Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Глухов, О рассеивающих линейных преобразованиях для блочных шифр-систем, *Матем. вопр. криптогр.*, 2011, том 2, выпуск 2, 5–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk29>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 07:13:22

О рассеивающих линейных преобразованиях для блочных шифрсистем

М. М. Глухов

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 22.IV.2010

Рассматриваются блочные шифрсистемы типа AES над конечным полем с линейными рассеивающими преобразованиями трех типов: блочно-равномерными, максимально рассеивающими и составными. Исследуются матрицы вероятностей переходов пар различных входных блоков в пары выходных блоков при случайном, независимом и равновероятном выборе ключей каждого раунда. Для схем без рассеивающих преобразований в нечетных раундах найдено минимальное число раундов, достаточное для порождения 2-транзитивного множества подстановок.

Ключевые слова: блочные шифрсистемы, матрица переходных вероятностей пар блоков, рассеивающее преобразование, максимально рассеивающее преобразование, блочно-равномерное преобразование

On mixing linear transforms for block ciphers

M. M. Gluhov

Academy of Cryptography of Russian Federation, Moscow

Abstract. We consider AES-type block ciphers over the finite field with linear mixing transforms of three classes: maximally mixing, block-uniform and composite. Transition probability matrices of pairs of input blocks for these schemes with random independent equiprobable round keys are investigated. A minimum number of rounds sufficient for the generation of doubly transitive set of permutations are found for schemes without mixing transforms in odd rounds.

Key words: block ciphers, transition probability matrix of pairs of blocks, mixing transforms, maximally mixing transform, block uniform transform

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2011, vol. 2, no. 2, pp. 5–40 (Russian).

© 2011 М. М. Глухов

§ 1. Введение

Рассмотрим блочную многораундовую криптосхему типа AES над полем $GF(q)$ (см. [6]), называемую также XSL-схемой и XSL-сетью. Будем считать, что ее входными и выходными блоками являются векторы-строки длины n , составленные из элементов поля $GF(q)$. Множество $V_n(q)$ всех таких векторов с операциями покомпонентного сложения и умножения на элементы поля $GF(q)$ является линейным пространством размерности n над полем $GF(q)$. Каждый блок a является конкатенацией r подблоков длины m и записывается в виде $a = (a_1, \dots, a_r)$, где $mr = n$, $m > 1$, $r > 1$. При этом вектор $a_j \in V_m(q)$ есть j -й подблок блока a . Аналогичное представление будет использоваться и для раундовых ключей. Основные операции и нулевой элемент в поле $GF(q)$ и в линейных пространствах над ним будем обозначать теми же знаками, что и во множестве целых чисел. Из контекста всегда будет видно, о чем идет речь.

В i -м раунде процесса шифрования блок a подвергается преобразованию F_x , где

$$F_x(a) = L_i(\Pi(\sigma_x(a))), \text{ или, иначе, } aF_x = a\sigma_x\Pi L_i,$$

x — раундовый ключ, $\sigma_x(a) = a\sigma_x = a + x$, Π — преобразование множества $V_n(q)$, осуществляемое с помощью системы из r подстановок Π_i , $i = 1, \dots, r$, множества $V_m(q)$ по правилу:

$$\Pi(a) = (\Pi_1(a_1), \dots, \Pi_r(a_r)),$$

L_i — линейное преобразование пространства $V_n(q)$. Множество всех преобразований, осуществляемых в i -м раунде шифрования, можно записать в виде $\Sigma_n \Pi L_i$, где $\Sigma_n = \{\sigma_x : x \in V_n(q)\}$. Для упрощения записей будем считать, что подстановка Π является постоянной для всех раундов. Далее будем предполагать, что ключ x выбирается случайно, равномерно и независимо в каждом раунде.

Обозначим через $V(i_1, \dots, i_k)$ при $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$ множество всех блоков, в которых подблоки с номерами $i_1, \dots, i_k$ — ненулевые, а остальные подблоки — нулевые. Множество $V_n(q) \setminus \{0\}$ разбивается на $2^r - 1$ попарно не пересекающихся подмножеств

$$V(1), V(2), \dots, V(r), V(1, 2), V(1, 3), \dots, V(i_1, \dots, i_k), \dots, V(1, 2, \dots, r). \quad (1)$$

Очевидно, что i -й подблок вектора $a\sigma_x\Pi$ при любых $a, x \in V_n(q)$ зависит лишь от i -х подблоков векторов a, x . Для преодоления этого недостатка

схемы к векторам вида $a\sigma_x\Pi$ применяется линейное преобразование L_i , которое выбирается так, чтобы результаты его действия на подблоки вектора зависели от многих подблоков исходного вектора. В связи с этим такие преобразования называют рассеивающими. Они обычно выбираются линейными с тем, чтобы допускать сравнительно простую реализацию и не портили нужных параметров нелинейных преобразований Π_i . Однако свойства рассеивающих преобразований оказывают существенное влияние не только на сложность реализации процессов зашифрования и расшифрования, но и на криптографическую стойкость схемы. В связи с этим актуальной является задача поиска сравнительно просто реализуемых рассеивающих линейных преобразований и исследования их свойств. При этом под основным рассеивающим свойством преобразования L мы здесь понимаем его способность обеспечивать сравнительно быструю сходимость последовательности степеней $(P^{(2)})^t$ матрицы $P^{(2)}$ переходных вероятностей пар различных блоков под действием системы подстановок $\Sigma_n\Pi L$ к равномерной матрице при подходящем выборе подстановок Π_i и при $t \rightarrow \infty$. Элементами матрицы $P^{(2)}$ являются отношения числа подстановок системы $\Sigma_n\Pi L$, переводящих заданную пару блоков в заданную пару блоков, к общему числу подстановок в системе; равномерной мы называем дважды стохастическую матрицу, все элементы которой равны между собой. Ниже сходимость последовательности степеней матрицы $P^{(2)}$ к равномерной матрице мы для краткости будем называть о сходимостью матрицы $P^{(2)}$ к равномерной матрице.

В данной работе для указанной криптосхемы исследуются три класса рассеивающих линейных преобразований, называемых соответственно блочно-равномерными, максимально рассеивающими и составными.

