2 T (T-1)^{-1} (1+Q\varphi(1))^2 \Psi(T) + (4T+1)p}{\lambda_2 (1-2\Psi(T))}. \quad (11)$$

Следствие 1. Пусть выполнено условие (9). Тогда

$$\rho(\mathcal{L}(\xi_2), \text{Po}(\lambda_2)) < 4pT + G + 2 \min \left\{ 1, \lambda_2^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \right\} \lambda_2 \Psi(T). \quad (12)$$

Теперь сформулируем вытекающие из оценок предельные теоремы.

Теорема 2. Пусть $N, T \rightarrow \infty$, а остальные характеристики схемы меняются так, что $\lambda_2 \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ и выполнено условие

$$pT + \Psi(T) \rightarrow 0. \quad (13)$$

Тогда распределения случайных величин

$$\xi_2, \quad \mu_2, \quad T - N + \mu_0, \quad \frac{T - \mu_1}{2}$$

сходятся к распределению Пуассона с параметром λ .

Теорема 3. Пусть $N, T \rightarrow \infty$, а остальные характеристики схемы меняются так, что $\lambda_2 \rightarrow \infty$ и выполнено условие

$$\lambda_2 (pT + \Psi^2(T)) \rightarrow 0. \quad (14)$$

Тогда распределения случайных величин

$$\frac{\xi_2 - \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad \frac{\mu_2 - \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad \frac{T - N + \mu_0 - \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \left(\frac{T - \mu_1}{2} - \lambda_2 \right)$$

сходятся к стандартному нормальному распределению.

Замечание 1. В условиях теорем 2 и 3 допускается, что при $N, T \rightarrow \infty$ наряду с параметрами полиномиальных схем может меняться и распределение управляющего случайного процесса. В частности, допускается, что $M \rightarrow \infty$.

3. Доказательство теоремы 1

Введем обозначения $\bar{z} = (z_1, \dots, z_T)$ и $\bar{Z} = (Z_1, \dots, Z_T)$. Дополним обозначение для ξ_2 указанием на зависимость этой величины от процесса $\bar{Z} = (Z_1, \dots, Z_T)$ и будем писать $\xi_2 = \xi_2(\bar{Z})$. При фиксации реализации $\bar{z} = (z_1, \dots, z_T)$ процесса $\bar{Z}$ будем использовать запись $\xi_2(\bar{z})$. Поэтому

$$\xi_2(\bar{Z}) = \sum_{\bar{z}} \xi_2(\bar{z}) \mathbb{I}\{\bar{Z} = \bar{z}\}. \quad (15)$$

Для произвольного набора $z_1, \dots, z_n \in \{1, \dots, M\}$ определим функцию

$$\lambda(\bar{z}) = \sum_{1 \leq i < j \leq T} \sum_{u=1}^N p_u^{(z_i)} p_u^{(z_j)}. \quad (16)$$

Пусть

$$F = \sum_{\bar{z}} \text{Po}(\lambda(\bar{z})) \mathbf{P}\{\bar{Z} = \bar{z}\}. \quad (17)$$

Используя (15) и (17), стандартными рассуждениями можно показать, что

$$\rho(\mathcal{L}(\xi_2(\bar{Z})), F) \leq \max_{\bar{z}} \rho(\mathcal{L}(\xi_2(\bar{z})), \text{Po}(\lambda(\bar{z}))).$$

В [4] было доказано неравенство, имеющее в наших обозначениях вид

$$\rho(\mathcal{L}(\xi_2(\bar{z})), \text{Po}(\lambda(\bar{z}))) < 4pT \quad \forall \bar{z} \in \{1, \dots, M\}^T. \quad (18)$$

Поэтому

$$\rho(\mathcal{L}(\xi_2(\bar{Z})), F) < 4pT. \quad (19)$$

Согласно утверждению (ii) теоремы 1.С книги [5] для распределения F вида (17) выполнено неравенство

$$\rho(F, \text{Po}(\mathbf{E}\lambda(\bar{Z}))) \leq \frac{1 - e^{-\mathbf{E}\lambda(\bar{Z})}}{\mathbf{E}\lambda(\bar{Z})} \mathbf{D}\lambda(\bar{Z}), \quad (20)$$

где

$$\lambda(\bar{Z}) = \sum_{1 \leq i < j \leq T} \sum_{u=1}^N p_u^{(Z_i)} p_u^{(Z_j)} = \sum_{\bar{z}} \lambda(\bar{z}) \mathbb{I}\{\bar{Z} = \bar{z}\}. \quad (21)$$

Здесь, как легко проверить,

$$\mathbf{E}\lambda(\bar{Z}) = \mathbf{E}\xi_2. \quad (22)$$

Теперь покажем, что выражение в правой части (20) не превосходит G (см. (11)).

