Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Смирнов, Слои конечного автомата, *Матем. вопр. криптогр.*, 2011, том 2, выпуск 1, 97–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk27>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:25:01

УДК 519.16

Слои конечного автомата

В. Г. Смирнов

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 22.IV.2010

В работе определены слои автомата, изучены их свойства и получены условия принадлежности состояний автомата его слоям. Введено понятие t -развертки графа инициального автомата как ориентированного графа с помеченными ребрами, с помощью которого задача перечисления прообразов отрезка выходной последовательности длины t сводится к построению графа решений системы уравнений k -значной логики. Предложен алгоритм построения графа решений указанной системы, трудоемкость которого пропорциональна числу вершин t -развертки.

Показано, что трудоемкость алгоритма может как полиномиально, так и экспоненциально зависеть от t .

Ключевые слова: конечные автоматы, полугруппы преобразований, граф переходов

Layers of a finite automaton

V. G. Smirnov

Academy of Cryptography of Russian Federation, Moscow

Abstract. Layers of automaton are defined, their properties are investigated and conditions for a state of automata to belong to a layer are found. A notion of t -unrollment of initial automaton graph is introduced as an oriented graph with marked edges; this notion is used for reduction the enumeration of preimages of the output sequence segment to the construction of graph of solutions for a system of k -valued logic equations. An algorithm for the construction of such graph with complexity proportional to the number of vertices of t -unrollment is designed. The complexity may depend on t polynomially or exponentially.

Key words: finite automata, semigroups of transforms, transition graph

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 97–118 (Russian).

© 2011 В. Г. Смирнов

§ 1. Введение

Задачи анализа конечного автомата приводят к необходимости изучения различных свойств его выходных последовательностей, последовательностей результирующих преобразований и состояний. При этом практический интерес представляет рассмотрение как регулярных, так и нерегулярных автоматов.

В увязке с анализом регулярных автоматов в [1] были исследованы такие параметры и объекты как слой, глубина и ширина группы относительно фиксированного порождающего множества.

Аналогичные понятия могут быть введены в рассмотрение и для состояний конечного, вообще говоря, нерегулярного автомата.

Далее рассматривается конечный автомат $A = (X, A, Y, q(x, a), h(x, a))$, где X, Y — входной и, соответственно, выходной алфавиты, A — множество состояний, функция переходов $q(x, a)$ определена на множестве $X \times A$ и принимает значения из множества A , функция выходов $h(x, a)$ определена на множестве $X \times A$ и принимает значения из множества Y .

Через $A(a_0) = (X, A, a_0, Y, q(x, a), h(x, a))$ обозначен инициальный автомат, получающийся из автомата A при фиксации начального состояния $a_0 \in A$.

Введём обозначения:

Z — кольцо целых чисел,

$X = Y = Z_k \subset Z$, где $Z_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k > 1$.

Пусть $q_x: a \rightarrow q(x, a)$ — преобразование множества A , задаваемое функцией $q(x, a)$ при фиксированном значении x .

Определим операцию умножения на множестве $Q = \{q_x | x \in X\}$, положив $q_y \cdot q_x: a \rightarrow q(x, q(y, a))$ для всех $x, y \in Z_k$. Относительно введенной операции множество Q порождает полугруппу F_A результирующих преобразований множества состояний автомата A , которую далее будем называть полугруппой автомата A . Элементы полугруппы F_A будем рассматривать как функции одного переменного, тогда операцией полугруппы служит суперпозиция функций, задаваемая соотношением:

$$(gf)(a) = g(f(a)), f, g \in F_A.$$

Положим $a \tau b$, если существуют такая последовательность состояний $a = a_1, \dots, a_s = b$ автомата A и такая последовательность знаков входного алфавита $x_1, \dots, x_{s-1}$, что для каждой пары a_i, a_{i+1} , $i = 1, \dots, s-1$, либо

$q_{x_i}(a_i) = a_{i+1}$, либо $q_{x_i}(a_{i+1}) = a_i$. Отношение τ , являющееся эквивалентностью, называют *отношением связности*. Если число классов эквивалентности отношения связности равно единице, то автомат называют *связным*.

Из определения инициального автомата следует, что автомат $A(a_0)$ является связным.

Графом переходов автомата A называют ориентированный помеченный граф G_A с множеством вершин A , в котором тогда и только тогда имеется ребро из a в b , помеченное меткой x , когда существует такое преобразование $q_x \in Q$, что $q_x(a) = b$.

Графом переходов инициального автомата $A(a_0)$ называют подграф орграфа G_A , задаваемый вершиной a_0 и множеством $F_A(a_0)$ достижимых из нее вершин.

Некоторые из рассматриваемых определений и утверждений о свойствах конечного автомата имеют аналоги на языке теории графов, на что указывают соответствующие ссылки.

Приведём краткое изложение содержания статьи.

В § 2 рассматриваются инвариантные множества и компоненты сильной связности автомата. Вводится отношение орбитной эквивалентности на множестве состояний автомата, определяется цикловой индекс для компонент сильной связности, изучаются его свойства.

В § 3 даются определения слоев и оболочки автомата, модуля однозначности состояний инициального автомата. Получены оценки глубины и периода слоёв автомата. В теореме 2.6 сформулированы условия принадлежности состояний автомата его слоям. Приводится интерпретация полученных результатов для случая регулярного автомата.

В § 4 вводится в рассмотрение t -развертка графа автомата, являющаяся Δ -графом в смысле статьи [6]. Вершины t -развертки уровня i совпадают с i -м слоем автомата A , $i = 1, \dots, t$. Показано, что задача перечисления множества возможных входных последовательностей инициального автомата $A(a_0)$ по выходу длины t сводится к построению *графа решений* некоторой системы уравнений k -значной логики. Предложен алгоритм построения графа решений указанной системы, трудоемкость которого пропорциональна числу вершин t -развертки автоматного графа.

Рассмотрены примеры, показывающие, что трудоемкость алгоритма может зависеть от t как полиномиально, так и экспоненциально.

Отмечено также, что применение более трудоемкого алгоритма из [8] позволяет построить граф решений системы по искаженной выходной последовательности.

§ 2. Инвариантные множества состояний и компоненты сильной связности автомата

2.1. Инвариантные множества состояний. Подмножество $N \subseteq A$ называют *инвариантным множеством состояний автомата A* , если $F_A(N) \subseteq N$.

Очевидно, что объединение и пересечение инвариантных множеств состояний — снова инвариантные множества.

Для любого подмножества $B \subseteq A$ множество

$$\text{St}(B) = \{f \in F_A, f(B) = B\}$$

называют *B -стабилизатором полугруппы F_A* . При $B = \{a\}$ множество $\text{St}(a)$ называют *стабилизатором состояния a полугруппы F_A* .

Непустое подмножество G элементов полугруппы F называется *нормальной подполугруппой*, если существует гомоморфизм φ полугруппы F на полугруппу с единицей S , при котором множество G является полным прообразом единицы [4].

Теорема 2.1. Если N — инвариантное множество состояний автомата A и $\text{St}(N) \neq \emptyset$, то $\text{St}(N)$ является нормальной подполугруппой полугруппы F_A .

Доказательство. Введём на полугруппе F_A отношение эквивалентности η_N , положив $f \eta_N g$ тогда и только тогда, когда для любой функции $h \in F_A$ соотношения $h \cdot f \in \text{St}(N)$, $h \cdot g \in \text{St}(N)$ выполняются только одновременно. Рассмотрим имеющиеся возможности.