Блочно-равномерным мы называем обратимое линейное преобразование L пространства $V_n(q)$, удовлетворяющее условию:

$$|L(V(i)) \cap V(j)| = l \text{ при некотором} \\ \text{фиксированном } l > 0 \text{ и всех } i, j = \{1, \dots, r\}. \quad (2)$$

Максимально рассеивающим называют обратимое линейное преобразование L пространства $V_n(q)$, удовлетворяющее условию

$$\forall a \in V_n(q) : |w(aL) + w(a)| \geq r + 1,$$

где $w(a)$ — число ненулевых подблоков в блоке $a \in V_n(q)$. Заметим, что такие преобразования обладают максимальным коэффициентом рассеивания, введенным Ф. М. Малышевым как $\min |w(aL) + w(a)|$ по всем $a \in V_q(n)$.

Составным при $r = dh, d > 1, h > 1$, мы называем линейное преобразование пространства $V_n(q)$, представимое в виде произведения $L = gf$, где g — перестановка подблоков в блоке, а f реализуется в виде системы обратимых линейных преобразований $f_i, i = 1, \dots, h$, причем f_i действует на подпространстве $V_{md}^{(i)}$, состоящем из конкатенаций подблоков с номерами $(i-1)d+1, (i-1)d+2, \dots, id$. Каждый вектор из $V_{md}^{(i)}$ условимся называть i -м каскадом соответствующего блока. К составным относится, в частности, рассеивающее линейное преобразование в реальной криптосхеме AES. В ней блок записывается в виде матрицы над полем $GF(2^8)$, роль подстановки g играет преобразование сдвигов строк в матрице-блоке, а роль f_i — одно и то же максимально рассеивающее преобразование, заключающееся в умножении на подходящую матрицу над полем $GF(2^8)$ всех столбцов матрицы-блока, которые и являются каскадами этого блока в указанном выше смысле.

Криптосхему, в которой все линейные преобразования L_i содержатся в любом одном из указанных трех классов, будем ради краткости называть А-схемой. Криптографическая стойкость k -раундовой А-схемы существенно зависит от свойств матрицы $P^{(2,k)}$ переходных вероятностей пар различных входных блоков в пары выходных блоков за k раундов. В частности, близость матрицы $P^{(2,k)}$ к равномерной матрице способствует лучшему противостоянию А-схемы методам анализа, использующим разности открытых текстов. В связи с этим параметры А-схемы и число раундов ее работы при зашифровании блоков выбирают так, чтобы матрица $P^{(2,k)}$ была близка к равномерной матрице.

В общем случае вопрос о максимальном отклонении элементов матрицы $P^{(2,k)}$ от элементов равномерной матрицы является весьма сложным как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения (в силу больших размеров матрицы $P^{(2,k)}$). Однако в некоторых случаях качественная оценка близости матрицы $P^{(2,k)}$ к равномерной может быть получена путем оперирования с матрицами меньших размеров. В частности, для максимально рассеивающих и блочно равномерных преобразований при подходящих Π такая ситуация имеет место в криптосхемах, полученных из А-схем заменой преобразований L_i при нечетных i тождественным преобразованием. Полученные таким образом криптосхемы будем называть А₁-схемами. Их основное преимущество перед А-схемами заключается в том, что в А₁-схемах легче проследить изменения матриц переходных вероятностей биграмм при

их перемножении и, в частности, при определенных ограничениях на подстановки Π легко найти минимальное значение k числа раундов, при котором матрица $P^{(2,k)}$ не содержит нулевых элементов, т. е. реализуется 2-транзитивное множество подстановок. Кроме того, A_1 -схемы имеют определенное преимущество и с точки зрения скорости шифрования и расшифрования.

Из полученных ниже результатов следует, что для A_1 -схем блочно-равномерные рассеивающие преобразования являются оптимальными с точки зрения минимизации числа раундов для реализации 2-транзитивного множества подстановок. Однако с точки зрения скорости сходимости последовательности матриц $P^{(2,k)}$ к равномерной матрице лучшими являются максимально рассеивающие преобразования. При этом преимущество последних имеет довольно простое объяснение (см. § 5).

§ 1. Общие свойства матриц переходных вероятностей пар блоков в A -схемах

Множество преобразований блока в i -м раунде A -схемы при всевозможных раундовых ключах можно представить в виде $\Sigma_n PL_i$. Тогда за k раундов будет реализоваться система подстановок

$$G_k = \{ \sigma_{x_1} PL_1 \sigma_{x_2} PL_2 \dots \sigma_{x_k} PL_k : x_1, x_2, \dots, x_k \in V_n(q) \}, \quad (3)$$

и матрица переходных вероятностей пар различных блоков такого шифра будет равна $P^{(2,k)}$. Заметим, что в системе (3) разные наборы $x_1, x_2, \dots, x_k$ могут порождать одну и ту же подстановку, и всегда при вычислении вероятностей переходов пар блоков каждая подстановка учитывается столько раз, сколько раз она встречается в системе (3).

Так как Σ_n — группа, то имеют место равенства множеств $\Sigma_n = \Sigma_n \cdot \Sigma_n$ и

$$\begin{aligned} & (\Sigma_n PL_1 \Sigma_n) (\Sigma_n PL_2 \Sigma_n) \dots (\Sigma_n PL_{k-1} \Sigma_n) (\Sigma_n PL_k) = \\ & = \left\{ \sigma_{x_1} PL_1 \sigma_{x'_1} \sigma_{x_2} PL_2 \dots \sigma_{x'_{k-1}} \sigma_{x_k} PL_k : x_1, x'_1, x_2, \dots, x'_{k-1}, x_k \in V_k(q) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что система (4) будет состоять из системы (3), повторенной $q^{n(k-2)}$ раз, и потому матрицы переходных вероятностей биграмм при действии систем (3) и (4) совпадают. Ради большей симметрии мы вместо системы подстановок (4) будем рассматривать систему

$$(\Sigma_n PL_1 \Sigma_n) (\Sigma_n PL_2 \Sigma_n) \dots (\Sigma_n PL_{k-1} \Sigma_n) (\Sigma_n PL_k \Sigma_n). \quad (5)$$

Соответствующая этой системе матрица переходных вероятностей пар различных блоков лишь перестановкой столбцов отличается от матрицы $P^{(2,k+1)}$. Обозначим ее через $P_1^{(2,k)}$.