Лемма 1. Найдется такое число θ , $|\theta| \leq 1$, что

$$\mathbf{E}\xi_2 = P_2 \left(C_T^2 + \theta Q \sum_{1 \leq i < j \leq T} \varphi(j-i) \right). \quad (23)$$

Непосредственно из (23) вытекает оценка

$$\mathbf{E}\xi_2 = \lambda_2 + \theta' P_2 Q T \sum_{s=1}^T \varphi(s) = \lambda_2 (1 + 2\theta' \Psi(T)), \quad \text{где } |\theta'| \leq 1. \quad (24)$$

Доказательство леммы 1. Из формул (5), (6) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq T} \sum_{n=1}^N \sum_{k,l=1}^M p_n^{(k)} p_n^{(l)} \mathbf{P}\{Z_i=k, Z_j=l\} = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq T} \sum_{n=1}^N \sum_{k,l=1}^M p_n^{(k)} p_n^{(l)} (\pi_k \pi_l + (\mathbf{P}\{Z_i=k, Z_j=l\} - \pi_k \pi_l)) = \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k,l=1}^M p_n^{(k)} p_n^{(l)} \pi_k \pi_l \sum_{1 \leq i < j \leq T} (1 + \theta \pi_l^{-1} \varphi(j-i)), \end{aligned}$$

где $|\theta| \leq 1$. Согласно (7) и (8) отсюда следует (23). Лемма доказана. $\square$

Нам понадобится еще одно утверждение, громоздкое доказательство которого будет приведено в разделе 5.

Лемма 2. Выполнено неравенство

$$\mathbf{D}\lambda(\bar{Z}) < 4 P_2^2 Q T^3 (1 + Q \varphi(1))^2 \sum_{s=1}^T \varphi(s) + (4T+1) p. \quad (25)$$

Подставив в (20) оценки (22), (23) и (25), получим после несложных преобразований, что

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{L}(\lambda(\bar{Z})), \text{Po}(\mathbf{E}\xi_2)) &\leq \frac{1 - e^{-\mathbf{E}\xi_2}}{\mathbf{E}\xi_2} \mathbf{D}\lambda(\bar{Z}) < \\ &< \frac{4 P_2^2 Q T^3 (1 + Q \varphi(1))^2 \sum_{s=1}^T \varphi(s) + (4T+1) p}{\lambda_2 - P_2 Q T \sum_{s=1}^T \varphi(s)} = G. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь из (19) и (26) следует (10). Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Воспользуемся утверждением (i) теоремы 1.C из книги [5], согласно которому

$$\rho(\text{Po}(\mathbf{E}\xi_2), \text{Po}(\lambda_2)) \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \right\} |\mathbf{E}\xi_2 - \lambda_2|.$$

Используя (24), получаем

$$\rho(\text{Po}(\mathbf{E}\xi_2), \text{Po}(\lambda_2)) \leq 2 \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \right\} \lambda_2 \Psi(T).$$

Из этих соотношений и оценки теоремы 1 получаем (12). Следствие 1 доказано. $\square$

4. Доказательства теорем 2 и 3

Далее нам понадобится еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Выполнено неравенство*

$$\mathbf{E}\xi_3 < T p \mathbf{E}\xi_2. \quad (27)$$

Доказательство. Из формул (5), (1) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_3 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq T} \sum_{n=1}^N \sum_{k,l,m=1}^M p_n^{(k)} p_n^{(l)} p_n^{(m)} \mathbf{P}\{Z_{i_1} = k, Z_{i_2} = l, Z_{i_3} = m\} < \\ &< \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq T} \sum_{n=1}^N \sum_{k,l=1}^M p_n^{(k)} p_n^{(l)} p \sum_{i_3=1}^T \sum_{m=1}^M \mathbf{P}\{Z_{i_1} = k, Z_{i_2} = l, Z_{i_3} = m\} = \\ &= T p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq T} \sum_{n=1}^N \sum_{k,l}^M p_n^{(k)} p_n^{(l)} \mathbf{P}\{Z_{i_1} = k, Z_{i_2} = l\}. \end{aligned}$$

Согласно (7) и (1) отсюда следует (27). Лемма доказана. $\square$

Доказательство теорем 2 и 3. Из условий теорем 2 и 3 и следствия 1 вытекает, что при переходе к пределу распределение случайной величины ξ_2 сближается (в смысле сходимости к нулю расстояния по вариации) с распределением Пуассона с параметром λ_2 . А так как $\lambda_2 \rightarrow \lambda$, то распределение величины ξ_2 сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