1) Если $f, g \notin \text{St}(N)$, то $f(N) \cap N \subset N$, $g(N) \cap N \subset N$, следовательно, при любой функции $h \in F_A$ имеем $h \cdot f, h \cdot g \notin \text{St}(N)$.

2) Если $f, g \in \text{St}(N)$, то при любой функции $h \in F_A$ имеем $h(f(N)) = h(g(N))$, и соотношения $h \cdot f \in \text{St}(N)$, $h \cdot g \in \text{St}(N)$ выполняются только одновременно.

3) Если $f \in \text{St}(N)$, $g \notin \text{St}(N)$, то, положив $h = f$, получим $f \cdot f \in \text{St}(N)$, $f \cdot g \notin \text{St}(N)$, и $f \not\eta_N g$.

Следовательно, $f \eta_N g$ тогда и только тогда, когда или $f \notin \text{St}(N)$, $g \notin \text{St}(N)$, или $f \in \text{St}(N)$, $g \in \text{St}(N)$.

Очевидно, что эквивалентность η_N является конгруэнцией, содержащей либо два класса, если $F_A \neq \text{St}(N)$, либо один класс, если $F_A = \text{St}(N)$. В первом случае $F_A/\eta_N \cong S^{(0)}$, где $S^{(0)}$ — полугруппа, состоящая только из нуля и единицы. Второй случай тривиален, так как полугруппа F_A/η_N состоит из одного элемента. Полугруппа $\text{St}(N)$ оказывается во всех случаях полным прообразом единицы, т. е. нормальной подполугруппой. Теорема доказана.

2.2. Орбиты и орбитная эквивалентность. Минимальное инвариантное множество $O(a)$, содержащее состояние $a \in A$, назовем *орбитой* состояния a .

Из определения орбиты следует, что $O(a) = a \cup F_A(a)$.

Любое объединение орбит является инвариантным множеством. Верно и обратное: что любое инвариантное множество является объединением орбит.

Очевидно, автомат $A(a_0)$ совпадает с ограничением автомата A на множество $O(a_0)$.

Определение 2.1. Состояния $a, b \in A$ назовем орбитно эквивалентными ($a \sim_o b$), если $O(a) = O(b)$.

Отношение $\sim_o$ является отношением эквивалентности, легко проверить его рефлексивность, симметричность и транзитивность. Классы орбитной эквивалентности назовем *O-классами*.

Обозначим через $F(a, b)$ множество функций $f \in F_A$, удовлетворяющих условию $f(a) = b$. В частности, $\text{St}(a) = F(a, a)$.

Если $F(a, b) \neq \emptyset$, то положим $b <_d a$. В этом случае говорят, что состояние b *достижимо* из a [5].

Если $b <_d a$ и $a <_d b$, то состояния a, b называют *взаимно связанными*.

Следующие утверждения вытекают непосредственно из определения орбиты и орбитной эквивалентности.

1) $O(b) \subseteq O(a)$ тогда и только тогда, когда $b = a$ либо $b <_d a$.

2) $O(b) = O(a)$ тогда и только тогда, когда $b = a$ либо состояния a, b взаимно связаны.

3) $O(a) = F_A(a)$ тогда и только тогда, когда $\text{St}(a) \neq \emptyset$.

Введём обозначение O_a для множества состояний, орбитно эквивалентных состоянию a .

Лемма 2.1. Если $|O_a| > 1$, то $F(a, a) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $b \in O_a$, $b \neq a$. Тогда $F(b, a) \neq \emptyset$, $F(a, b) \neq \emptyset$, откуда вытекает утверждение леммы.

Следуя известному определению [например, 4], функции $f, g \in F_A$ назовём *R-эквивалентными* ($f \sim_R g$), если они порождают один и тот же главный правый идеал полугруппы F_A , т. е. если $F_A \cdot f \cup f = F_A \cdot g \cup g$.

Лемма 2.2. Из $f, g \in F_A$ и $f \sim_R g$ следует, что $O(f(a)) = O(g(a))$ для любого $a \in A$.

Доказательство. Из условий леммы вытекает существование таких функций $h, h' \in F_A$, что $h \cdot f = g$, $h' \cdot g = f$, откуда для любого $a \in A$ получаем $h(f(a)) = g(a)$, $h'(g(a)) = f(a)$, что доказывает утверждение леммы.

Лемма 2.3. Пусть $a \sim_O b$ и $f(a) = b$, где $f = q_{j_k} \cdot \dots \cdot q_{j_1}$. Тогда $q_{j_m} \cdot \dots \cdot q_{j_1}(a) \sim_O b$ для любого $m = 1, \dots, k$.

Доказательство. Невыполнение утверждения леммы ведёт к противоречию с условием $a \sim_O b$.

Назовем класс O_a *максимальным O -классом* (*минимальным O -классом*), если не существует такого класса O_b , что $O_b \supset O_a$ ($O_b \subset O_a$).

Введем обозначения $O_1^{(\min)}, \dots, O_s^{(\min)}$ для минимальных O -классов, $O_1^{(\max)}, \dots, O_t^{(\max)}$ для максимальных O -классов и положим

$$O^{(\min)}(A) = \bigcup_{j=1}^s O_j^{(\min)}, \quad O^{(\max)}(A) = \bigcup_{j=1}^t O_j^{(\max)}.$$

Для инициального автомата $A(a_0)$ имеем $O^{(\max)}(A(a_0)) = O(a_0)$, $O^{(\min)}(A(a_0)) = O^{(\min)}(A) \cap O(a_0)$.

Напомним, что минимальный двусторонний идеал полугруппы называют её *ядром*. Ядро полугруппы F_A обозначим K_{F_A} .

Лемма 2.4. Имеют место соотношения:

- 1) $O_a = O(a)$ тогда и только тогда, когда $a \in O^{(\min)}(A)$;
- 2) $O^{(\min)}(A) = K_{F_A}(A)$.

Доказательство. Если $a \notin O^{(\min)}(A)$, то существует такое состояние $b \in O(a)$, что $O(b) \subset O(a)$, следовательно, $O_a \neq O(a)$. Если $a \in O^{(\min)}(A)$, то не существует орбиты $O(b) \subset O(a)$, следовательно, $O_a = O(a)$. Первое утверждение доказано.

Если $f \in K_{F_A}$, то из свойств ядра полугруппы преобразований следует, что $f(A) = O_j^{(\min)}$ для некоторого $j \in \{1, \dots, s\}$. Обратно для каждого $j \in \{1, \dots, s\}$ найдётся функция $f \in K_{F_A}$, для которой $f(A) = O_j^{(\min)}$. Следовательно, $K_{F_A}(A) = O^{(\min)}(A)$. Лемма доказана.

2.3. Порождающие множества состояний. Для любого множества $B \subseteq A$ положим $O(B) = \bigcup_{b \in B} O(b)$.

Множество B , для которого $O(B) = A$, называют *порождающим множеством* состояний автомата A . Порождающее множество называется *минимальным*, если оно не содержит собственного подмножества, являющегося порождающим множеством [5].

Напомним, что подмножество T множества M , содержащее в точности один элемент из каждого класса эквивалентности ε на M , называется *трансверсалью множества M по модулю ε* [2].