Из (4) видно, что для изучения матрицы $P_1^{(2,k)}$ целесообразно изучить сначала матрицу $P_i^{(2)} = P_1^{(2,1)}$ переходных вероятностей пар различных блоков при действии системы подстановок $\Sigma_n \Pi L_i \Sigma_n$ при фиксированном i . Как было замечено Б. А. Егоровым и автором (1968 г.), вероятность перехода пары блоков (a, b) в пару (c, d) при действии подстановок из множества $H_1 g H_2$, где H_1, H_2 — регулярные подгруппы симметрической группы подстановок $S(V_n)$ (см. [7] или [2], стр. 273) и $g \in S(V_n)$, зависит лишь от числа подстановок системы $H_1 g H_2$, отображающих разность $a - b$ в разность $c - d$. Отсюда следует, что при равновероятном и независимом выборе преобразований из системы $\Sigma_n \Pi L_i \Sigma_n$ матрица $P_i^{(2)}$ при определенной и одинаковой нумерации строк и столбцов представляется в виде тензорного произведения матриц

$$P_i^{(2)} = Q^{(\Pi L_i)} \otimes R,$$

где $Q^{(\Pi L_i)}$ — матрица переходных вероятностей ненулевых разностей входных блоков в выходные под действием подстановок системы $\Sigma_n \Pi L_i \Sigma_n$, а R — равномерная матрица. Отсюда и из свойств тензорного произведения следует, что

$$P_1^{(2,k)} = \prod_{i=1}^k P_i^{(2)} = \left(\prod_{i=1}^k Q^{(\Pi L_i)} \right) \otimes R.$$

Так как R не влияет на основные криптографические параметры матрицы $P_1^{(2,k)}$, то обычно вместо матрицы $P_1^{(2,k)}$ изучают матрицу $Q^{(2,k)} = \prod_{i=1}^k Q^{(\Pi L_i)}$.

В частности, система подстановок (5) является 2-транзитивной тогда и только тогда, когда $Q^{(2,k)}$ не содержит нулевых элементов. В этом случае будем писать $Q^{(2,k)} > 0$ и называть матрицу $Q^{(2,k)}$ положительной. Заметим еще, что действие подстановок из группы Σ_n на блоки не изменяет разности блоков. Поэтому матрица переходных вероятностей ненулевых разностей под действием системы подстановок (3) совпадает с соответствующей матрицей для системы подстановок (5).

Рассмотрим i -й сомножитель из разложения матрицы $Q^{(2,k)}$. При этом в его записи будем опускать индекс i , т. е. будем рассматривать матрицу $Q^{(\Pi L)} = (q_{a,b}), a, b \in V_n(q)$ при действии подстановок системы $\Sigma_n \Pi L \Sigma_n$. При тождественном L матрицу $Q^{(\Pi L)}$ будем обозначать через $Q^{(\Pi)}$.

Известно (см., например, [1]) что элемент $q_{a,b}$ матрицы $Q^{(\Pi L)}$ равен числу решений уравнения

$$((a+x)\Pi)L - (x\Pi)L = b,$$

деленному на q^n . Так как L — линейное преобразование, то последнее уравнение равносильно уравнению

$$(a+x)\Pi - x\Pi = bL^{-1}.$$

Это означает, что матрица $Q^{(\Pi L)}$ получается из матрицы $Q^{(\Pi)}$ лишь перестановкой номеров ее столбцов. Если вместо номеров столбцов переставлять сами столбцы, сохраняя их нумерацию, то столбец с номером b встанет на место с номером bL , и значит,

$$Q^{(\Pi L)} = Q^{(\Pi)} \tilde{L},$$

где $\tilde{L}$ — подстановочная матрица, соответствующая преобразованию L . Следовательно, матрица $Q^{(2,k)}$ может быть представлена в виде

$$Q^{(2,k)} = Q^{(\Pi)} \tilde{L}_1 Q^{(\Pi)} \tilde{L}_2 Q^{(\Pi)} \dots Q^{(\Pi)} \tilde{L}_k.$$

Рассмотрим строение матрицы $Q^{(II)}$. Так как подстановки σ_x не изменяют разностей блоков, а подстановки Π_i действуют независимо на множествах $V(i)$ при $i=1, \dots, r$, то матрицу $Q^{(II)}$ при определенном расположении ее строк и столбцов можно представить в виде клеточно-диагональной матрицы. Занумеруем ее строки и столбцы элементами из $V_n(q) \setminus \{0\}$ одинаково и так, чтобы векторы-номера шли последовательно из подмножеств (1). Тогда получим:

$$Q^{(II)} = \text{Diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_r, Q_{1,2}, Q_{1,3}, \dots, Q_{1,2,\dots,r}),$$

где $Q_{i_1, \dots, i_k}$ — матрица переходных вероятностей разностей из $V(i_1, \dots, i_k)$, которая, в свою очередь, представляется в виде тензорного произведения

$$Q_{i_1, \dots, i_k} = Q_{i_1} \otimes \dots \otimes Q_{i_k}.$$

Для выражения элементов матрицы $Q_{i_1, \dots, i_k}$ через элементы матриц $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_k}$ введем обозначения: $Q_{i_1, \dots, i_k} = (q_{a,b}^{(i_1, \dots, i_k)})$, где $a = (a_1, \dots, a_r)$, $b = (b_1, \dots, b_r) \in V(i_1, \dots, i_k)$. Тогда

$$q_{a,b}^{(i_1, \dots, i_k)} = q_{a_{i_1}, b_{i_1}}^{(i_1)} \dots q_{a_{i_k}, b_{i_k}}^{(i_k)}.$$

Нетрудно усмотреть, что элементы матрицы $Q^{(\Pi)} \tilde{L} Q^{(\Pi)}$ и скорость сходимости её степеней к равновероятной матрице зависят от чисел, показы-

вающих, сколько векторов переводит L из любого одного множества системы (1) в любое другое, т. е. от чисел

$$|L(V(i_1, \dots, i_s)) \cap V(j_1, \dots, j_t)|. \quad (6)$$

Однако точные значения элементов матрицы $Q^{(\Pi)} \tilde{L}$, а значит, и $Q^{(\Pi)} \tilde{L} Q^{(\Pi)}$, зависят не только от L , но и от подстановки Π . Эта зависимость частично исключается в A_1 -схемах при подходящих подстановках Π_i . Выберем подстановки Π_i так, чтобы квадраты матриц $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ были положительными. Тогда из свойств тензорного произведения следует, что и все диагональные клетки матрицы $(Q^{(\Pi)})^2$ будут также положительными. Заметим, что в силу теоремы, доказанной А. С. Амбросимовым (1980), при достаточно больших порядках подстановок Π_i почти все они обладают указанным свойством. В общем случае подстановки с таким свойством существуют, если $q^m > 4$; примером является подстановка обращения ненулевых элементов поля $GF(q)$. Далее будем считать, что условие $q^m > 4$ выполнено.

