Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Условная предельная теорема для близких к критическим ветвящихся процессов с финальным типом частиц, *Матем. вопр. криптогр.*, 2018, том 9, выпуск 4, 53–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:47:33

**Условная предельная теорема
для близких к критическим ветвящимся
процессам с финальным типом частиц**

В. А. Вату́тин

Математический институт им В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва

Получено 18.IV.2018

Аннотация. Доказана предельная теорема о распределении числа частиц в близких к критическому ветвящимся процессах с финальным типом частиц при условии невырождения таких процессов к далекому моменту времени.

Ключевые слова: разложимый ветвящийся процесс, финальный тип частиц, размер популяции, условная предельная теорема

Conditional limit theorem for the near critical branching processes with final type of particles

V. A. Vatutin

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow

Abstract. A limit theorem is proved for the distribution of the number of particles in the near critical branching processes with final type of particles conditioned on the survival of the processes up to a distant moment.

Key words: decomposable branching process, final type of particles, population size, conditional limit theorem

1. Введение

При анализе трудоемкости ряда переборных алгоритмов используются свойства некоторых характеристик метода балансировки времени-памяти-данных с особыми точками. При этом в качестве вероятностной модели алгоритмов используются близкие к критическим ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона (см., например, [16–18], причем заключения о характеристиках упомянутых алгоритмов основываются на асимптотических свойствах распределений случайных величин, зависящих как от числа частиц, существующих в ветвящемся процессе Гальтона–Ватсона в фиксированный момент времени, так и от общего числа частиц, появившихся в процессе до момента его вымирания.

В данной работе рассматривается задача анализа свойств таких случайных величин в рамках более общего подхода. А именно, нас будут интересовать разложимые ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона с двумя типами частиц. Точнее, при каждом $m = 1, 2, \dots$ будем рассматривать ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона $(Z^{(m)}(n), Y^{(m)}(n))$, $n = 0, 1, 2, \dots$, с двумя типами частиц, где $Z^{(m)}(n)$ и $Y^{(m)}(n)$ — количества частиц соответственно первого и второго типов в n -м поколении m -го процесса. Будем предполагать, что частицы первого типа имеют единичную продолжительность жизни и в момент гибели производят как потомков первого типа, так и потомков второго типа, а частицы второго типа бессмертны и после момента рождения не изменяются и не порождают потомков. Согласно устоявшейся терминологии (см., например, монографию Б. А. Севастьянова [13, гл. V],) будем называть частицы второго типа также частицами финального типа или просто финальными. Обозначим через

$$f_m(z, y) := \mathbf{E} \left[z^{\xi_m} y^{\eta_m} \right], \quad z, y \in [0, 1],$$

производящую функцию чисел потомков частиц первого типа в процессе с индексом m , где ξ_m, η_m — количества непосредственных потомков первого и второго типов, порождаемых частицей первого типа в конце жизни. Положим также

$$f_m(z) := \mathbf{E} \left[z^{\xi_m} \right].$$

В дальнейшем предполагается, что распределение случайной величины ξ_m решетчато с единичным шагом, причем

$$A_m := \mathbf{E}\xi_m > 0, \quad 2B_m := \mathbf{E}[\xi_m(\xi_m - 1)] \in (0, \infty), \quad L_m := \mathbf{E}\eta_m \in (0, \infty) \quad (1)$$

и, если не оговорено иное, что $Z^{(m)}(0) = 1, Y^{(m)}(0) = 0$.

Введем производящую функцию чисел частиц нефинального и финального типов в момент n в процессе с индексом m , начавшемся в нулевой момент времени с одной частицы нефинального типа:

$$F^{(m)}(n; z, y) := \mathbf{E} \left[z^{Z^{(m)}(n)} y^{Y^{(m)}(n)} \mid Z^{(m)}(0) = 1, Y^{(m)}(0) = 0 \right]. \quad (2)$$

Ясно, что

$$\mathbf{E} \left[Z^{(m)}(n) \right] = \frac{\partial F^{(m)}(n; z, 1)}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \mathbf{E} \left[Y^{(m)}(n) \right] = \frac{\partial F^{(m)}(n; 1, y)}{\partial y} \Big|_{y=1}.$$

Наша цель – доказать условную предельную теорему о совместном распределении компонент вектора $(Z^{(m)}(n), Y^{(m)}(n))$ при условии невырождения процесса $Z^{(m)}(n)$ к далекому моменту n и определенных ограничениях на характер изменения при $n, m \rightarrow \infty$ параметров, вошедших в условие (1).

Введем функции

$$\begin{aligned} F^{(m)}(n; z) &:= F^{(m)}(n; z, 1) = \mathbf{E} \left[z^{Z^{(m)}(n)} \mid Z^{(m)}(0) = 1 \right], \\ F^{(m)}(n) &:= F^{(m)}(n; 0) = \mathbf{P} \left(Z^{(m)}(n) = 0 \mid Z^{(m)}(0) = 1 \right), \\ Q^{(m)}(n; z) &:= 1 - F^{(m)}(n; z), \\ Q^{(m)}(n) &:= Q^{(m)}(n; 0) = \mathbf{P} \left(Z^{(m)}(n) > 0 \mid Z^{(m)}(0) = 1 \right). \end{aligned}$$

В последующем изложении для упрощения обозначений иногда будем писать $f(z, y)$, $f(z)$ и $F(n; z, y)$ вместо $f_m(z, y)$, $f_m(z)$ и $F^{(m)}(n; z, y)$, опуская индекс m , если конкретное значение параметра m не имеет существенного значения. В частности, $F(n; z)$, $Q(n)$ и A, B, L следует понимать, соответственно, как $F^{(m)}(n; z)$, $Q^{(m)}(n)$ и A_m, B_m, L_m . Кроме того, через $K, K_1, K_2, \dots$ будем обозначать положительные константы, не обязательно совпадающие в разных формулах.