Теорема 2.2. Множество $B \subseteq A$ тогда и только тогда является минимальным порождающим множеством состояний автомата A , когда B является трансверсалью классов орбитальной эквивалентности, принадлежащих множеству $O^{(\max)}(A)$.

Доказательство. Классы ограничения отношения эквивалентности $\sim_O$ на множество $O^{(\max)}(A)$ перечислены в разбиении $O^{(\max)}(A) = \bigcup_{j=1}^t O_j^{(\max)}$. Утверждение теоремы следует из определения орбитальной эквивалентности.

2.4. Компоненты сильной связности автомата. Каждое максимальное подмножество состояний автомата, в котором любые два состояния взаимно связаны, называют компонентой сильной связности.

Лемма 2.5. Множество $B \subseteq A$ тогда и только тогда является компонентой сильной связности, когда $\text{St}(b) \neq \emptyset$ и $B = O_b$ для любого $b \in B$.

Доказательство. Из определения 2.1 следует, что при $\text{St}(b) \neq \emptyset$ множество O_b является максимальным множеством, в котором все состояния взаимно связаны, т. е. компонентой сильной связности. Обратно, пусть B — компонента сильной связности. Тогда для любого $b \in B$ имеем $\text{St}(b) \neq \emptyset$, и если $a \in B$, то $O(a) = O(b)$, а в случае $a \notin B$ имеем $O(a) \neq O(b)$. Следовательно, $B = O_b$. Лемма доказана.

Обозначим через $C(A)$ множество состояний, являющееся объединением компонент сильной связности автомата. Соответственно, объединение компонент сильной связности автомата $A(a_0)$ обозначим $C(O(a_0))$. Очевидно, что $C(A) \cap O(a_0) = C(O(a_0))$.

Из леммы 2.5 следует, что

$$C(A) = \bigcup_{a, \text{St}(a) \neq \emptyset} O(a) = \{a \in A \mid \text{St}(a) \neq \emptyset\}.$$

В конечной полугруппе некоторая степень любого элемента f является идемпотентом, для которого используется обозначение e_f . Множество всех идемпотентов полугруппы F обозначим $E(F)$.

Если $f \in \text{St}(a)$, то из определения идемпотента e_f следует, что $e_f(a) = a$. Отсюда вытекает соотношение

$$C(A) = \bigcup_{e \in E(F)} e(A).$$

Из лемм 2.1, 2.5 следует, что множество $A \setminus C(A)$ состоит из состояний b , для которых $|O_b| = 1$, $\text{St}(a) = \emptyset$.

Состояния $a \in C(A)$ назовём цикловыми состояниями.

2.5. Цикловые индексы цикловых состояний автомата. Если $q_{x_n} \cdot q_{x_{n-1}} \cdot \dots \cdot q_{x_1} = f$, то будем говорить, что слово $q_{x_n} \dots q_{x_1}$ является записью длины n (в алфавите Q) функции $f \in F_A$.

Функции $f \in F_A$ поставим в соответствие множество натуральных чисел $\Lambda(f)$, состоящее из длин записей функции f в алфавите Q .

Состоянию $a \in C(A)$ поставим в соответствие множество натуральных чисел

$$Z(a) = \bigcup_{f \in \text{St}(a)} \Lambda(f).$$

Определение 2.2. Цикловым индексом состояния $a \in C(A)$ назовём число $\omega(a) = \text{НОД} \{z \mid z \in Z(a)\}$.

Множество $Z(a)$ замкнуто относительно сложения и, следовательно, содержит все числа, кратные $\omega(a)$, кроме, возможно, их конечного подмножества.

Лемма 2.6. Если $a \in C(A)$ и $a \sim_o b$, то $\omega(a) = \omega(b)$.

Доказательство. Если $|O_a| = 1$, то утверждение леммы тривиально. Пусть $|O_a| > 1$ и $a \neq b$. Так как $a \sim_o b$, то найдутся такие функции $f, g \in S$, что $f(a) = b, g(b) = a$. Тогда

$$g \cdot \text{St}(b) \cdot f \subseteq \text{St}(a), \quad f \cdot \text{St}(a) \cdot g \subseteq \text{St}(b),$$

откуда получаем:

$$Z(a) \supseteq \{\Lambda(gf), Z(b) + \Lambda(gf), Z(b) \supseteq \{\Lambda(fg), Z(a) + \Lambda(fg)\}.$$

Следовательно, $\omega(a) \mid \omega(b)$ и $\omega(b) \mid \omega(a)$, откуда вытекает справедливость утверждения леммы.

§ 3. Слои и оболочка автомата

3.1. Определение слоёв автомата. В мультипликативной полугруппе всех подмножеств полугруппы F_A множество Q порождает циклическую подполугруппу

$$\langle Q \rangle = \{Q, Q^2, \dots, Q^\rho, \dots, Q^{\rho+\omega-1}\}, \quad (3.1)$$

где $Q^\rho = Q^{\rho+\omega}$ — первое повторение в последовательности степеней множества Q [3]. Таким образом,

$$F_A = \bigcup_{i=1}^{\rho+\omega-1} Q^i.$$

Из определения умножения подмножеств следует, что множество Q^i , $1 \leq i \leq \rho + \omega - 1$, состоит из всех элементов полугруппы, записываемых хотя бы одним способом словом длины i в алфавите Q .

В соответствии с определениями из [2], числа ρ и ω назовём *циклической глубиной* и *периодом* циклической полугруппы $\langle Q \rangle$.

Автомату $A(a_0)$ и входной последовательности $x_1, \dots, x_t$ соответствуют три последовательности:

1) *последовательность результирующих преобразований*

$$f_1 = q_{x_1}, f_2 = q_{x_2} \cdot q_{x_1}, \dots, f_t = q_{x_t} \cdot q_{x_{t-1}} \cdot \dots \cdot q_{x_1}; \quad (3.2)$$

2) последовательность состояний автомата $A(a_0)$

$$a_0, a_1 = q_{x_1}(a_0), \dots, a_t = q_{x_t}(a_{t-1}); \quad (3.3)$$

3) выходная последовательность автомата $A(a_0)$

$$y_1 = h(a_0, x_1), y_2 = h(a_1, x_2), \dots, y_t = h(a_t, x_{t+1}). \quad (3.4)$$

Для $G \subseteq F_A, B \subseteq A$ положим $G(B) = \bigcup_{g \in G} \bigcup_{b \in B} g(b)$.

Последовательности

$$Q^j(A), Q^j(a_0), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

являются смешанными периодическими последовательностями. Очевидно, что

$$Q^j(A) = \bigcup_{a_0 \in A} Q^j(a_0). \quad (3.6)$$

Введем обозначения $\rho(A)$, $\rho(O(a_0))$ и $\omega(A)$, $\omega(O(a_0))$ для величин, определяемых первым повторением $Q^{\rho(A)}(A) = Q^{\rho(A) + \omega(A)}(A)$, соответственно, $Q^{\rho(a_0)}(a_0) = Q^{\rho(a_0) + \omega(O(a_0))}(a_0)$ в последовательностях (3.5).

Определение 3.1. 1) Для $j = 1, \dots, \rho(A) + \omega(A) - 1$ назовем j -м слоем автомата A множество $Q^j(A)$.

2) Для $j = 1, \dots, \rho(O(a_0)) + \omega(O(a_0)) - 1$ назовем j -м слоем инициального автомата $O(a_0)$ множество $Q^j(a_0)$.

3) Назовем число $\rho(A)$ глубиной, а число $\omega(A)$ — периодом слоев автомата A .