При $\lambda_2 \rightarrow \infty$ из упомянутого сближения вытекает сходимость распределения случайной величины $(\xi_2 - \mathbf{E}\xi_2)/\sqrt{\mathbf{E}\xi_2}$ к стандартному нормальному распределению. А так как из условий теоремы 3 и равенства (24) следует, что $\mathbf{E}\xi_2 - \lambda_2 = o(\sqrt{\lambda_2})$, то распределение случайной величины $(\xi_2 - \lambda_2)/\sqrt{\lambda_2}$ также сходится к стандартному нормальному распределению. Этим утверждения теорем 2 и 3 для случайной величины ξ_2 доказаны.

Из леммы 3 и условий теорем 2 и 3 следует, что $\mathbf{E}\mu_3 \rightarrow 0$. По неравенству Маркова это означает, что $\mathbf{P}\{\mu_3 = 0\} \rightarrow 1$. Поэтому, используя (2), (3) и (4), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\mu_2 = \xi_2\} &\rightarrow 1, \\ \mathbf{P}\{T - N + \mu_0 = \xi_2\} &\rightarrow 1, \\ \mathbf{P}\left\{\frac{T - \mu_1}{2} = \xi_2\right\} &\rightarrow 1.\end{aligned}$$

Значит, остальные утверждения теорем 2 и 3 вытекают из доказанных выше утверждений для случайной величины ξ_2 .

Теоремы 2 и 3 доказаны. $\square$

5. Доказательство леммы 2

Из формул (5), (6) следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\lambda(\bar{Z}))^2 &= \sum_{1 \leq i_1 < j_1 \leq T} \sum_{n_1=1}^N \sum_{k_1, l_1=1}^M p_{n_1}^{(k_1)} p_{n_1}^{(l_1)} \sum_{1 \leq i_2 < j_2 \leq T} \sum_{n_2=1}^N \sum_{k_2, l_2=1}^M p_{n_2}^{(k_2)} p_{n_2}^{(l_2)} \times \\ &\quad \times \mathbf{P}\{Z_{i_1} = k_1, Z_{j_1} = l_1, Z_{i_2} = k_2, Z_{j_2} = l_2\} = \\ &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6,\end{aligned}\tag{28}$$

где $S_1, \dots, S_6$ — аналогичные суммы по множествам индексов, для которых предполагается, что:

- в сумме S_1 выполнены равенства $i_1 = i_2, j_1 = j_2$,
- в сумме S_2 выполнены соотношения $i_1 = i_2, j_1 \neq j_2$,
- в сумме S_3 выполнены соотношения $i_1 \neq i_2, j_1 = j_2$,
- в сумме S_4 выполнены соотношения $j_1 = i_2$,
- в сумме S_5 выполнены соотношения $j_2 = i_1$,
- в сумме S_6 все числа i_1, i_2, j_1, j_2 различны.