Для $t \geq 0$ положим

$$H(t; A) := \begin{cases} \frac{A^t - 1}{A - 1}, & \text{если } A \neq 1, \\ t, & \text{если } A = 1, \end{cases}$$

и для $a \in (-\infty, \infty)$ введем функцию

$$h(a) := \begin{cases} \frac{e^a - 1}{a}, & \text{если } a \neq 0, \\ 1, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что если $n(A-1) \rightarrow a \in (-\infty, +\infty)$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(n; A)}{n} = h(a). \quad (3)$$

Для $t \in [0, \infty)$ и параметров B и L положим

$$g_1(t, \lambda) := \frac{\lambda}{BH(t; A)}, \quad G_1(t, \lambda) := \max\{1 - g_1(t, \lambda), 0\}, \quad (4)$$

$$g_2(t, \lambda) := \frac{e^a \lambda^2}{BH^2(t; A)L}, \quad G_2(t, \lambda) := \max\{1 - g_2(t, \lambda), 0\}, \quad (5)$$

$$g_0(t, \lambda) := \frac{BH(t; A)}{A^t \lambda} = \frac{1}{A^t} \frac{1}{g_1(t, \lambda)}, \quad (6)$$

и пусть $g_i(t) := g_i(t; 1), i = 1, 2, 3$.

Введем класс $\mathcal{K}(b_0, c_0, l_0)$ вероятностных производящих функций $f(z, y)$, $z, y \in [0, 1]$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial z^2} \geq b_0 > 0, \quad \frac{\partial^3 f(1, 1)}{\partial z^3} \leq c_0 < \infty, \quad 0 < l_0 \leq \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y}.$$

В формулировке основного результата статьи используются область

$$\mathcal{D}_n := \{(z, y) : 0 < n(1 - z) < V_1, 0 < n^2(1 - y) < V_2\},$$

где V_1 и V_2 — фиксированные положительные константы, и последовательность функций $\{f_m(z, y) \in \mathcal{K}(b_0, c_0, l_0), m = 1, 2, \dots\}$, элементы которой представляются в виде

$$1 - f_m(z, y) = A_m(1 - z) - b_m(z)(1 - z)^2 + l_m(z, y)(1 - y). \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть все элементы последовательности $\{f_m(z, y), m = 1, 2, \dots\}$ вида (7) удовлетворяют условию (1). Если при $n \rightarrow \infty$ и $m = m(n) \rightarrow \infty$

$$n(A_m - 1) \rightarrow a \in (-\infty, \infty) \quad (8)$$

и, кроме того,

$$\lim_{n(A_m - 1) \rightarrow a} \sup_{(z, y) \in \mathcal{D}_n} \left(\left| \frac{b_m(z)}{B_m} - 1 \right| + \left| \frac{l_m(z, y)}{L_m} - 1 \right| \right) = 0, \quad (9)$$

то для любых неотрицательных значений переменных λ_1 и λ_2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [\exp \{ -\lambda_1 Z^{(m)}(n)g_1(n) - \lambda_2 Y^{(m)}(n)g_2(n) \} | Z^{(m)}(n) > 0] = \\ = T(\infty, \lambda_2) - T(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{(\sqrt{\lambda_2} \cosh \sqrt{\lambda_2} + \lambda_1 \sinh \sqrt{\lambda_2}) \sinh \sqrt{\lambda_2}}, \quad (10)$$

где

$$T(\lambda_1, \lambda_2) := \frac{\lambda_1 \sqrt{\lambda_2} + \lambda_2 \tanh \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2} + \lambda_1 \tanh \sqrt{\lambda_2}}. \quad (11)$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение, установленное другими методами Д. В. Пильшиковым в [18] для случая $L_m = 1$.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [Z^{(m)}(n)e^{-\lambda_1 Z^{(m)}(n)g_1(n) - \lambda_2 Y^{(m)}(n)g_2(n)}] = -e^{-a} \frac{\partial T(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1}. \quad (12)$$

Замечание 1. Функция $T(\lambda_1, \lambda_2)$ в квадранте $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ является единственным решением интегрального уравнения

$$T(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2 - \int_0^1 \frac{T^2(\lambda_1 x, \lambda_2 x^2)}{x^2} dx. \quad (13)$$

Чтобы убедиться в этом, положим

$$N(\lambda_1, \sqrt{\lambda_2}) := T(\lambda_1, \lambda_2)/\lambda_1, \quad \lambda_1 > 0,$$

и рассмотрим интегральное уравнение

$$N(\lambda_1, \lambda_2) = 1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} - \lambda_1 \int_0^1 N^2(\lambda_1 x, \lambda_2 x) dx, \quad (14)$$

решение которого несложно найти в явном виде. Для этого перепишем (14) следующим образом:

$$N(\lambda_1, \lambda_2) = 1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} - \int_0^{\lambda_1} N^2\left(v, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v\right) dv.$$

Полагая $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = C\lambda$, $C > 0$, и $P(\lambda) := N(\lambda, C\lambda)$, имеем

$$P(\lambda) = 1 + C^2 \lambda - \int_0^\lambda P^2(v) dv,$$

что приводит к дифференциальному уравнению

$$P'(\lambda) = C^2 - P^2(\lambda), \quad P(0) = 1,$$

решение которого имеет вид (см., например, [19, ч. 3, гл. I, уравнение 1.23])

$$P(\lambda) = \frac{C + C^2 \tanh C\lambda}{C + \tanh C\lambda}.$$

Таким образом,

$$N(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_2 \lambda_1 + \lambda_2^2 \tanh \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \tanh \lambda_2}, \quad (15)$$

что и влечет (11). Отсюда, учитывая равенство $T(\infty, \lambda_2) = \sqrt{\lambda_2} / \tanh \sqrt{\lambda_2}$, нетрудно вывести (10).

Замечание 2. Ветвящиеся процессы с финальными типами частиц входят в класс так называемых разложимых ветвящихся процессов. Свойства разложимых ветвящихся процессов рассматривались в целом ряде статей (см., например, [1–12, 14, 15]). Однако, насколько известно автору, переходные явления для таких процессов не исследовались.