Ниже при изучении A_1 -схем нам часто придётся умножать некоторые матрицы на матрицу $(Q^{(\Pi)})^2$ с положительными диагональными клетками. При этом будет использоваться следующее утверждение, получающееся непосредственно из правила умножения матриц.

Утверждение 1. Пусть подстановки Π_i выбраны так, что квадраты клеток $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ матрицы $Q^{(\Pi)}$ положительны и U — целочисленная матрица, строки и столбцы которой занумерованы точно так же, как и у матрицы $Q^{(\Pi)}$.

Тогда в строке с номером из $V(i_1, \dots, i_s)$ матрицы $U(Q^{(\Pi)})^2$ либо все элементы столбцов с номерами из $V(j_1, \dots, j_t)$ ненулевые, либо все они равны 0.

Далее свойства матриц переходных вероятностей рассеивающих преобразований будут рассматриваться отдельно для каждого из указанных выше трех классов.

§ 2. Блочнo-равномерные рассеивающие преобразования

Так как каждое из множеств $V(i)$ и $L(V(i))$, $i = 1, \dots, r$, вместе с нулем образует линейное подпространство в $V_n(q)$, то в условии (2), определяющем блочно равномерное преобразование, число l должно иметь вид $l = q^d - 1$ при некотором $d > 0$ и $m \geq rd$. В общем случае имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. Если L — блочно-равномерное линейное преобразование, то $L(V(i_1, \dots, i_s)) \cap V(j_1, \dots, j_t) \neq \emptyset$ для любых множеств $V(i_1, \dots, i_s)$, $V(j_1, \dots, j_t)$ из (1).

Доказательство. Из доказательства будет ясно, что, не теряя общности, можно ограничиться рассмотрением лишь множеств вида $V(1, \dots, s)$, $V(1, \dots, t)$. Возможны два случая: $s \geq t$ и $s < t$.

Пусть $s \geq t$. Тогда выберем векторы $\alpha_i \in V(i)$, $i = 1, \dots, s$, так, что $L(\alpha_i) \in V(i)$ при $i = 1, \dots, t-1$ и $L(\alpha_i) \in V(t)$ при $i = t, \dots, s$. Из определения L следует, что такой выбор возможен. Так как система выбранных векторов линейно независима, то линейно независима и система их образов. Следовательно, векторы $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_s$ и $L(\alpha) = L(\alpha_1) + \dots + L(\alpha_s)$ — ненулевые. Остается заметить, что $\alpha \in V(1, \dots, s)$, а $L(\alpha) \in V(1, \dots, t)$, и потому $L(\alpha) \in L(V(1, \dots, s)) \cap V(1, \dots, t)$.

В случае $s < t$ выберем $\alpha_i \in V(i)$, $i = 1, \dots, s$, так, что $L(\alpha_i) \in V(i)$, и $\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_t \in V(s)$ так, что $L(\alpha_j) \in V(j)$, $j = s+1, \dots, t$. Далее, как и выше, доказывается, что вектор $L(\alpha_1 + \dots + \alpha_t)$ содержится в $L(V(1, \dots, s)) \cap V(1, \dots, t)$. В итоге утверждение доказано.

Следствие 1. Если в A_1 -схеме $(Q_i)^2 > 0$ при $i \in \{1, \dots, r\}$, а рассеивающие преобразования в четных раундах являются блочно-равномерными, то минимальное число раундов, за которое реализуется 2-транзитивное множество подстановок, не превосходит 5. При этом на 5-м раунде достаточно лишь прибавление ключа.

Действительно, из условия $(Q_i)^2 > 0$ и утверждений 1, 2 следует соотношение $(Q^{(\Pi)})^2 L_2(Q^{(\Pi)})^2 > 0$, которое равносильно 2-транзитивности множества подстановок $\Sigma_n \Pi \Sigma_n \Pi L_2 \Sigma_n \Pi \Sigma_n \Pi L_4 \Sigma_n$, полученного за 4 раунда с последующим прибавлением ключа на 5-м раунде.

Заметим, что в общем случае четырех раундов работы A_1 -схемы не достаточно для реализации 2-транзитивного множества подстановок. Так, например, если $q = 2$, $m = rd$, $d = 1$, то матрица $(Q^{(\Pi)})^2 L Q^{(\Pi)}$ при любой подстановке Π не является положительной, поскольку в матрице $Q^{(\Pi)}$ есть нулевые элементы (см. [1]).

Заметим еще, что в условиях утверждения 2 при $m > rd$ о точном значении величин (6) говорить не приходится, поскольку не известно, в какие из множеств (1) отображаются $m - rd$ базисных векторов каждого множества $V(i)$, $i = 1, \dots, r$. Если же $m = rd$, то для величин (6) можно указать точные значения.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда $m = rd$ и $d = 1$, т. е. $m = r$, $n = m^2$.

Выберем стандартный базис пространства $V_n(q)$

$$E = \{e_{11}, \dots, e_{1m}, e_{21}, \dots, e_{2m}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mm}\},$$

где e_{ij} — вектор из $V_n(q)$, у которого j -я координата i -го подблока равна 1, а остальные координаты — нулевые. Тогда каждый вектор из $V_n(q)$ можно записать в виде

$$\alpha = (a_{11}e_{11} + \dots + a_{1m}e_{1m}) + (a_{21}e_{21} + \dots + a_{2m}e_{2m}) + \dots + (a_{m1}e_{m1} + \dots + a_{mm}e_{mm})$$

с коэффициентами $a_{ij} \in GF(q)$.

Сумма слагаемых в i -й паре скобок этой суммы представляет собой блок, в котором все подблоки, кроме i -го, нулевые, а i -й подблок в зависимости от значений коэффициентов a_{ij} может принимать любые значения из $V_m(q)$.