4) Назовем число $\rho(O(a_0))$ глубиной, а число $\omega(O(a_0))$ — периодом слоев автомата $A(a_0)$.

3.2. Оболочка автомата. Для каждого состояния $a \in A$ определим множество $O^*(a)$, положив

$$O^*(a) = \{b \in A \mid \text{существует такая функция } f \in F_A, \text{ что } f(b) = a\}.$$

Состояния $b \in O^*(a)$ назовем, аналогично [5], *обратно достижимыми* из a .

Очевидно, что из $a \sim b$ следует, что $O^*(a) = O^*(b)$, и $a \in O^*(a)$ тогда и только тогда, когда $a \in C(a)$.

Определение 3.2. Оболочкой множества состояний автомата A назовём множество

$$W(A) = \{a \mid \text{из } b \in O^*(a) \text{ следует, что } \text{St}(b) = \emptyset\}.$$

Данное определение допускает эквивалентную формулировку: $a \in W(A)$ тогда и только тогда, когда не существует состояния $b \in C(A)$, $O(b) \supseteq O(a)$.

Теорема 3.1. *Имеет место соотношение*

$$W(A) \cap \left(\bigcup_{j=\rho(A)}^{\rho(A)+\omega(A)-1} Q^j(A) \right) = \emptyset.$$

Доказательство. Пусть $a \in Q^j(A)$, $\rho(A) \leq j \leq \rho(A) + \omega(A) - 1$. Из свойств циклической полугруппы $\langle Q \rangle$ следует, что в этом случае найдутся такое состояние $b \in O^*(a)$ и такое преобразование $f = q_{x_t} \cdot q_{x_{t-1}} \cdot \dots \cdot q_{x_1}$, где $t > |A|$, что $f(b) = a$. Обозначим $f^{(j)} = q_{x_j} \cdot q_{x_{j-1}} \cdot \dots \cdot q_{x_1}$, $j = 1, \dots, t$. В последовательности $f^{(j)}(b)$, в силу условия $t > |A|$, найдутся повторения, например, $f^{(s)}(b) = f^{(r)}(b)$, $s < r$. Тогда $f^{(s)}(b) \in C(A)$, откуда следует, что $a \notin W(A)$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Если $t \geq \rho(A) + \omega(A) - 1$, то

$$\bigcup_{j=\rho(A)}^t Q^j(A) = A \setminus W(A).$$

Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из определения 3.2 и теоремы 3.1.

Пусть $W(A) \neq \emptyset$. Из $a \in W(A)$ вытекает, что $O_a = \{a\}$. Зададим частичный порядок на множестве $W(A)$, положив $a > b$ тогда и только тогда, когда $O(a) \supset O(b)$. Обозначим через $W^{(1)} = W^{(\max)}(A)$ множество максимальных элементов в $W(A)$, через $W^{(2)}$ — множество максимальных элементов в $W(A) \setminus W^{(1)}$, если $W(A) \setminus W^{(1)} \neq \emptyset$ и т. д. На некотором шаге $r(A) \geq 1$ получим непустое множество

$$W^{(r(A))} = W(A) \setminus \bigcup_{j=1}^{r(A)-1} W^{(j)},$$

не содержащее сравнимых элементов. Тогда

$$W(A) = \bigcup_{j=1}^{r(A)} W^{(j)}. \quad (3.7)$$

Если $W(A) = \emptyset$, то положим $r(A) = 0$.

Лемма 3.1. Множество $W^{(\max)}(A)$ содержит все состояния, не принадлежащие ни одному из слоев автомата.

Действительно, $a \in W^{(\max)}(A)$ тогда и только тогда, когда $O^*(a) = \emptyset$, т. е. $a \notin F_A(A)$. Справедливость утверждения леммы вытекает из определения слоев автомата.

Для $a \in A$ положим

$$L(a) = \bigcup_{b \in W^{(\max)}(A)} \bigcup_{f \in F(b,a)} \Lambda(f).$$

Из теоремы 3.1 и леммы 3.1 следует, что $L(a) = \emptyset$ при $a \in W^{(1)}(A)$ и множество $L(a)$ конечно при $a \in W(A) \setminus W^{(1)}(A)$. Во всех других случаях множество $L(a)$ счётное.

Для случая $a \in W(A) \setminus W^{(1)}(A)$ введем обозначение

$$l(a) = \max\{l \mid l \in L(a)\}.$$

Если $a \in W^{(1)}(A)$, то положим $l(a) = 0$.

Теорема 3.2. Тогда и только тогда $a \in W^{(i)}$, $i = 1, \dots, r(A)$, когда $l(a) = i - 1$.

Доказательство. Для $a \in W^{(1)}$ утверждение теоремы тривиально. Из определения множеств $W^{(i)}$, $i = 1, \dots, r(A)$, следует, что $W^{(i)} \subseteq Q(W^{(i-1)})$. Поэтому из справедливости утверждения теоремы для $a \in Q(W^{(i-1)})$ вытекает его справедливость для $a \in W^{(i)}$. Теорема доказана.

Оболочку автомата $A(a_0)$ обозначим $W(O(a_0))$.

Полученные результаты верны для автомата $A(a_0)$. В этом случае $W(O(a_0)) \neq \emptyset$, только если $a_0 \notin C(A)$, и тогда

$$W^{(\max)}(O(a_0)) = \{a_0\}.$$

При $a \neq a_0$ по определению инициального автомата имеем $F(a_0, a) \neq \emptyset$, следовательно, $L(a) \neq \emptyset$ и

$$L(a) = \bigcup_{f \in F(a_0, a)} \Lambda(f).$$

3.3. Значение периода и оценка глубины слоёв автомата.

Теорема 3.3. 1) Для периода слоев автомата A верно равенство

$$\omega(A) = \text{НОК}\{\omega(a), a \in C(A)\}.$$

2) Для глубины слоев автомата A верна оценка

$$\rho(A) \geq r(A).$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{\omega} = \text{НОК}\{\omega(a), a \in C(A)\}$. Если $a \in C(A)$, то из $a \in Q^s(A)$ следует, что $a \in Q^{s + \omega(a)}(A)$. Следовательно, для любого $s \geq \rho(A)$ и всех состояний $a \in Q^s(A) \cap C(A)$ имеем $\omega(a) \mid \tilde{\omega}$, откуда $Q^s(C(A)) = Q^{s + \tilde{\omega}}(C(A))$ и $\tilde{\omega} \mid \omega(A)$.

Покажем, что для $s \geq \rho(A)$ выполняется равенство $Q^s(A) = Q^{s + \tilde{\omega}}(A)$.

Если $a \in W(A)$, то согласно лемме 3.1 для $s \geq \rho(A)$ имеем $a \notin Q^s(A)$.

При $a \in C(A)$ равенство $Q^s(C(A)) = Q^{s + \tilde{\omega}}(C(A))$ уже установлено.

При $a \in A \setminus (C(A) \cup W(A))$ имеем $O^*(a) \cap C(A) \neq \emptyset$, и если $a \in Q^s(A)$, то найдется такое состояние $b \in O^*(a) \cap C(A)$, что $a \in Q^{s + \omega(b)}(A)$, следовательно, $Q^s(A \setminus (C(A) \cup W(A))) = Q^{s + \tilde{\omega}}(A \setminus (C(A) \cup W(A)))$. Окончательно, $Q^s(A) = Q^{s + \tilde{\omega}}(A)$, откуда и $\omega(A) = \tilde{\omega}$. Первое утверждение теоремы доказано.