2. Вспомогательные результаты

Введем класс $\mathcal{K}(b_0, c_0)$ вероятностных производящих функций $f(z)$, для которых $f''(1) \geq b_0 > 0$, $f'''(1) \leq c_0 < \infty$.

Лемма 1 (см. [13, гл. III, § 4, теорема 1 и следствие 1]). Пусть последовательность вероятностных производящих функций $f_m(z) \in \mathcal{K}(b_0, c_0)$, $m = 1, 2, \dots$, такова, что $A_m \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$. Если $m = m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$1 - F^{(m)}(n; z) = \frac{A_m^n (1 - z)}{1 + B_m H(n; A_m) (1 - z)} (1 + r_m(n; z)), \quad (16)$$

где последовательность функций $\{r_m(n; z), m = 1, 2, \dots\}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно по всем функциям $f_m(z) \in \mathcal{K}(b_0, c_0)$. В частности,

$$Q^{(m)}(n) \sim \frac{A_m^n}{1 + B_m H(n; A_m)} \quad (17)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $f_m(z) \in \mathcal{K}(b_0, c_0)$.

Из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Если последовательность вероятностных производящих функций $f_m(z)$, $m = 1, 2, \dots$, принадлежащих классу $\mathcal{K}(b_0, c_0)$, удовлетворяет условию (8), то для любого $d > 0$

$$nB_m\theta Q^{(m)}(n\theta) \rightarrow \frac{e^{\theta a}}{h(\theta a)} \quad (18)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \geq d$.

Доказательство. Из соотношения (3) следует, что $a\theta h(a\theta)e^{-\theta a} \rightarrow 1$ при $\theta \rightarrow \infty$. Отсюда и из леммы 1 вытекает, что при $n \rightarrow \infty$

$$nB_m\theta Q^{(m)}(n\theta) \sim \frac{n\theta A_m^{\theta n}}{H(n\theta; A_m)} \sim \frac{e^{\theta a}}{h(\theta a)}$$

равномерно по $\theta \geq d$, что и требовалось.

Лемма 2 доказана.

Наши дальнейшие рассуждения во многом базируются на идеях работы [10]. Положим

$$Q(n; z, y) := Q^{(m)}(n; z, y) = 1 - F^{(m)}(n; z, y) =: 1 - F(n; z, y) \quad (19)$$

и для $t \in [0, \infty)$ условимся считать, что $Q(t, x, y) = Q([t], x, y)$. Для переменных $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и $t \in [0, \infty)$ введем функцию

$$\begin{aligned} N(t; \lambda_1, \lambda_2) &:= \frac{BH(t; A)}{A^t \lambda_1} Q(t; G_1(t; \lambda_1), G_2(t; \lambda_2)) = \\ &= g_0(t, \lambda_1) Q(t; G_1(t; \lambda_1), G_2(t; \lambda_2)) \end{aligned} \quad (20)$$

и область $\mathcal{D}(d_1) \subset \mathbb{R}^2$, зависящую от параметра $d_1 > 0$ и задаваемую равенством

$$\mathcal{D}(d_1) := \{(\lambda_1, \lambda_2) : 0 < \lambda_2^2 < \lambda_1 < d_1, 0 < \lambda_2\}. \quad (21)$$

Заметим, что в силу (14)

$$\sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)} N(\lambda_1, \lambda_2) \leq 2. \quad (22)$$

Лемма 3. Если выполнены условия теоремы 1, то существуют такие положительные константы D_1 и K , что для любого $t > 0$ и всех $0 < d_1 \leq D_1$

$$\sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)} N(t; \lambda_1, \lambda_2) \leq K. \quad (23)$$

Доказательство. Для оценки сверху функции $N(t; \lambda_1, \lambda_2)$ потребуется неравенство

$$\begin{aligned} Q^{(m)}(n; z, y) &= \mathbf{E} \left[1 - z^{Z^{(m)}(n)} y^{Y^{(m)}(n)} \right] \leq \\ &\leq (1 - z) \mathbf{E} \left[Z^{(m)}(n) \right] + (1 - y) \mathbf{E} \left[Y^{(m)}(n) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Так как $Y^{(m)}(0) = 0$, то

$$\mathbf{E} \left[Y^{(m)}(n) \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E} \left[Y^{(m)}(k+1) - Y^{(m)}(k) \right].$$

Для всех $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[Y^{(m)}(k+1) - Y^{(m)}(k) \right] &= \mathbf{E} \left[\mathbf{E} \left[Y^{(m)}(k+1) - Y^{(m)}(k) \mid Z^{(m)}(k) \right] \right] = \\ &= L_m \mathbf{E} \left[Z^{(m)}(k) \right] = L_m A_m^k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Q^{(m)}(n; z, y) &\leq (1 - z) A_m^n + (1 - y) L_m \sum_{k=0}^{n-1} A_m^k = \\ &= (1 - z) A_m^n + (1 - y) L_m H(n; A_m), \end{aligned} \quad (25)$$

и в частности (см. последовательно (4)–(5) и (3)),

$$Q^{(m)}(t; G_1(t; \lambda_1), G_2(t; \lambda_2)) \leq \frac{K \lambda_1}{B_m H(t; A_m)} \left(A_m^t + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} e^a \right) \leq K_1 g_1(t; \lambda_1) \quad (26)$$

при всех $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)$ и $t > t_0$.

Отсюда и из (20) следует, что

$$N(t; \lambda_1, \lambda_2) \leq \frac{1}{A_m^t g_1(t; \lambda_1)} \times K_1 g_1(t; \lambda_1) \leq K$$

для всех $t \in [0, \infty)$ и $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)$. Лемма доказана.

Напомним, что для упрощения изложения мы опускаем иногда индекс m в приводимых ниже формулах.