Определим линейное преобразование $L: V_n(q) \rightarrow V_n(q)$, задав его на базисных векторах следующим правилом:

$$L(e_{ij}) = c_{j1i}e_{j1} + c_{j2i}e_{j2} + \dots + c_{jmi}e_{jm}, \quad i, j \in \{1, \dots, m\}, \quad (7)$$

где коэффициенты c_{jki} выбраны с единственным условием: преобразование L должно быть обратимым. Матрица C этого линейного преобразования в базисе E имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{111} & 0 & \dots & 0 & c_{112} & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{11m} & 0 & \dots & 0 \\ c_{121} & 0 & \dots & 0 & c_{122} & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{12m} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1m1} & 0 & \dots & 0 & c_{1m2} & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{1mm} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{211} & \dots & 0 & 0 & c_{212} & \dots & 0 & \dots & 0 & c_{21m} & \dots & 0 \\ 0 & c_{221} & \dots & 0 & 0 & c_{222} & \dots & 0 & \dots & \dots & c_{22m} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{2m1} & \dots & 0 & 0 & c_{2m2} & \dots & 0 & \dots & 0 & c_{2mm} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{m11} & 0 & 0 & \dots & c_{m12} & \dots & 0 & 0 & \dots & c_{m1m} \\ 0 & 0 & \dots & c_{m21} & 0 & 0 & \dots & c_{m22} & \dots & 0 & 0 & \dots & c_{m2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{mm1} & 0 & 0 & \dots & c_{mm2} & \dots & 0 & 0 & \dots & c_{mmm} \end{pmatrix}$$

Так как L обратимо, то матрица C должна быть невырожденной. Заметим, что матрица C разбивается на клетки размеров $t \times t$, а ее строки разбиваются на t полос по t строк в каждой. В каждой клетке матрицы C имеется единственный ненулевой столбец, и система всех ненулевых столбцов каждой полосы линейно независима в силу невырожденности матрицы C .

Теорема 1. Если L — блочно-равномерное преобразование, определенное формулами (7) в базисе E , то для любых двух множеств $V(i_1, \dots, i_s)$, $V(j_1, \dots, j_t)$ из (1) имеет место равенство

$$|L(V(i_1, \dots, i_s)) \cap V(j_1, \dots, j_t)| = \sum_{k=0}^t (-1)^k C_t^k (q^{t-k} - 1)^s.$$

Доказательство. Выразим через базис E произвольные векторы $\alpha \in V(i_1, \dots, i_s)$, $\beta \in V(j_1, \dots, j_t)$:

$$\alpha = (a_{11}e_{i_1 1} + \dots + a_{1m}e_{i_1 m}) + \dots + (a_{s1}e_{i_s 1} + \dots + a_{sm}e_{i_s m}),$$

$$\beta = (b_{11}e_{j_1 1} + \dots + b_{1m}e_{j_1 m}) + \dots + (b_{t1}e_{j_t 1} + \dots + b_{tm}e_{j_t m}),$$

где коэффициенты a_{ij}, b_{ij} удовлетворяют лишь одному условию: в каждой из пар скобок хотя бы один коэффициент отличен от 0. Будем считать a_{ij}, b_{ij} неизвестными и искать их из уравнения

$$L(\alpha) = \beta. \quad (8)$$

Выписав подробно вектор $L(\alpha)$ и приравняв коэффициенты при одинаковых базисных векторах в записях векторов $L(\alpha)$ и β , получим систему уравнений относительно коэффициентов a_{ij}, b_{ij} . Опуская чисто технические подробности этого процесса, мы приведем следующий промежуточный результат. Так как в запись вектора β могут входить лишь векторы e_{ij} при $i = j_1, \dots, j_t$, то все коэффициенты a_{ij} , в которых $j \neq j_1, \dots, j_t$, необходимо будет приравнять к 0. Для остальных коэффициентов системы (8) получим t систем линейных уравнений вида

$$C_u A_u = B_u \quad (9)$$

относительно неизвестных a_{ij}, b_{ij} , где

$$C_u = \begin{pmatrix} c_{j_u 1 i_1} & c_{j_u 1 i_2} & \dots & c_{j_u 1 i_s} \\ c_{j_u 2 i_1} & c_{j_u 2 i_2} & \dots & c_{j_u 2 i_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{j_u m i_1} & c_{j_u m i_2} & \dots & c_{j_u m i_s} \end{pmatrix}, \quad A_u = \begin{pmatrix} a_{1 j_u} \\ a_{2 j_u} \\ \dots \\ a_{s j_u} \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} b_{u 1} \\ b_{u 2} \\ \dots \\ b_{u m} \end{pmatrix}, \quad u = 1, \dots, t,$$

причем из условия $\beta \in V(j_1, \dots, j_t)$ следует, что нас интересуют лишь такие решения, в которых столбцы B_u — ненулевые. Так как множества неизвестных этих систем уравнений попарно не пересекаются, то их можно решать отдельно.

Легко видеть, что столбцы матрицы C_u являются ненулевыми столбцами одной и той же полосы матрицы C и потому образуют линейно независимую систему. Следовательно, $\text{rang } C_u = s$, и в C_u существует s линейно независимых строк, а остальные строки являются их линейными комбинациями. Пусть, например, линейно независимой является система первых s строк. Тогда система (9) будет совместной в том и только том случае, когда последние $m - s$ элементов правой части являются точно такими же линейными комбинациями первых s элементов. Пусть это условие выполнено. Тогда решение системы (9) сведется к решению системы уравнений, полученной из (9) удалением последних $m - s$ уравнений. Запишем эту систему в виде

$$\bar{C}_u A_u = \bar{B}_u. \quad (10)$$

Так как матрица $\bar{C}_u$ квадратная и невырожденная, то система (10) устанавливает взаимно однозначное соответствие между столбцами $\bar{B}_u$ и A_u , т. е. для любого вектора A_u существует единственный вектор $\bar{B}_u$, удовлетворяющий условию (10), а потому и единственный вектор B_u , удовлетворяющий условию (9). При этом нулевому столбцу соответствует нулевой столбец. Прделав описанную процедуру для всех t значений u , мы получим t равенств векторов-столбцов, или равенство двух матриц

$$(\bar{C}_1 A_1, \bar{C}_2 A_2, \dots, \bar{C}_t A_t) = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_t),$$