Из теоремы 3.2 вытекает, что $Q^s(A) \cap W(A) \neq \emptyset$ при $s < r(A)$, а из теоремы 3.1 — что $Q^s(A) \cap W(A) = \emptyset$ при $s \geq r(A)$. Отсюда следует справедливость второго утверждения теоремы. Теорема доказана.

Для автомата $A(a_0)$ справедливы аналогичные результаты.

Следствие 3.2. 1) Для периода слоёв автомата $A(a_0)$ верно равенство

$$\omega(O(a_0)) = \text{НОК}\{\omega(a), a \in C(O(a_0))\}.$$

2) Для глубины слоёв автомата $A(a_0)$ верна оценка

$$\rho(O(a_0)) \geq r(O(a_0)).$$

3.4. Модуль однозначности состояний инициального автомата.

Определение 3.3. Множество L натуральных чисел, $|L| > 1$, принадлежит вычету $\mu \pmod{\theta}$, где $0 \leq \mu \leq \theta - 1$, если все числа $l \in L$ удовлетворяют сравнению $l \equiv \mu \pmod{\theta}$.

Положим

$$\theta(L) = \text{НОД}\{|l_1 - l_2| : l_1, l_2 \in L, l_1 \neq l_2\}.$$

Из определения 3.3 следует, что множество L принадлежит некоторому вычету $\mu \pmod{\theta}$ для всех делителей θ числа $\theta(L)$ и только для них.

Если $L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}$ — множества натуральных чисел, то легко видеть, что из $L^{(1)} \supseteq L^{(2)}$ следует, что $\theta(L^{(1)}) \mid \theta(L^{(2)})$, а из $L^{(1)} = L^{(2)} + L^{(3)}$ следует, что $\theta(L^{(1)}) \mid \theta(L^{(2)}), \theta(L^{(1)}) \mid \theta(L^{(3)})$.

Вычет, которому по $\pmod{\theta(L)}$ принадлежат числа $l \in L$, обозначим $\mu(L)$.

В случае $|L| = 1$ положим $\theta(L) = 1, \mu(L) = 0$.

Определение 3.4. Модулем однозначности состояния $a \in O(a_0)$, $O^*(a) \neq \emptyset$, назовем число $\delta(a) = \theta(L(a))$, а соответствующий вычет $\mu(a) = \mu(L(a))$ назовём *вычетом однозначности состояния* a .

Равенство $O^*(a) = \emptyset$ выполняется для состояния a_0 только при условии $a_0 \notin C(A)$. В этом случае $L(a_0) = \emptyset$. Если же $a_0 \in C(A)$, то

$$L(a_0) = Z(a_0), \delta(a_0) = \alpha(a_0), \mu(a_0) = 0.$$

Лемма 3.2. Если $a, b \in O(a_0), b <_d a$, то $\delta(b) \mid \delta(a)$.

Доказательство. Из условий леммы следует существование такой функции $f \in F_A$, что $f(a) = f(b)$. Для любой константы $s \in \Lambda(f)$ имеем

$$L(b) \supseteq L(a) + s = \bigcup_{l \in L(a)} (l + s);$$

отсюда вытекает справедливость утверждения леммы.

Следствие 3.3. Если $a \sim_o b$, то $\delta(a) = \delta(b)$.

Утверждение следствия вытекает из леммы 3.2 по соображениям симметрии.

Лемма 3.3. Если $a \in C(A)$ и $O(b) \subseteq O(a)$, то $\delta(b) \mid \alpha(a)$.

Из условия леммы следует, что $\text{St}(a) \neq \emptyset$, поэтому справедливо включение

$$L(b) \supseteq L(a) + Z(a),$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Следствие 3.4. Если $a \in O(a_0) \setminus W(O(a_0))$, то $\delta(a) \mid \alpha(O(a_0))$.

Утверждение следствия вытекает из леммы 3.3 и следствия 3.3.

Состояния $b \in O_a$, для которых $\mu(b) = \mu$, $0 \leq \mu \leq \delta(a) - 1$, объединим в подмножество $O_a^{(\mu)}$, так что

$$O_a = \bigcup_{\mu=0}^{\delta(a)-1} O_a^{(\mu)}. \quad (3.8)$$

Лемма 3.4. Если $a \in C(A)$, то в разложении (3.8) нет пустых множеств.

Доказательство. Пусть $a \in C(A)$, $f \in \text{St}(a)$ и $f = q_{j_k} \cdot \dots \cdot q_{j_1}$. По лемме 2.3 для любого $m = 1, \dots, k$ имеем $q_{j_m} \cdot \dots \cdot q_{j_1}(a) \in O_a$. Следовательно,

$$\nu(L(q_{j_m} \cdot \dots \cdot q_{j_1}(a))) \equiv \nu(L(a)) + m \pmod{\delta(a)},$$

откуда вытекает справедливость утверждения леммы.

3.5. Условия принадлежности слоям инициального автомата. В следующем утверждении даны условия принадлежности состояний $a \in O(a_0)$ слоям автомата $A(a_0)$ в зависимости от значений введенных выше параметров.

Теорема 3.4. 1) Если $a \in W(O(a_0))$, то $a \in Q^j(a_0)$ тогда и только тогда, когда $j \in L(a)$.

2) Если $a \in Q^{\rho(O(a_0))+j}(a_0)$, $j = 0, 1, \dots, \omega(O(a_0)) - 1$, то выполняется сравнение $\rho(O(a_0)) + j \equiv \nu(a) \pmod{\delta(a)}$.

3) Из условия $a \in C(O(a_0)) \cap Q^{\rho(O(a_0))+j}(a_0)$, $j = 0, 1, \dots, \omega(O(a_0)) - 1$, дополнительно следует, что для всех $s \equiv j \pmod{\omega(a)}$ имеем $a \in Q^{\rho(O(a_0))+k}(O(a_0))$.

4) Если $\delta(a) = \omega(a)$, то $a \in Q^{\rho(O(a_0))+j}(a_0)$ тогда и только тогда, когда $\rho(O(a_0)) + j \equiv \nu(a) \pmod{\delta(a)}$.

Доказательство. Утверждение 1) теоремы вытекает из определения множества $L(a)$.

2) Состояние $a \in Q^{\rho(O(a_0))+j}(O(a_0))$ тогда и только тогда, когда $\rho(a_0) + j \in L(a)$. Отсюда следует справедливость второго утверждения теоремы.

3) Если $l \in L(a)$, то $l + s\omega(a) \in L(a)$ для всех достаточно больших s . Отсюда следует справедливость третьего утверждения теоремы.

4) В случае $\delta(a) = \omega(a)$ последнее утверждение теоремы следует из второго и третьего утверждений.

3.6. Случай регулярного автомата. Автомат A называют регулярным, если полугруппа F_A является группой. В случае регулярного автомата $W(A) = \emptyset$, $A = C(A)$, отношение орбитной эквивалентности совпадает с отношением взаимной достижимости, каждая орбита является компонентой сильной связности, и для всех состояний $a \in A$ выполняется равенство $O_a = O(a)$. Все орбиты попарно не сравнимы, поэтому $O^{(\min)}(A) = O^{(\max)}(A)$.

Теорема 2.2 в случае регулярного автомата сводится к следующему утверждению.