Введем обозначение

$$E_n(t; A) := \frac{H(t; A)}{H(n; A)}, \quad 0 \leq t \leq n. \quad (27)$$

Лемма 4. Если выполнены условия теоремы 1, то для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют такие число N_ε и функция $G(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$, что

$$N(n; \lambda_1, \lambda_2) = 1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} + \delta(n; \lambda_1, \lambda_2) - \frac{\lambda_1 n \log A}{A^n - 1} \int_\varepsilon^1 A^{vn} N^2(vn; \lambda_1 E_n(vn; A), \lambda_2 E_n(vn; A)) dv, \quad (28)$$

где

$$|\delta(n; \lambda_1, \lambda_2)| \leq G(\varepsilon) \quad (29)$$

при $n \geq N_\varepsilon$ и всех $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)$.

Доказательство. Используя свойства условного математического ожидания, легко проверить, что

$$F^{(m)}(n; z, y) = f_m(F^{(m)}(n-1; z, y), y).$$

Отсюда, вспоминая определение (19) и условие (7), приходим к соотношению

$$Q(n; z, y) = AQ(n-1; z, y) + (1-y)l_m(F(n-1; z, y), y) - b_m(F(n-1; z, y))Q^2(n-1; z, y),$$

которое после итерирования приводит к равенству

$$Q(n; z, y) = A^n(1-z) + (1-y) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} l_m(F(k; z, y), y) - \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} b_m(F(k; z, y)) Q^2(k; z, y). \quad (30)$$

Полагая в этом равенстве

$$1-z = g_1(n; \lambda_1) = \frac{\lambda_1}{BH(n; A)}, \quad 1-y = g_2(n; \lambda_2) = \frac{e^a}{BLH^2(n; A)} \lambda_2^2,$$

обращаясь к определениям (4) и (20) и умножая левую и правую части (30) на

$$g_0(n; \lambda_1) = \frac{BH(n; A)}{A^n \lambda_1} = \frac{1}{A^n g_1(n; \lambda_1)},$$

нетрудно убедиться в том, что для всех достаточно больших значений n справедливо представление

$$N(n; \lambda_1, \lambda_2) = 1 + \frac{e^a \lambda_2^2}{A^n H(n; A) \lambda_1 L} R(n; \lambda_1, \lambda_2) - g_0(n; \lambda_1) P(n; \lambda_1, \lambda_2), \quad (31)$$

в котором

$$\begin{aligned} R(n; \lambda_1, \lambda_2) &:= \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} l_m(F(k; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2)), G_2(n; \lambda_2)), \\ P(n; \lambda_1, \lambda_2) &:= \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} b_m(F(k; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2))) \times \\ &\quad \times Q^2(k; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2)). \end{aligned}$$

Оценим сначала функцию $R(n; \lambda_1, \lambda_2)$. В силу (26)

$$1 - F(k; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2)) \leq g_1(n; \lambda_1) A^k + g_2(n; \lambda_2) H(k; A) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $0 \leq k \leq n$ и $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)$. Отсюда и из условия (9) вытекает, что

$$\lim_{n(A_m-1) \rightarrow a} \max_{0 \leq k \leq n} \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}} \left| \frac{l_m(F(k; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2)), G_2(n; \lambda_2))}{L_m} - 1 \right| = 0.$$

Таким образом, в условиях доказываемой леммы

$$\begin{aligned} R(n; \lambda_1, \lambda_2) &= (1 + \delta_1(n; \lambda_1, \lambda_2)) L \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} = \\ &= (1 + \delta_1(n; \lambda_1, \lambda_2)) L H(n; A). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь и далее обозначения вида $\delta_i(n; \lambda_1, \lambda_2)$ используются для функций, подчиняющихся ограничению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)} |\delta_i(n; \lambda_1, \lambda_2)| = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{e^a \lambda_2^2}{A^n H(n; A) L \lambda_1} R(n; \lambda_1, \lambda_2) = (1 + \delta_2(n; \lambda_1, \lambda_2)) \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}. \quad (33)$$

Далее, при помощи соображений, аналогичных использовавшимся при оценке функции $R(n; \lambda_1, \lambda_2)$, заключаем, что

$$P(n; \lambda_1, \lambda_2) = (1 + \delta_4(n; \lambda_1, \lambda_2)) BW(n; \lambda_1, \lambda_2), \quad (34)$$

где $W(n; \lambda_1, \lambda_2) := \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} Q^2(k; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2))$. Представим величину $W(n; \lambda_1, \lambda_2)$ в виде

$$W(n; \lambda_1, \lambda_2) = W_1(n; \lambda_1, \lambda_2) + W_2(n; \lambda_1, \lambda_2),$$

где

$$W_1(n; \lambda_1, \lambda_2) := \sum_{k=0}^{[n\varepsilon]-1} A^{n-k-1} Q^2(k; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2)),$$
$$W_2(n; \lambda_1, \lambda_2) := \sum_{k=[n\varepsilon]}^{n-1} A^{n-k-1} Q^2(k; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2)).$$

Используя (26) и определение области $\mathcal{D}(d_1)$ в (21), видим, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ и всех достаточно больших n

$$W_1(n; \lambda_1, \lambda_2) \leq K g_1^2(n; \lambda_1) \sum_{k=0}^{[n\varepsilon]} A^{n-k-1} = K g_1^2(n; \lambda_1) \sum_{k=n-[n\varepsilon]}^{n-1} A^k \leq$$
$$\leq K_1 g_1(n; \lambda_1) \frac{H(n; A) - H(n - [n\varepsilon]; A)}{n}.$$

Отсюда следует, что для всех $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)$ справедлива оценка

$$g_0(n; \lambda_1) W_1(n; \lambda_1, \lambda_2) \leq K \frac{H(n; A) - H(n - [n\varepsilon]; A)}{n} \leq K_1 \max\{A^n, A^{n-[n\varepsilon]}\} \varepsilon,$$