которое эквивалентно равенству матриц $A = B$, где

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_t), B = (\bar{C}_1^{-1} \bar{B}_1, \bar{C}_2^{-1} \bar{B}_2, \dots, \bar{C}_t^{-1} \bar{B}_t).$$

Заметим, что если $\bar{B}_i$ пробегает множество всех ненулевых столбцов длины s , то и $\bar{C}_i^{-1} \bar{B}_i$ будет пробегать то же самое множество в силу невырожденности матрицы $\bar{C}_i^{-1}$. Так как столбцы B_u ненулевые, то ненулевыми будут столбцы матриц B и A . Кроме того, из включения $\alpha \in V(i_1, \dots, i_s)$ и равенств $a_{ij} = 0$ при $j \neq j_1, \dots, j_t$ следует, что и все строки матриц A также ненулевые. Следовательно, число искомых векторов α равно числу матриц размеров $s \times t$ над полем $GF(q)$, не содержащих нулевых строк и столбцов. Теперь для завершения доказательства остается воспользоваться известной

формулой для числа матриц размеров $s \times t$ над полем $GF(q)$ без нулевых строк и столбцов (см. [5], стр. 69). Теорема доказана.

Следствие 2. В условиях теоремы 1 имеем:

а) величина (6) не зависит от чисел $i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_t$, а зависит лишь от s, t (обозначим ее значение через $\lambda_{s,t}$);

б) для чисел $\lambda_{s,t}$ выполняются соотношения $\lambda_{s,t} = \lambda_{t,s} \neq 0$.

ПРИМЕР 1. Пользуясь формулой из теоремы 1, составим таблицу для чисел $\lambda_{s,t}$ в А-схеме при $q = 2, m = 3, d = 1, r = 3$. Занумеруем строки и столбцы таблицы множествами $V(1, \dots, k), k = 1, \dots, r$, и на пересечении строки с номером $V(1, \dots, s)$ и столбца с номером $V(1, \dots, t)$ запишем число $\lambda_{s,t}$. В записях букву V будем опускать.

Таблица 1

L	(1)	(2)	(3)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,2,3)
(1)	1	1	1	1	1	1	1
(2)	1	1	1	1	1	1	1
(3)	1	1	1	1	1	1	1
(1,2)	1	1	1	7	7	7	25
(1,3)	1	1	1	7	7	7	25
(2,3)	1	1	1	7	7	7	25
(1,2,3)	1	1	1	25	25	25	265

ПРИМЕР 2. Простейшим примером блочно-равномерного рассеивающего преобразования L , определенного формулами вида (7), является преобразование, заданное на базисных векторах формулами

$$L(e_{ij}) = e_{ji}, \quad i, j \in \{1, \dots, r\}.$$

В этом случае матрица C является подстановочной и потому сравнительно просто реализуется путем постоянной и достаточно просто устроенной перестановки координат векторов из V_n . Кроме того, она является матрицей 2-го порядка, что также может положительно сказаться на реализации рассматриваемой А-схемы.

В заключение данного пункта найдем еще величины (6) в А-схеме при $m = rd, d = 2$. Этот случай также может представлять практический интерес, например, при $q = 2, m = 16, r = 8, n = 128$.

$$E_1 = \{e_{11}, \dots, e_{1m}, e_{21}, \dots, e_{2m}, \dots, e_{r1}, \dots, e_{rm}\}$$
$$L(e_{i1}) = c_{11}^{(i)} e_{11} + c_{12}^{(i)} e_{12} + \dots + c_{1m}^{(i)} e_{1m}, \quad L(e_{i2}) = d_{11}^{(i)} e_{11} + d_{12}^{(i)} e_{12} + \dots + d_{1m}^{(i)} e_{1m},$$

$$L(e_{i_3}) = c_{21}^{(i)} e_{21} + c_{22}^{(i)} e_{22} + \dots + c_{2m}^{(i)} e_{2m}, L(e_{i_4}) = d_{21}^{(i)} e_{11} + d_{22}^{(i)} e_{22} + \dots + c_{2m}^{(i)} e_{2m}, \quad (11)$$

.....

$$L(e_{im-1}) = c_{r_1}^{(i)} e_{r_1} + c_{r_2}^{(i)} e_{r_2} + \dots + c_{r_m}^{(i)} e_{r_m}, \quad L(e_{im}) = d_{r_1}^{(i)} e_{r_1} + d_{r_2}^{(i)} e_{r_2} + \dots + d_{r_m}^{(i)} e_{r_m},$$

Теорема 2. В A -схеме над полем $GF(q)$ при $t = 2r$ с биективным преобразованием L , определенным формулами (11), для любых двух множеств $V(i_1, \dots, i_s)$, $V(j_1, \dots, j_r)$ из (1) имеет место равенство

$$|L(V(i_1, \dots, i_s)) \cap V(j_1, \dots, j_t)| = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t (-1)^j 2^i C_s^i C_t^j (q^{t-j} - 1)^{2s-i}. \quad (12)$$

$$\alpha = (a_{11}e_{11} + \dots + a_{1m}e_{1m}) + \dots + (a_{s1}e_{s1} + \dots + a_{sm}e_{sm}),$$

$$\beta = (b_{11}e_{11} + \dots + b_{1m}e_{1m}) + \dots + (b_{r1}e_{r1} + \dots + b_{rm}e_{rm}),$$

где сумма в каждой паре скобок отлична от нулевого вектора. Для доказательства теоремы нам необходимо выяснить, при каких коэффициентах a_{ij}, b_{ij} выполняется равенство (8). Рассуждая по той же схеме, что и при до-

казательстве теоремы 1, мы придем к следующему результату: для любых фиксированных коэффициентов a_{ij} вектора α найдутся требуемые элементы b_{ij} в том и только том случае, когда в матрице

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} & \dots & a_{12t-1} \\ a_{12} & a_{14} & a_{16} & \dots & a_{12t} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} & \dots & a_{12t-1} \\ a_{22} & a_{24} & a_{26} & \dots & a_{22t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s3} & a_{s5} & \dots & a_{s2t-1} \\ a_{s2} & a_{s4} & a_{s6} & \dots & a_{s2t} \end{pmatrix}$$