Теорема 2.2'. Множество $B \subseteq A$ тогда и только тогда является минимальным порождающим множеством состояний регулярного автомата A , когда B является трансверсалью компонент сильной связности автомата A .

Так как в случае регулярного автомата $A = C(A)$, то для всех состояний $a \in A$ выполняются равенства $\omega(a) = \delta(a) = \omega(A)$, и теорема 3.4 сводится к следующему утверждению.

Теорема 3.4'. Состояние a автомата $A(a_0)$ тогда и только тогда принадлежит слову $Q^{\rho(O(a_0))+j}(a_0)$, когда $\rho(O(a_0)) + j \equiv \nu(a) \pmod{\omega(a)}$.

§ 4. О t -развёртке графа инициального автомата

4.1. Определение и основные свойства t -развертки графа автомата $A(a_0)$. Положим $Q^0(a_0) = a_0$.

Определение 4.1. Назовём t -разверткой графа переходов автомата $A(a_0)$ граф $R(t; a_0)$ с множеством вершин $V(t; a_0) = \bigcup_{i=0}^t \bigcup_{a \in Q^i(a_0)} (a, i)$, в котором вершины $(a, i), (b, j)$ тогда и только тогда соединены ребром с меткой $x \in Z_k$, ведущим из (a, i) в (b, j) , когда $i < t, j = i + 1$, и $q_x(a) = b$.

Из определения 4.1 следует, что t -развертка является ациклическим графом и может содержать параллельные ребра.

Отметим ряд свойств t -развертки.

1. Множество вершин графа $R(t; a_0)$ разбивается на $t + 1$ непересекающихся подмножеств:

$$V(t; a_0) = \bigcup_{i=0}^t V_i(a_0),$$

где $V_i(a_0) = \bigcup_{a \in Q^i(a_0)} (a, i)$ при $i \geq 0$.

2. Степень входа вершины $(a_0, 0)$ равна нулю. Степени входа остальных вершин графа $R(t; a_0)$ положительны.

3. Степени выхода вершин, принадлежащих множеству $V_t(a_0)$, равны нулю. Степени выхода остальных вершин равны k .

4. Множество $E(t; a_0)$ ребер графа $R(t; a_0)$ разбивается на t непересекающихся подмножеств:

$$E(t; a_0) = \bigcup_{i=1}^t E_i(a_0),$$

где множество $E_i(a_0)$ состоит из ребер с концом в вершине из множества $V_i(a_0)$. Ребра, исходящие из одной вершины, имеют попарно разные метки.

5. $|V_i(a_0)| = |Q^i(a_0)|, i = 0, \dots, t$.

6. $|E_i(a_0)| = k \cdot |V_i(a_0)|, i = 1, \dots, t$.

7. Любой путь максимальной длины (далее — *максимальный путь*) в графе $R(t; a_0)$ имеет длину t .

Множество всех максимальных путей в графе $R(t; a_0)$ обозначим $\Theta(t; a_0)$.

Назовем Δ -подграфом графа $R(t; a_0)$ каждый его подграф G , являющийся объединением непустого множества путей $T \in \Theta(t; a_0)$, причем ребра подграфа сохраняют присвоенные им метки.

Множество максимальных путей Δ -подграфа G обозначим $\Theta(G)$.

Так как положительные степени выхода вершин графа $R(t; a_0)$ равны k , а положительные степени выхода вершин Δ -подграфа G меньше или равны k , то согласно определению 2.1 из [6] имеем $R(t; a_0) \in B_t^{(k)}$, $G \in \Delta_t^{(k)}$.

4.2. Модуль $Z(t, a_0)$ дискретных функций. Аналогично [6] определим взаимно однозначное отображение $\Gamma: \Theta(t; a_0) \rightarrow Z_k^t$, при котором пути $T \in \Theta(t; a_0)$ соответствует t -последовательность $x^{(t)} = (x_1, \dots, x_t)$ меток принадлежащих ему рёбер. Через $T(x_1, \dots, x_t)$ обозначим путь $T \in \Theta(t; a_0)$, для которого $\Gamma(T) = (x_1, \dots, x_t)$.

Введем обозначения Φ_t для множества функций $g(x_1, \dots, x_t): Z_k^t \rightarrow Z$, и $\Phi_t^{(k)} \subseteq \Phi_t$ для множества функций $g(x_1, \dots, x_t): Z_k^t \rightarrow Z_k$, называемых функциями k -значной логики [9].

Реберной функцией графа $R(t; a_0)$, соответствующей ребру $e \in E(t; a_0)$, назовём функцию $\varphi_e(x^{(t)}) \in \Phi_t$, задаваемую соотношением

$$\varphi_e(x^{(t)}) = \begin{cases} 1, & e \in \Gamma^{-1}(x^{(t)}), \\ 0, & e \notin \Gamma^{-1}(x^{(t)}). \end{cases}$$

Заметим, что при $e \in E_i(a_0)$ функция φ_e существенно зависит только от переменных из множества $x_1, \dots, x_i$.

Множество всех линейных комбинаций реберных функций графа $R(t; a_0)$ с коэффициентами из кольца Z образует Z -модуль, который обозначим $Z(t; a_0)$.

Применив теорему 2.1 из [6], получим

$$\dim Z(t; a_0) = 1 + (k-1) \cdot \sum_{i=0}^{t-1} |Q^i(a_0)|.$$

Функции из множества $Z(t; a_0)$ назовем *R -функциями*. Функции из множества $Z(t; a_0) \cap \Phi_n^{(k)}$ назовем *(R, k) -функциями*.

Каждая R -функция может быть задана коэффициентами $c_e^f \in Z$ линейной формы:

$$f(x^{(t)}) = \sum_{e \in E(t; a_0)} c_e^f \varphi_e(x^{(t)}), \quad (4.1)$$

где $x^{(t)} \in Z_k^t$, причем такое задание не является единственным.

Присвоим ребру $e \in E(t; a_0)$ вес c_e^f . Весом $w(T, f)$ пути $T \in \Theta(t; a_0)$ назовем сумму весов принадлежащих пути ребер. Из (4.1) следует соотношение $f(x^{(n)}) = w(\Gamma^{-1}(x^{(n)}), f)$. Следовательно, значение $w(T, f)$ не зависит от вида задания (4.1).

Два ребра графа $R(t; a_0)$ назовем не сравнимыми, если не существует пути $T \in \Theta(t; a_0)$, содержащего эти ребра.

Назовем R -функцию $f(x^{(n)})$ *ортогонально разложимой*, если ее можно представить в виде

$$f(x^{(n)}) = \sum_{e \in E} c_e^f \varphi_e(x^{(n)}),$$

где E — множество попарно не сравнимых ребер графа $R(t; a_0)$.

Ортогонально разложимые (R, k) -функции назовём (R, k, o) -функциями.

Как следует из определения 4 и теорем 4.2, 4.3 статьи [7], если $f(x^{(n)})$ является (R, k, o) -функцией, то для любого $b \in Z_k$ функция $f(x^{(n)}) + b$ также является (R, k, o) -функцией.

4.3. Граф решений R -системы дискретных уравнений. Каждому непустому множеству $B \subseteq Z_k^t$ поставим в соответствие следующий Δ -подграф графа $R(t; a_0)$:

$$H(B) = \bigcup_{b^{(t)} \in B} \Gamma^{-1}(b^{(t)}).$$

Граф $H(B)$ может содержать максимальные пути, не принадлежащие множеству B . Выделяя случаи, когда этого не происходит, множество B назовём *R -замкнутым множеством*, если $B = \Theta(H(B))$.