Оценим эти частичные суммы. Начнем с S_1 . В этом случае

$$k_1 = k_2, \quad l_1 = l_2.$$

Поэтому, используя соотношения

$$p_{n_2}^{(l)} \leq p \quad \text{и} \quad \sum_{n_2=1}^M p_{n_2}^{(k)} = 1,$$

получаем:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{1 \leq i < j \leq T} \sum_{n_1=1}^N \sum_{k,l=1}^M p_{n_1}^{(k)} p_{n_1}^{(l)} \sum_{n_2=1}^M p_{n_2}^{(k)} p_{n_2}^{(l)} \mathbf{P}\{Z_i = k, Z_j = l\} < \\ &< p \sum_{1 \leq i < j \leq T} \sum_{k,l=1}^M \sum_{n_1=1}^N p_{n_1}^{(k)} p_{n_1}^{(l)} \mathbf{P}\{Z_i = k, Z_j = l\} = \\ &= p \mathbf{E} \xi_2. \end{aligned} \tag{29}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{1 \leq i < j_1 \leq T} \sum_{n_1=1}^N \sum_{k,l_1=1}^M p_{n_1}^{(k)} p_{n_1}^{(l_1)} \times \\ &\times \sum_{j_2: i < j_2 \neq j_1 \leq T} \sum_{n_2=1}^M \sum_{l_2=1}^M p_{n_2}^{(k)} p_{n_2}^{(l_2)} \mathbf{P}\{Z_i = k, Z_{j_1} = l_1, Z_{j_2} = l_2\} < \\ &< \sum_{1 \leq i < j_1 \leq T} \sum_{n_1=1}^N \sum_{k,l_1=1}^M p_{n_1}^{(k)} p_{n_1}^{(l_1)} \times \\ &\times \sum_{j_2: i < j_2 \neq j_1 \leq T} \left(\sum_{n_2=1}^M p_{n_2}^{(k)} \right) p \sum_{l_2=1}^M \mathbf{P}\{Z_i = k, Z_{j_1} = l_1, Z_{j_2} = l_2\} = \\ &= p \sum_{1 \leq i < j_1 \leq T} \sum_{n_1=1}^N \sum_{k,l_1=1}^M p_{n_1}^{(k)} p_{n_1}^{(l_1)} \sum_{j_2: i < j_2 \neq j_1 \leq T} \mathbf{P}\{Z_i = k, Z_{j_1} = l_1\} < \\ &< p T \sum_{1 \leq i < j_1 \leq T} \sum_{k,l_1=1}^M \sum_{n_1=1}^N p_{n_1}^{(k)} p_{n_1}^{(l_1)} \mathbf{P}\{Z_i = k, Z_{j_1} = l_1\} = \\ &= p T \mathbf{E} \xi_2. \end{aligned} \tag{30}$$

Аналогично выводятся оценки

$$S_u < p T \mathbf{E} \xi_2, \quad u = 3, 4, 5. \quad (31)$$

Оценим S_6 . В этом случае в области суммирования имеется шесть вариантов взаимного расположения величин i_1, j_1, i_2, j_2 на оси:

$$\begin{aligned} i_1 &< j_1 < i_2 < j_2, \\ i_1 &< i_2 < j_1 < j_2, \\ i_2 &< i_1 < j_1 < j_2, \\ i_1 &< i_2 < j_2 < j_1, \\ i_2 &< i_1 < j_2 < j_1, \\ i_2 &< i_1 < j_1 < j_2, \\ i_2 &< j_2 < i_1 < j_1. \end{aligned}$$

В соответствии с этим разобьем сумму S_6 на шесть частичных сумм:

$$S_6 = S_{6,1} + \dots + S_{6,6}. \quad (32)$$

Рассмотрим сумму $S_{6,1}$. Из определений следует, что

$$\sum_{j_2=i_2+1}^T \mathbf{P}\{Z_{j_2}=l_2 \mid Z_{i_1}=k_1, Z_{j_1}=l_1, Z_{i_2}=k_2\} \leq \sum_{s=1}^{T-i_2} (\pi_{l_2} + \varphi(s)).$$

Поэтому, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} S_{6,1} &= \sum_{i_1 < j_1 < i_2 < j_2} \sum_{n_1=1}^N \sum_{k_1, l_1=1}^M p_{n_1}^{(k_1)} p_{n_1}^{(l_1)} \times \\ &\quad \times \sum_{n_2=1}^N \sum_{k_2, l_2=1}^M p_{n_2}^{(k_2)} p_{n_2}^{(l_2)} \mathbf{P}\{Z_{i_1}=k_1, Z_{j_1}=l_1, Z_{i_2}=k_2, Z_{j_2}=l_2\} \leq \\ &\leq \sum_{i_1 < j_1 < i_2} \sum_{n_1=1}^N \sum_{k_1, l_1=1}^M p_{n_1}^{(k_1)} p_{n_1}^{(l_1)} \times \\ &\quad \times \sum_{n_2=1}^N \sum_{k_2, l_2=1}^M p_{n_2}^{(k_2)} p_{n_2}^{(l_2)} \mathbf{P}\{Z_{i_1}=k_1, Z_{j_1}=l_1, Z_{i_2}=k_2\} \sum_{s=1}^{T-i_2} (\pi_{l_2} + \varphi(s)). \end{aligned}$$