размеров $2s \times t$ над полем $GF(q)$ нет нулевых столбцов. Напомним, что при доказательстве теоремы 1 нам понадобилось находить число матриц заданных размеров без нулевых строк и столбцов. Здесь же не исключаются случаи, когда некоторые строки матрицы D могут быть нулевыми; ненулевыми должны быть лишь конкатенации i -й и $(i+1)$ -й строк при $i = 1, 3, \dots, 2s-1$. В связи с этим все $2s$ строк матрицы D разбиваются на s пар строк по указанному принципу. Нахождение числа таких матриц легко сводится к нахождению числа $R(u, v)$ всех матриц заданных размеров $u \times v$ без нулевых строк и столбцов при подходящих значениях u, v . Заметим сначала, что при удалении из матрицы D нулевых строк оставшаяся подматрица снова будет матрицей без нулевых столбцов. Кроме того, любая перестановка строк матрицы также не приведет к появлению нулевых столбцов. Следовательно, число матриц D с i нулевыми строками не зависит от того, в каких парах содержатся эти нулевые строки и какая из двух строк соответствующей пары является нулевой. Отсюда получаем:

$$|L(V(i_1, \dots, i_s)) \cap V(j_1, \dots, j_t)| = \sum_{i=0}^s 2^i C_s^i R(2s-i, t). \quad (13)$$

Согласно [5] (см. теорему 1.2)

$$R(u, v) = \sum_{k=0}^v (-1)^k C_v^k (q^{v-k} - 1)^u = \sum_{k=0}^u (-1)^k C_u^k (q^{u-k} - 1)^v. \quad (14)$$

Подставив в (13) первое выражение для $R(2s-i, t)$ из (14), мы и получим искомую формулу (12). Теорема доказана.

Из доказательства этой теоремы видно, как находить величины (6) при любом $l > 2$.

§ 3. Максимально рассеивающие линейные преобразования

Выясним, какие значения принимают величины (6) в А-схеме с параметрами $n, m, r, n = mr$, при использовании максимально рассеивающих преобразований. В этом случае мы приведем сначала описание векторов множества $L(V(i_1, \dots, i_s)) \cap V(j_1, \dots, j_t)$, из которого будут следовать весьма простые оценки величины (6), а затем, используя связи максимально рассеивающих преобразований с МДР-кодами, найдем более громоздкое, но точное ее значение.

Из определения максимально рассеивающего линейного преобразования L видно, что векторы из $V(i_1, \dots, i_s)$ оно может переводить в векторы из $V(j_1, \dots, j_t)$ лишь при $t \geq r + 1 - s$, в частности, векторы из $V(i)$ — только в $V(1, 2, \dots, r)$, векторы из $V(i, j)$ — только в $V(1, 2, \dots, r)$ и в подмножества вида $V(j_1, \dots, j_{r-1})$ и т. д. Вместе с тем, непосредственно из определения не видно, в какие из множеств вида $V(j_1, \dots, j_t)$ и в каком числе фактически переводит L векторы из $V(i_1, \dots, i_s)$ при $t \geq r + 1 - s$.

Для решения этого вопроса напомним сначала, как обычно строятся максимально рассеивающие преобразования в рассматриваемой ситуации.

Будем рассматривать подблоки блока как элементы поля $GF(q^m)$, записанные в некотором базисе над полем $GF(q)$. Тогда каждый блок будет вектор-строкой длины r с элементами из $GF(q^m)$. Любое линейное преобразование ϕ пространства таких строк можно реализовать как умножение векторов на подходящую матрицу A размеров $r \times r$ над полем $GF(q^m)$: $a\phi = aA$. Реализованное таким образом линейное преобразование ϕ обозначим через L_A . В случае, когда L_A — максимально рассеивающее преобразование, матрицу A также называют максимально рассеивающей. Всюду далее под максимально рассеивающими преобразованиями будут пониматься лишь преобразования, реализованные указанным образом, хотя, как доказано А. В. Анашкиным, существуют и другие максимально рассеивающие преобразования пространства $V_n(q)$.

Обозначим через $A(i_1, \dots, i_s)$ подматрицу максимально рассеивающей матрицы A , полученную удалением из A всех ее строк, кроме строк с номерами $i_1, \dots, i_s$. Из определения максимально рассеивающего преобразования легко следует, что для любого $s \in \{1, \dots, r\}$ матрица $A(i_1, \dots, i_s)$ является порождающей для кода длины r , размерности s и с максимально достижимым кодовым расстоянием $r - s + 1$ (такие коды называют МДР-кодами). Это условие равносильно тому, что любые s столбцов матрицы $A(i_1, \dots, i_s)$

линейно независимы (см., например, [3] п. 11.2). Для всей матрицы A это означает, что все ее миноры отличны от нуля. Воспользуемся этим свойством матрицы A для доказательства следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть $L = L_A$ — максимально рассеивающее преобразование пространства $V_n(q^m)$, определенное матрицей A размеров $r \times r$ над полем $GF(q^m)$, и при этом для целых чисел s, t выполнены условия:

$$1 \leq s \leq r, 1 \leq t \leq r, s + t \geq r + 1, r < q^m - 1.$$

Тогда для любых множеств вида $V(i_1, \dots, i_s)$ и $V(j_1, \dots, j_t)$ имеют место неравенства

$$(q^m - 1)^{s+t-r-1} (q^m - r - 1) \leq |L(V(i_1, \dots, i_s)) \cap V(j_1, \dots, j_t)| \leq (q^m - 1)^{s+t-r}.$$

В частности, если $s + t = r + 1$, то $|L(V(i_1, \dots, i_s)) \cap V(j_1, \dots, j_t)| = q^m - 1$.