которая в силу условия $n(A - 1) \rightarrow a \in (-\infty, \infty)$ и соотношения (18) приводит к неравенству

$$g_0(n; \lambda_1) W_1(n; \lambda_1, \lambda_2) \leq K_1 \varepsilon. \quad (35)$$

Вспоминая (27), легко проверить, что для любого $t > 0$

$$g_0(n, \lambda_1) = \frac{BH(n; A)}{A^t \lambda_1 E_n(t; A)},$$
$$G_1(n; \lambda_1) = 1 - \frac{\lambda_1}{BH(n; A)} = 1 - \frac{\lambda_1}{BH(t; A)} \frac{H(t; A)}{H(n; A)} = G_1(t; \lambda_1 E_n(t; A)),$$
$$G_2(n; \lambda_2) = 1 - \frac{e^a \lambda_2^2}{BH^2(n; A) L} = 1 - \frac{e^a \lambda_2^2}{BH^2(t; A) L} \frac{H^2(t; A)}{H^2(n; A)} = G_2(t; \lambda_2 E_n(t; A))$$

и, следовательно, при $0 \leq k \leq n$ и $k \leq vn < k + 1$

$$\begin{aligned} g_0(n, \lambda_1) \frac{Q(k; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2))}{A^{vn}} = \\ = \frac{1}{A^n} \frac{BH(vn; A)}{\lambda_1 A^{vn} E_n(vn; A)} Q(k; G_1(vn; \lambda_1 E_n(vn; A)), G_2(vn; \lambda_2 E_n(vn; A))) = \\ = A^{-n} N(vn; \lambda_1 E_n(vn; A), \lambda_2 E_n(vn; A)). \end{aligned} \quad (36)$$

Равенства (36) и условие (8) влекут представление

$$\begin{aligned} W_2(n; \lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{k=[n\varepsilon]}^{n-1} A^{n-k-1} Q^2(k; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2)) = \\ &= (1 + \delta_5(n)) n A^n \int_{\varepsilon}^1 A^{vn} Q^2(vn; G_1(n; \lambda_1), G_2(n; \lambda_2)) dv = \\ &= \frac{(1 + \delta_5(n)) n}{A^n g_0^2(n; \lambda_1)} \int_{\varepsilon}^1 A^{vn} N^2(vn; \lambda_1 E_n(vn; A), \lambda_2 E_n(vn; A)) dv, \end{aligned} \quad (37)$$

в котором $\delta_5(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Используя в (31) соотношения (30), (33), (34), (35) и (37), несложно показать при помощи очевидных оценок, что

$$\begin{aligned} N(n; \lambda_1, \lambda_2) &= 1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} + \delta(n; \lambda_1, \lambda_2) - \\ &\quad - \frac{\lambda_1 n \log A}{A^n - 1} \int_{\varepsilon}^1 A^{vn} N^2(vn; \lambda_1 E_n(vn; A), \lambda_2 E_n(vn; A)) dv. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Существует такое число D_1 , что для всех $0 < d_1 \leq D_1$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)} \lambda_1 \int_0^{\varepsilon} N^2(\lambda_1 v, \lambda_2 v) dv = 0.$$

Доказательство. В силу (22) имеем

$$\lambda_1 \int_0^{\varepsilon} N^2(\lambda_1 v, \lambda_2 v) dv \leq 4\lambda_1 \varepsilon \leq K\varepsilon$$

для некоторой константы K , что и доказывает лемму.

Сделав в интегральном члене равенства (14) замену

$$x := \frac{A^{vn} - 1}{A^n - 1} = E_n(vn; A), \quad 0 \leq v \leq 1,$$

приходим к важному для дальнейших рассуждений соотношению

$$N(\lambda_1, \lambda_2) = 1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1 n \log A}{A^n - 1} \int_0^1 A^{vn} N^2(\lambda_1 E_n(vn; A), \lambda_2 E_n(vn; A)) dv. \quad (38)$$

Лемма 6. *Существует такая область $\mathcal{D}(d_1)$, что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)} |N(n; \lambda_1, \lambda_2) - N(\lambda_1, \lambda_2)| = 0.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу (22) и (23) найдутся такие область $\mathcal{D}(d_1)$ (см. определение (21)) и константа $K = K(d_1)$, что

$$\sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)} (N(t; \lambda_1, \lambda_2) + N(\lambda_1, \lambda_2)) \leq K$$

при всех $t > 0$. Отсюда, полагая $\Xi(t; \lambda_1, \lambda_2) := |N(t; \lambda_1, \lambda_2) - N(\lambda_1, \lambda_2)|$, $t > 0$, и используя (28) и (38), заключаем, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\Xi(n; \lambda_1, \lambda_2) \leq K \frac{ae^{|a|}}{e^a - 1} \lambda_1 \Gamma(n, \varepsilon; \lambda_1, \lambda_2) + |\delta(n; \lambda_1, \lambda_2)| + K\varepsilon,$$

где $\Gamma(n, \varepsilon; \lambda_1, \lambda_2) := \int_\varepsilon^1 \Xi(vn; \lambda_1 E_n(vn; A), \lambda_2 E_n(vn; A)) dv$, что в силу (29) и леммы 5 приводит к оценке

$$\Xi(n; \lambda_1, \lambda_2) \leq K_1 \lambda_1 \Gamma(n, \varepsilon; \lambda_1, \lambda_2) + G_1(\varepsilon), \quad (39)$$

в которой $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} G_1(\varepsilon) = 0$. Поэтому для завершения доказательства леммы 6 достаточно оценить соответствующим образом величину $\Gamma(n, \varepsilon; \lambda_1, \lambda_2)$. Положим

$$\begin{aligned} \Delta(vn; E_n(v, A)) &:= \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)} \Xi(vn; \lambda_1 E_n(vn; A), \lambda_2 E_n(vn; A)), \\ \Delta(vn) &:= \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)} \Xi(vn; \lambda_1, \lambda_2). \end{aligned}$$

Поскольку

$$0 \leq \frac{A^{vn} - 1}{A^n - 1} \leq 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq v \leq 1,$$