Назовем *R -системой дискретных уравнений* систему уравнений S , заданную соотношениями

$$f_j(x^{(t)}) = a_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.2)$$

если $f_j(x^{(t)}) \in Z(t; a_0)$, $a_j \in Z$, $j = 1, \dots, m$.

Графом решений R -системы уравнений S назовём Δ -подграф $G(S)$ графа $R(t; a_0)$, удовлетворяющий условию $\Gamma(\Theta(G)) = \text{sol}(S)$.

Из принятых определений следует, что граф решений R -системы S существует тогда и только тогда, когда система совместна и множество $\text{sol}(S)$ является R -замкнутым.

Из теоремы 4.1 статьи [6] вытекает, что множество решений совместной однородной R -системы является R -замкнутым.

Систему уравнений S назовём (R, k, o) -системой, если для $j = 1, \dots, m$ функции $f_j(x^{(t)})$, являются (R, k, o) -функциями и $a_j \in Z_k$.

Как показано в [7], из свойств ортогонально разложимых функций вытекает, что при произвольных значениях правых частей $a_j \in Z_k, j = 1, \dots, m$, однородная (R, k, o) -система S' , заданная соотношениями

$$f_j(x^{(t)}) -_k a_j = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.3)$$

равносильна (R, k, o) -системе S , заданной соотношениями (4.2).

Трудоемкость метода решения (R, k, o) -системы S , заданной соотношениями (4.2), использующего переход к однородной R -системе, заданной соотношениями (4.3) с последующим применением алгоритма построения графа решений из [6], имеет порядок $m \sum_{i=0}^{t-1} |Q^i(a_0)|$ условных операций; такая

же оценка справедлива для необходимого объема памяти.

Отметим, что предложенный в [8] вариант построения графа решений (R, k, o) -системы имеет те же оценки трудоемкости и объема памяти, но позволяет при наличии искажений в правой части находить те решения заведомо совместной (R, k, o) -системы, которые минимизируют ее невязку.

4.4. Определение входа инициального автомата по известному выходу. Рассмотрим стандартную для криптографического анализа задачу: по известной выходной последовательности (3.4) автомата $A(a_0)$ перечислить все возможные входные последовательности.

Для $i = 1, \dots, t$ определим отображения $h_i(e): E_i(a_0) \rightarrow Z_k$, положив $h_i(e) = h(a, x)$, если ребро e исходит из вершины $a \in V_{i-1}(a_0)$ и имеет метку x .

Определим функции $g_i(x^{(n)}), i = 1, \dots, t$, положив

$$g_i(x^{(n)}) = \sum_{e \in E_i(a_0)} h_i(e) \cdot \varphi_e(x^{(n)}). \quad (4.4)$$

Так как ребра графа $R(t; a_0)$, принадлежащие множеству $E_i(a_0)$, попарно не сравнимы, функции (4.4) являются (R, k, o) -функциями. В этом случае для любого $y \in Z_k$ имеем

$$y = \sum_{e \in E_i(a_0)} y \varphi_e(x^{(n)}),$$

откуда получаем

$$g_i(x^{(n)}) -_k y = \sum_{e \in E_i(a_0)} (h_i(e) -_k y) \cdot \varphi_e(x^{(n)}),$$

следовательно, $g_i(x^{(n)}) -_k y \in Z(t, a_0) \cap \Phi_n^{(k)}$.

Последовательности (3.4) соответствует следующая (R, k, o) -система уравнений $S(A)$, связывающая вход и выход автомата:

$$\sum_{e \in E_i(a_0)} (h_i(e) -_k y_i) \cdot \varphi_e(x^{(n)}) = 0, \quad i = 1, \dots, t.$$

Следовательно, существует граф решений совместной системы $S(A)$, для построения которого можно использовать алгоритмы из [6] или [8].

4.5. Прямой алгоритм построения графа решений системы $S(A)$.

В случае отсутствия искажений можно предложить более эффективный, чем упомянутые выше, алгоритм построения графа решений, использующий специфику системы $S(A)$, а именно — ее трапецеидальный вид.

Алгоритм 4.1. Исходные данные: выходная последовательность (3.4) автомата $A(a_0)$.

Предварительный этап. Каждому ребру $e \in E_i(a_0)$ графа $R(t; a_0)$, $i = 1, \dots, t$ присвоим вес $h_i(e)$.

I. Прямой ход алгоритма.

Шаг 0. Полагаем $V_1^{(0)} = \{(a_0, 0)\}$.

Шаг 1. Образует и запоминаем множество $E_1^{(1)}$ ребер графа $R(t; a_0)$ с весом y_1 , исходящих из вершины $(a_0, 0)$, и множество $V_1^{(1)}$ вершин графа $R(t; a_0)$, являющихся концами ребер из множества $E_1^{(1)}$.

Если $E_1^{(1)} = \emptyset$, то система несовместна. Если $E_1^{(1)} \neq \emptyset$, то переходим к шагу 2.

.....

Шаг j , $j = 2, \dots, t-1$. Образует и запоминаем множество $E_1^{(j)}$ ребер графа $R(t; a_0)$ с весом y_j , исходящих из вершин множества $V_1^{(j-1)}$, и множество $V_1^{(j)}$ вершин графа $R(t; a_0)$, являющихся концами ребер из множества $E_1^{(j)}$. Если $E_1^{(j)} = \emptyset$, то система несовместна. Если $E_1^{(j)} \neq \emptyset$, то переходим к шагу $j+1$.

Шаг t . Образует и запоминаем множество $E_1^{(t)}$ ребер графа $R(t; a_0)$ с весом y_t , исходящих из вершин множества $V_1^{(t-1)}$, и множество $V_1^{(t)}$ вершин графа $R(t; a_0)$, являющихся концами ребер из множества $E_1^{(t)}$. Если $E_1^{(t)} = \emptyset$, то система несовместна. Если $E_1^{(t)} \neq \emptyset$, то система совместна, и построен подграф G_1 графа $R(t; a_0)$ с множеством вершин $V(G_1) = \bigcup_{j=0}^t V_1^{(j)}$, и множест-

вом ребер $E(G_1) = \bigcup_{j=1}^t E_1^{(j)}$.

II. Обратный ход алгоритма.

Шаг 0. Полагаем $V^{(t)} = V_1^{(t)}$.

Шаг 1. Удалив из множеств $V_1^{(t-1)}$, $E_1^{(t-1)}$ вершины с нулевой полустепенью выхода и инцидентные им ребра, получаем множества $V^{(t-1)}$, $E^{(t-1)}$.

.....

Шаг j , $j = 2, \dots, t-1$. Удалив из множеств $V_1^{(t-j)}$, $E_1^{(t-j)}$ вершины с нулевой полустепенью исхода и инцидентные им ребра, получаем множества $V^{(t-j)}$, $E^{(t-j)}$.

Шаг t . Полагаем $V(0) = \{a_0\}$.

В результате построен граф $G(S(A))$ с множеством вершин $V(G(S(A))) = \bigcup_{j=0}^t V^{(j)}(a_0)$ и множеством ребер $E(G(S(A))) = \bigcup_{j=1}^t E^{(j)}(a_0)$, являющийся графом решений системы $S(A)$.