Далее, используя аналогичные рассуждения, показываем, что

$$\begin{aligned}
S_{6,1} &\leq \sum_{i_1 < j_1}^N \sum_{n_1=1}^M \sum_{k_1, l_1=1}^M p_{n_1}^{(k_1)} p_{n_1}^{(l_1)} \sum_{n_2=1}^N \sum_{k_2, l_2=1}^M p_{n_2}^{(k_2)} p_{n_2}^{(l_2)} \mathbf{P}\{Z_{i_1}=k_1, Z_{j_1}=l_1\} \times \\
&\quad \times \sum_{i_2=j_1+1}^{T-1} (\pi_{k_2} + \varphi(j_1 - i_2)) \sum_{j_2=i_2+1}^T (\pi_{l_2} + \varphi(s)) \leq \\
&\leq \dots \leq \\
&\leq \sum_{n_1=1}^N \sum_{k_1, l_1=1}^M p_{n_1}^{(k_1)} p_{n_1}^{(l_1)} \sum_{n_2=1}^N \sum_{k_2, l_2=1}^M p_{n_2}^{(k_2)} p_{n_2}^{(l_2)} \times \\
&\quad \times \sum_{i_1=1}^{T-3} \pi_{k_1} \sum_{j_1=i_1+1}^{T-2} (\pi_{l_1} + \varphi(j_1 - i_1)) \sum_{i_2=j_1+1}^{T-1} (\pi_{k_2} + \varphi(i_2 - j_1)) \sum_{j_2=i_2+1}^T (\pi_{l_2} + \varphi(j_2 - i_2)) \leq \\
&\leq P_2^2 \sum_{1 \leq i_1 < j_1 < i_2 < j_2 \leq T} (1 + Q\varphi(j_1 - i_1)) (1 + Q\varphi(i_2 - j_1)) (1 + Q\varphi(j_2 - i_2)) = \\
&= P_2^2 (C_T^4 + R_1) = \\
&= \frac{C_T^4}{(C_T^2)^2} \lambda_2 + P_2^2 R_1 \tag{33}
\end{aligned}$$

(напомним снова, что $Q = \max_k \pi_k^{-1}$), где

$$\begin{aligned}
0 \leq R_1 &= \sum_{1 \leq i_1 < j_1 < i_2 < j_2 \leq T} ((1 + Q\varphi(j_1 - i_1)) (1 + Q\varphi(i_2 - j_1)) (1 + Q\varphi(j_2 - i_2)) - 1) < \\
&< Q(1 + Q\varphi(1))^2 \sum_{1 \leq i_1 < j_1 < i_2 < j_2 \leq T} (\varphi(j_1 - i_1) + \varphi(i_2 - j_1) + \varphi(j_2 - i_2)) < \\
&< 3Q C_T^3 \sum_{s=1}^T (1 + Q\varphi(1))^2 \varphi(s) \leq \\
&\leq \frac{Q T^3}{2} (1 + Q\varphi(1))^2 \sum_{s=1}^T \varphi(s).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом показывается, что при всех $v = 1, \dots, 6$ выполнены оценки

$$S_{6,v} < \frac{C_T^4}{(C_T^2)^2} \lambda_2^2 + P_2^2 \frac{QT^3}{2} (1 + Q\varphi(1))^2 \sum_{s=1}^T \varphi(s). \quad (34)$$

Из (34) и (32) вытекает оценка

$$S_6 < \frac{(T-2)(T-3)}{T(T-1)} \lambda_2^2 + 3P_2^2 QT^3 (1 + Q\varphi(1))^2 \sum_{s=1}^T \varphi(s). \quad (35)$$

Из (28)–(31) и (35) следует неравенство

$$\mathbf{E}(\lambda(\bar{Z}))^2 < \lambda_2^2 + 3P_2^2 QT^3 (1 + Q\varphi(1))^2 \sum_{s=1}^T \varphi(s) + (4T+1)p.$$

С другой стороны, из следствия 1 вытекает неравенство

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}\lambda(\bar{Z}))^2 &= (\mathbf{E}\xi_2)^2 > \\ &> \lambda_2^2 - 2\lambda_2 P_2 QT \sum_{s=1}^T \varphi(s). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\lambda(\bar{Z}) &= \mathbf{E}(\lambda(\bar{Z}))^2 - (\mathbf{E}\xi_2)^2 < \\ &< \left(3P_2^2 QT^3 (1 + Q\varphi(1))^2 + 2\lambda_2 P_2 QT \right) \sum_{s=1}^T \varphi(s) + \\ &+ (4T+1)p. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_2 < P_2 T^2/2$, то из этого неравенства вытекает (25).

Лемма 2 доказана. $\square$

Автор признателен А. М. Зубкову за интерес к работе и ценные советы. Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Elliott R. J., Aggoun L., Moore J. B., *Hidden Markov Models*, N.-Y.: Springer-Verlag, 1995.
- [2] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*, М.: Наука, 1976.
- [3] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., *Независимые и стационарно связанные величины*, М.: Наука, 1965.
- [4] Михайлов В. Г., “О вероятности наличия в случайной последовательности цепочек с одинаковой структурой”, *Дискретная математика*, **28**:3 (2016), 97–110.
- [5] Barbour A. D., Holst L., Janson S., *Poisson Approximation*, Oxford: Oxford Univ. Press, 1992.