то

$$\Delta(vn; E_n(vn; A)) \leq \Delta(vn), \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (40)$$

Выберем теперь параметр d_1 так, чтобы для константы K_1 в (39) выполнялось соотношение $K_1\lambda_1 \leq K_1d_1 \leq 1/2$. Ввиду (39) и оценки (40) при таком выборе параметров справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\Delta(n) &\leq G_1(\varepsilon) + \frac{1}{2} \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)} \Gamma(n, \varepsilon; \lambda_1, \lambda_2) \leq \\ &\leq G_1(\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 \sup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)} \Xi(vn; \lambda_1 E_n(vn; A), \lambda_2 E_n(vn; A)) dv \leq \\ &\leq G_1(\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 \Delta(vn) dv.\end{aligned}$$

Полагая $\bar{\Delta}(R) := \sup_{n \geq R} \Delta(n)$ и $\bar{\Delta} := \lim_{R \rightarrow \infty} \bar{\Delta}(R)$, последовательно заключаем, что

$$\bar{\Delta}(R) \leq G_1(\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 \Delta(vR) dv \quad \text{и} \quad \bar{\Delta} \leq G_1(\varepsilon) + \frac{1}{2} \bar{\Delta}.$$

Последнее, в силу ограниченности величины $\bar{\Delta}$, которая вытекает из леммы 3, неравенства (22) и оценки $\bar{\Delta} \leq 2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} G_1(\varepsilon) = 0$, влечет равенство $\bar{\Delta} = 0$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(n; \lambda_1, \lambda_2) = N(\lambda_1, \lambda_2)$$

для всех $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}(d_1)$, что, очевидно, доказывает лемму 6.

Обозначим

$$\begin{aligned}T(n; \lambda_1, \lambda_2) &:= \frac{1}{Q^{(m)}(n)} \left(1 - \mathbf{E} \left[e^{-\lambda_1 Z^{(m)}(n)g_1(n) - \lambda_2 Y^{(m)}(n)g_2(n)} \right] \right) = \\ &= \frac{Q^{(m)}(n; e^{-\lambda_1 g_1(n)}, e^{-\lambda_2 g_2(n)})}{Q^{(m)}(n)}\end{aligned}$$

и для $(\lambda_1, \sqrt{\lambda_2}) \in \mathcal{D}(d_1)$ положим, как и ранее, $T(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 N(\lambda_1, \sqrt{\lambda_2})$.

Лемма 7. Существует такая область $\mathcal{M}(\Lambda_1) := \{0 < \lambda_2 < \lambda_1 < \Lambda_1\}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(n; \lambda_1, \lambda_2) = T(\lambda_1, \lambda_2) \quad \text{при всех} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{M}(\Lambda_1). \quad (41)$$

Доказательство. В силу наших предположений и соотношения (17)

$$g_0(n)Q^{(m)}(n) \sim \frac{B_m H(n; A_m)}{A^n} \frac{A_m^n}{1 + B_m H(n; A_m)} \rightarrow 1 \quad (42)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $n(A_m - 1) \rightarrow a$. Поэтому в дальнейших выкладках будем использовать вместо $Q^{(m)}(n)$ функцию $1/g_0(n)$.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. Из монотонности функции $1 - F(n; z, y)$ по z и y , определения (20), леммы 6 и неравенств

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x(1 - \varepsilon),$$

справедливых при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ для всех достаточно малых $x > 0$, следует, что найдется такая область $\mathcal{M}(\Lambda_1)$, в которой

$$\begin{aligned} \lambda_1 N \left(\lambda_1(1 - \varepsilon), \sqrt{\lambda_2}(1 - \varepsilon) \right) &\leq \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g_0(n/\lambda_1) Q(n; e^{-\lambda_1 g_1(n)}, e^{-\lambda_2 g_2(n)}) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} g_0(n/\lambda_1) Q(n; e^{-\lambda_1 g_1(n)}, e^{-\lambda_2 g_2(n)}) = \lambda_1 N \left(\lambda_1, \sqrt{\lambda_2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$ и непрерывности функции $N(\lambda_1, \sqrt{\lambda_2})$ по каждому из аргументов, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_0(n) Q(n; e^{-\lambda_1 g_1(n)}, e^{-\lambda_2 g_2(n)}) = \lambda_1 N \left(\lambda_1, \sqrt{\lambda_2} \right) \quad (43)$$

при всех $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{M}(\Lambda_1)$. Лемма 7 доказана.

Покажем теперь, что равенство (41) верно для всех двумерных векторов (λ_1, λ_2) с неотрицательными координатами.

Лемма 8. При всех $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(n; \lambda_1, \lambda_2) = T(\lambda_1, \lambda_2). \quad (44)$$

Доказательство. Временно расширим область значений переменных λ_1 и λ_2 и будем трактовать их как комплексные переменные $\lambda_1 = u_1 + iv_1, \lambda_2 = u_2 + iv_2$. Рассмотрим теперь последовательность функций

$$M(n; \lambda_1, \lambda_2) := g_0(n) Q(n; e^{-\lambda_1 g_1(n)}, e^{-\lambda_2 g_2(n)}), \quad n \geq 1,$$

как семейство аналитических функций, определенных на множестве $\mathbb{C}_+^2 := \{(\lambda_1, \lambda_2) : u_1 > 0, u_2 > 0\}$. В силу неравенств

$$|1 - e^{-u+iv}| \leq 1 - e^{-u} + e^{-u} |1 - e^{iv}| \leq u + 2 \left| \sin \frac{v}{2} \right| \leq u + |v|,$$