В ходе реализации алгоритма необходимо запомнить граф $R(t; a_0)$, метки и веса его ребер, а во время прямого и обратного хода алгоритма последовательно осуществлять преобразования непересекающихся подмножеств вершин и ребер графа $R(t; a_0)$. Следовательно, трудоемкость $T(t)$ алгоритма 4.1 и необходимый объем памяти оцениваются величинами, имеющими порядок $O(V(R(t; a_0)))$.

4.6. Два примера. Как показано выше, трудоемкость построения графа решений R -системы дискретных уравнений линейно зависит от числа вершин t -развертки графа переходов автомата $A(a_0)$. Следующие два примера приводятся для иллюстрации того факта, что число вершин t -развертки при $t \leq \rho(A) + \alpha(A) - 1$ может как экспоненциально (первый пример), так и полиномиально (второй пример) зависеть от t .

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим автомат

$$\begin{aligned} A_1(a_0^{(m)}) &= (X, A_1, a_0^{(m)}, Y, q^{(1)}, h^{(1)}), \text{ где } X = Y = Z_k, A_1 = Z_k^m, \\ q_x^{(1)}(a_1, \dots, a_m) &= (a_2, \dots, a_m, x) \text{ для } (a_1, \dots, a_m) \in A_1, x \in Z_k, \\ h^{(1)}(a^{(m)}, x) &: \text{GF}(k)^m \rightarrow Z_k \text{ — произвольная функция } k\text{-значной логики.} \end{aligned}$$

По входной последовательности $x_i, i = 1, \dots, t$, определяются состояния $a_i^{(m)} = q_{x_i}^{(1)}(a_{i-1}^{(m)})$ автомата и вычисляются знаки выходной последовательности

$$h^{(1)}(a_i^{(m)}) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, t. \quad (4.5)$$

Легко видеть, что автомат A_1 является регулярным автоматом с одной компонентой сильной связности, поэтому $O(a_0^{(m)}) = A_1$.

При $k = 2$ автомат A_1 совпадает с кодирующим устройством, рассмотренным в [10].

Положим $a_0^{(m)} = (b_1, \dots, b_m) \in Z_k^m$.

Слоями автомата $A_1(a_0^{(m)})$ являются следующие множества:

$$\begin{aligned} Q(a_0^{(m)}) &= \{(b_2, \dots, b_m, x_1), x_1 \in Z_k\}, \\ Q^2(a_0^{(m)}) &= \{(b_3, \dots, b_m, x_1, x_2), (x_1, x_2) \in Z_k^2\}, \\ &\dots \dots \dots \\ Q^{m-1}(a_0^{(m)}) &= \{(b_m, x_1, \dots, x_{m-1}), (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Z_k^{m-1}\}, \\ Q^m(a_0^{(m)}) &= A_1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\rho(O(a_0^{(m)})) = m-1$, $\omega(O(a_0^{(m)})) = 1$, $|Q^j(a_0^{(m)})| = k^j$,
 $j = 1, \dots, m$; $|V(R_1(t; a_0^{(m)}))| = \frac{k^{t+1}-1}{k-1}$.

Трудоёмкость построения графа решений системы уравнений (4.5) алгоритмом 4.1 при $t \leq \rho(A) + \omega(A) - 1$ имеет порядок $T_1(t) = O(k^t)$.

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим нелинейный автомат $A_2(a_0^{(m)})$, построенный на основе регистра U с линейной обратной связью над полем $\text{GF}(p)$, где p — простое число. Количество сдвигов регистра U в каждом такте зависит от знака входной последовательности.

Примем обозначения:

$A_2(a_0^{(m)}) = (X^{(2)}, A_2, a_0^{(m)}, Y^{(2)}, q^{(2)}, h^{(2)})$, где $X^{(2)} = Y^{(2)} = Z_p$, $A_2 = \text{GF}(p)^m$;

U — матрица линейного преобразования максимального периода векторного пространства $\text{GF}(p)^m$, реализуемого регистром U автомата;

для $a^{(m)} \in A_2$, $x \in Z_p$ имеем $q_x^{(2)}(a^{(m)}) = a^{(m)} \cdot U^{x+1}$;

$h^{(2)}(a^{(m)}): \text{GF}(p)^m \rightarrow Z_p$ — функция выхода автомата.

По входной последовательности x_i , $i = 1, \dots, t$, определяются состояния $a_i^{(m)} = a_{i-1}^{(m)} \cdot U^{x+1}$ автомата и вычисляются знаки выходной последовательности

$$h^{(2)}(a_0^{(m)} \cdot U^{i+\sigma(i)}) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, t. \quad (4.6)$$

где $\sigma(i) = \sum_{j=1}^i x_j$.

Легко видеть, что автомат A_2 является регулярным автоматом с двумя компонентами сильной связности: $\{0^{(m)} = (0, \dots, 0)\}$ и $\{\text{GF}(p)^m \setminus 0^{(m)}\}$. При $a_0^{(m)} \neq 0^{(m)}$ имеем $O(a_0^{(m)}) = \text{GF}(p)^m \setminus 0^{(m)}$.

Слоями автомата $A_2(a_0^{(m)})$, $a_0^{(m)} \neq 0^{(m)}$, являются следующие множества:

$$Q(a_0^{(m)}) = \{a_0^{(m)} \cdot U, \dots, a_0^{(m)} \cdot U^p\},$$

.....

$$Q^i(a_0^{(m)}) = \{a_0^{(m)} \cdot U^j \mid i \leq j \leq ip\}.$$

Легко убедиться в том, что:

$$\omega(O(a_0^{(m)})) = 1; \rho(O(a_0^{(m)})) = \left\lceil \frac{2^n - 2}{p-1} \right\rceil;$$

$$|Q^i(a_0^{(m)})| = i(p-1) + 1 \text{ (при } i < \frac{2^n - 2}{p-1});$$

$$|Q^i(a_0^{(m)})| = 2^n - 1 \text{ (при } i \geq \frac{2^n - 2}{p-1});$$

$$|V(R_1(t; a_0^{(m)}))| = (p-1) \frac{t(t+1)}{2} + t + 1 \text{ (при } i < \frac{2^n - 2}{p-1}).$$

Трудоёмкость построения графа решений системы уравнений (4.6) алгоритмом 4.1 при $t \leq \rho(A) + \alpha(A) - 1$ имеет порядок $T_2(t) \approx O(t^2)$.

Список литературы

1. Глухов М. М. О числовых параметрах, связанных с заданием конечных групп системами образующих элементов. — Труды по дискретной математике, т. 1, М.: ТВП, 1997, с. 43–66.
2. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. — М.: Мир, 1985.
3. Ляпин Е. С. Полугруппы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1960.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, т. 1. — М.: Мир, 1972.
5. Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1968.
6. Смирнов В. Г. Методы построения графов решений для систем k -значных уравнений. — Труды по дискретной математике, т. 8, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, с. 253–280.
7. Смирнов В. Г. Методы решения систем дискретных уравнений, основанные на построении графа решений. — Труды по дискретной математике, т. 9, М.: Гелиос АРВ, 2006, с. 308–339.
8. Смирнов В. Г. Методы решения систем квазисимметрических уравнений и их применение к анализу генераторов с управляемым движением. — Математические вопросы криптографии, 2010, т. 1, № 3, с. 67–91.
9. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
10. Сумароков С. Н. Запреты двоичных функций и обратимость для одного класса шифрующих устройств. — Обозр. прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, вып. 1, с. 33–55.