справедливых при $u > 0$, имеем

$$\begin{aligned}
 & |M(n; \lambda_1, \lambda_2)| \leqslant \\
 & \leqslant K n \mathbf{E} [|1 - \exp \{-\lambda_1 Z^{(m)}(n) g_1(n)\}|] + \\
 & + K n \mathbf{E} [|1 - \exp \{-\lambda_2 Y^{(m)}(n) g_2(n)\}|] \leqslant \\
 & \leqslant K (u_1 + |v_1|) n g_1(n) \mathbf{E} [Z^{(m)}(n)] + K (u_2 + |v_2|) n g_2(n) \mathbf{E} [Y^{(m)}(n)] = \\
 & = K (u_1 + |v_1|) n g_1(n) A^n + K (u_2 + |v_2|) n^2 g_2(n) \frac{H(n; A)}{n}.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (3)–(5) следует, что семейство аналитических функций $\{M(n; \lambda_1, \lambda_2), n \geqslant 1\}$ равномерно ограничено в любом компактном подмножестве $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}_+^2$. Обращаясь теперь к принципу Монтеля для аналитических функций нескольких переменных (см. [20, с. 117]), заключаем, что существуют такая последовательность $\{n_k\}$, $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, и такая аналитическая в $\mathbb{C}_+^2$ функция $M(\lambda_1, \lambda_2)$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M(n_k; \lambda_1, \lambda_2) = M(\lambda_1, \lambda_2). \quad (45)$$

В силу (43)

$$M(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 N(\lambda_1, \sqrt{\lambda_2}) \quad \text{при всех } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{M}(\Lambda_1).$$

Из явного вида функции $N(\cdot, \cdot)$ в (15) следует, что ветвь многозначной функции $N(\lambda_1, \sqrt{\lambda_2})$, для которой $\sqrt{\lambda_2} > 0$ при $\text{Im } \lambda_2 = 0$, является аналитической в области $\mathbb{C}_+^2$. Поскольку множество $\mathcal{M}(\Lambda_1)$ содержит прямоугольник $\{d_1/2 < u_1 < d_1, d_1/4 < u_2 < d_1/2\}$ квадранта $\mathbb{R}_+^2 := \{(u_1, u_2) : u_1 > 0, u_2 > 0\}$, то из (45) и теоремы единственности для аналитических функций нескольких переменных (см. [22, с. 32]) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(n; \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 N(\lambda_1, \sqrt{\lambda_2})$$

при всех $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}_+^2$. Этот факт, соотношение (42) и равенство

$$T(n; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{g_0(n)Q(n)} \times M(n; \lambda_1, \lambda_2)$$

влекут утверждение леммы.

3. Доказательство теоремы 1

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\lambda_1 Z^{(m)}(n)g_1(n) - \lambda_2 Y^{(m)}(n)g_2(n) \right\} \mid Z^{(m)}(n) > 0 \right] &= \\ &= \frac{Q^{(m)}(n; 0, e^{-\lambda_2 g_2(n)})}{Q^{(m)}(n)} - \frac{Q^{(m)}(n; e^{-\lambda_1 g_1(n)}, e^{-\lambda_2 g_2(n)})}{Q^{(m)}(n)} = \\ &= T(n; \infty, \lambda_2) - T(n; \lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \quad (46)$$

Введем обозначение

$$R(n; x, y) := \mathbf{P} \left(Z^{(m)}(n)g_1(n) \leq z, Y^{(m)}(n)g_2(n) \leq y \mid Z^{(m)}(n) > 0 \right).$$

В силу неравенства Чебышева и оценок (3)–(5) найдется такая константа K , что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\{ Z^{(m)}(n)g_1(n) > z \} \cup \{ Y^{(m)}(n)g_2(n) > y \} \mid Z^{(m)}(n) > 0 \right) &\leq \\ &\leq \mathbf{P} \left(Z^{(m)}(n)g_1(n) > z \mid Z^{(m)}(n) > 0 \right) + \\ &\quad + \mathbf{P} \left(Y^{(m)}(n)g_2(n) > y \mid Z^{(m)}(n) > 0 \right) \leq \\ &\leq \frac{g_1(n)}{z} \mathbf{E} \left[Z^{(m)}(n) \mid Z^{(m)}(n) > 0 \right] + \frac{g_2(n)}{y} \mathbf{E} \left[Y^{(m)}(n) \mid Z^{(m)}(n) > 0 \right] \leq \\ &\leq \frac{g_1(n)}{Q^{(m)}(n)z} A_m^n + \frac{g_2(n)n}{Q^{(m)}(n)y} \frac{H(n; A_m)}{n} \leq K \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y} \right) \end{aligned}$$

при всех $n \geq 1$. Следовательно, семейство распределений $\{R(n; z, y), n \geq 1\}$ компактно в $\mathbb{R}_+^2$. Поэтому существуют такое собственное распределение $R(z, y)$ и такая последовательность $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, что при всех $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}_+^2$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_1 z - \lambda_2 y} dR(n_k; x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_1 z - \lambda_2 y} dR(x, y) =: \hat{R}(\lambda_1, \lambda_2) \quad (47)$$

и, кроме того, при $\text{Im } \lambda_j = 0$, $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \widehat{R}(\lambda_1, \lambda_2) = \\ &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_1 z - \lambda_2 y} dR(n_k; z, y) \leq \\ &\leq \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda_1 z} dR(n_k; z, \infty) = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Из соотношений (44), (47) и (46) вытекает существование предела

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \mathbf{E} [\exp \{-\lambda_2 Y^{(m)}(n_k) g_2(n_k)\} ; Z^{(m)}(n_k) = 0]}{Q^{(m)}(n_k)} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q^{(m)}(n_k; 0, e^{-\lambda_2 g_2(n_k)})}{Q^{(m)}(n_k)} = \widehat{Y}(\lambda_2) \end{aligned}$$

при любом $\lambda_2 > 0$. Покажем, что функция $\widehat{Y}(\lambda_2)$ не зависит от выбора последовательности $\{n_k\}$. Легко проверить, что

$$\widehat{Y}(\lambda_2) = \widehat{R}(\lambda_1, \lambda_2) + T(\lambda_1, \lambda_2).$$

Отсюда, переходя к пределу при $\lambda_1 \rightarrow \infty$ и учитывая (49), заключаем, что

$$\widehat{Y}(\lambda_2) = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \widehat{R}(\lambda_1, \lambda_2) + \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} T(\lambda_1, \lambda_2) = T(\infty, \lambda_2)$$

(последний предел существует в силу монотонности функции $T(\lambda_1, \lambda_2)$ по λ_1 , вытекающей из определения $T(n; \lambda_1, \lambda_2)$ и предельного соотношения (44)).

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \mathbf{E} [\exp \{-\lambda_2 Y^{(m)}(n) g_2(n)\} ; Z^{(m)}(n) = 0]}{Q^{(m)}(n)} = T(\infty, \lambda_2),$$

что завершает доказательство теоремы.

4. Доказательство следствия 1

Для доказательства равенства (12) достаточно учесть (см., например, [21, гл. II]), что если имеется последовательность аналитических функций, сходящихся в некоторой области к аналитической функции, то производные любого порядка допредельных функций сходятся в этой области к производной соответствующего порядка предельной функции. Поскольку

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[Z^{(m)}(n) e^{-\lambda_1 Z^{(m)}(n) g_1(n) - \lambda_2 Y^{(m)}(n) g_2(n)} \right] = \\ &= \mathbf{E} \left[Z^{(m)}(n) e^{-\lambda_1 Z^{(m)}(n) g_1(n) - \lambda_2 Y^{(m)}(n) g_2(n)} | Z^{(m)}(n) > 0 \right] \mathbf{P} (Z^{(m)}(n) > 0) = \\ &= - \frac{\mathbf{P} (Z^{(m)}(n) > 0)}{g_1(n)} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \mathbf{E} \left[e^{-\lambda_1 Z^{(m)}(n) g_1(n) - \lambda_2 Y^{(m)}(n) g_2(n)} | Z^{(m)}(n) > 0 \right], \end{aligned}$$

то в силу (17) и равенства $g_1(n) = 1/BH(n; A)$ имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[Z^{(m)}(n) e^{-\lambda_1 Z^{(m)}(n) g_1(n) - \lambda_2 Y^{(m)}(n) g_2(n)} \right] = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P} (Z^{(m)}(n) > 0)}{g_1(n)} \times \\ & \quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \mathbf{E} \left[e^{-\lambda_1 Z^{(m)}(n) g_1(n) - \lambda_2 Y^{(m)}(n) g_2(n)} | Z^{(m)}(n) > 0 \right] = \\ &= -e^{-a} \frac{\partial T(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Список литературы

- [1] Афанасьев В. И., “Функциональные предельные теоремы для разложимого ветвящегося процесса с двумя типами частиц”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 22–44.
- [2] Афанасьев В. И., “О разложимом ветвящемся процессе с двумя типами частиц”, Труды Матем. ин-та РАН, **294**, 2016, 7–19.
- [3] Афанасьев В. И., “Функциональная предельная теорема для разложимого ветвящегося процесса с двумя типами частиц”, *Матем. заметки*, **103**:3 (2018), 323–335.
- [4] Ватутин В. А., “Структура разложимых редуцированных ветвящихся процессов. I. Конечномерные распределения”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **59**:4 (2014), 667–692.
- [5] Ватутин В. А., “Структура разложимых редуцированных ветвящихся процессов. II. Функциональные предельные теоремы”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **60**:1 (2015), 25–44.
- [6] Ватутин В. А., “Условная функциональная предельная теорема для разложимых ветвящихся процессов с двумя типами частиц”, *Матем. заметки*, **101**:5 (2017), 669–683.
- [7] Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., “Разложимые ветвящиеся процессы с фиксированным моментом вырождения”, Труды Матем. ин-та РАН, **290**, 2015, 114–135.
- [8] Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., “О вырождении разложимых ветвящихся процессов”, *Дискретная математика*, **28**:4 (2015), 26–37.
- [9] Smadi Ch., Vatutin V. A., “Reduced two-type decomposable critical branching processes with possibly infinite variance”, *Markov Process. Related Fields*, **22**:2 (2016), 311–358.
- [10] Ватутин В. А., Сагитов С. М., “Разложимый критический ветвящийся процесс с двумя типами частиц”, Труды Матем. ин-та АН СССР, **177**, 1986, 3–20.
- [11] Зубков А. М., “Предельное поведение разложимых критических ветвящихся процессов с двумя типами частиц”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **27**:2 (1982), 228–238.
- [12] Савин А. А., Чистяков В. П., “Некоторые теоремы для ветвящихся процессов с несколькими типами частиц”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **7**:1 (1962), 95–104.
- [13] Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*, М.: Наука, 1971, 436 с.
- [14] Pakes A. G., “Some limit theorems for the total progeny of a branching process”, *Adv. Appl. Probab.*, **3**:1 (1971), 176–192.
- [15] Foster J., Ney P., “Limit laws for decomposable critical branching processes”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **46** (1978), 13–43.
- [16] Pilshchikov D. V., “Estimation of the characteristics of time-memory-data tradeoff methods via generating functions of the number of particles and the total number of particles in the Galton–Watson process”, *Математические вопросы криптографии*, **5**:2 (2014), 103–108.
- [17] Pilshchikov D. V., “On the limiting mean values in probabilistic models of time-memory-data tradeoff methods”, *Математические вопросы криптографии*, **6**:2 (2015), 59–65.
- [18] Пильщиков Д. В., “Анализ сложности алгоритма параллельного поиска «золотой» коллизии”, *Математические вопросы криптографии*, **6**:4 (2015), 77–97.
- [19] Камке Э., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М.: Наука, 1976, 576 с.
- [20] Монтель П., *Нормальные семейства аналитических функций*, М.–Л.: ОНТИ, 1936, 240 с.
- [21] Свешников А. Г., Тихонов А. Н., *Теория функций комплексной переменной*, М.: Наука, 1970, 319 с.
- [22] Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ. Ч. II*, М.: Наука, 1976, 400 с.