Доказательство. Для упрощения записей рассмотрим случай, когда $(i_1, \dots, i_s) = (1, \dots, s)$ и $(j_1, \dots, j_t) = (1, \dots, t)$. В остальных случаях рассуждения аналогичны. Напомним, что все миноры, а следовательно, и элементы матрицы A отличны от нуля. Для неизвестных векторов a и $b = aL$ введем обозначения:

$$a = (x_1, \dots, x_r), b = (y_1, \dots, y_r).$$

Заметим, что по условию в искомым векторах a, b ненулевыми должны быть первые s и t координат соответственно, остальные координаты должны быть равными 0. Поэтому система уравнений $aA = b$ подробно записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{s1}x_s &= y_1, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{1t}x_1 + \dots + a_{st}x_s &= y_t, \\ a_{1t+1}x_1 + \dots + a_{st+1}x_s &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{1r}x_1 + \dots + a_{sr}x_s &= 0. \end{aligned}$$

Наша цель заключается в нахождении оценок для числа решений этой системы, не содержащих нулевых компонент. Замечаем, что это есть однородная система r уравнений с $s + t$ неизвестными $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t$. Легко видеть, что ранг основной матрицы этой системы равен r . Если $t = r$, то из условия $a_{sj} \neq 0, j = 1, \dots, r$, следует, что при любых ненулевых значениях $x_1, \dots, x_{s-1}$ найдется не менее $q^m - r - 1$ ненулевых значений для x_s , при которых значения $y_1, \dots, y_r$ будут отличными от 0. Значит, в этом случае утверждение

теоремы верно. Пусть $t < r$. Объявим неизвестные $x_1, \dots, x_{r-t}, y_1, \dots, y_t$ связанными и перенесем соответствующие члены уравнений в левые части, а неизвестные $x_{r-t+1}, \dots, x_s$ — свободными, и содержащие их члены перенесем в правые части. Пусть $s + t > r + 1$. Тогда неизвестным $x_{r-t+1}, \dots, x_{s-1}$ придадим произвольные ненулевые значения из $GF(q^m)$. В итоге получим систему из r уравнений с r неизвестными и с одним свободным параметром x_s . Нетрудно видеть, что определитель Δ этой системы с точностью до знака совпадает с минором порядка $r - t$ матрицы A , и потому $\Delta \neq 0$, правые части системы имеют вид $b_i \oplus a_{si}x_s$. Решая эту систему по формулам Крамера, получим:

$$x_i = \Delta^{-1} (u_i \oplus c_i x_s), i = 1, \dots, r - t, y_j = \Delta^{-1} (v_j \oplus d_j x_s), j = 1, \dots, t,$$

где c_i, d_j с точностью до знака совпадают с минорами матрицы A соответственно порядков $r - t$ и $r - t + 1$ и, значит, отличны от 0. Так как $q^m - 1 > r$, то найдется такое ненулевое значение неизвестного x_s , при котором значения неизвестных $x_1, \dots, x_{r-t}, y_1, \dots, y_t$ будут также ненулевыми. Причем таких значений для x_s найдется не более $q^m - 1$ и не менее $q^m - 1 - r$ при любых ненулевых значениях неизвестных $x_{r-t+1}, \dots, x_{s-1}$. Следовательно, при $s + t > r + 1$ теорема верна. Если же $s + t = r + 1$, то свободным неизвестным является лишь x_s , и в этом случае элементы u_i, v_j будут нулевыми. Тогда значения неизвестных $x_i, i = 1, \dots, r - t, y_j, j = 1, \dots, t$, будут ненулевыми при любом ненулевом значении x_s . Следовательно, в этом крайнем случае число искомых векторов в точности равно $q^m - 1$. Теорема доказана.

Для нахождения точного значения величин (6) нам понадобится одно вспомогательное утверждение А. А. Нечаева о векторах заданного веса (т. е. с заданным числом ненулевых компонент) для любых МДР-кодов, представляющее и самостоятельный интерес в теории кодирования. Так как этот результат, по-видимому, не опубликован, то приведем его доказательство, ограничившись для нашей цели линейными МДР-кодами.

Лемма. Пусть $K(r, s)$ — линейный МДР-код над конечным полем P длины r размерности s с кодовым расстоянием d и $t \in \{d, d + 1, \dots, r\}$. Тогда в $K(r, s)$ число векторов веса t с ненулевыми элементами на t фиксированных позициях не зависит от выбора номеров позиций, а однозначно определяется числами r, s, t .

Доказательство. Для простоты записей будем рассматривать случай, когда фиксированными являются первые t мест. В остальных случаях рассуждения аналогичны. Обозначим через $K_t(r, s)$ множество кодовых слов кода $K(r, s)$ с нулями на последних $r - t$ позициях и через $\bar{K}_t(r, s)$ —

множество векторов длины t , полученных из векторов множества $K_t(r, s)$ удалением $r - t$ последних компонент. Докажем, что пространство $\bar{K}_t(r, s)$ есть МДР-код длины t и размерности $s_1 = s - (r - t)$. (Заметим, что $s - (r - t) > 0$ в силу условия $d \leq t \leq r$.) Очевидно, что $\dim \bar{K}_t(r, s) \leq s_1$. Поэтому достаточно доказать, что в матрице C , составленной из строк кода $\bar{K}_t(r, s)$, любые s_1 столбцов линейно независимы (см. следствие 2 теоремы 2 п. 11.2 из [4]). Для простоты возьмем первые s_1 столбцов и покажем, что в C найдется строка с любым набором элементов поля P . Так как $s_1 + r - t = s$, то в исходном коде $K(r, s)$ для любых $a_1, \dots, a_{s_1}$ найдется вектор $(a_1, \dots, a_{s_1}, a_{s_1+1}, \dots, a_t, 0, \dots, 0)$ при некоторых $a_{s_1+1}, \dots, a_t$, а тогда в $\bar{K}_t(r, s)$ встретится вектор $(a_1, \dots, a_{s_1}, a_{s_1+1}, \dots, a_t)$. Следовательно, система выбранных столбцов линейно независима, и $\bar{K}_t(r, s)$ есть МДР-код. Из его построения видно, что множества векторов веса t с ненулевыми компонентами на первых t местах в кодах $K(r, s)$, $\bar{K}_t(r, s)$ совпадают. И в то же время это множество векторов совпадает с множеством всех векторов веса t кода $\bar{K}_t(r, s)$. Однако в любом МДР-коде множество векторов любого фиксированного веса w определяется основными параметрами кода и числом w (см. теорему 6 п. 11.3 из [4]). Это и доказывает утверждение леммы.

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 3, то

$$|L(V(i_1, \dots, i_s)) \cap V(j_1, \dots, j_t)| = (q^m - 1) \sum_{j=0}^{s+t-(r+1)} (-1)^j C_{s+t-1}^j q^{m(s+t-(r+j+1))}. \quad (15)$$

Доказательство. Рассмотрим МДР-код $K(i_1, \dots, i_s)$ длины r и размерности s над полем $P = GF(q^m)$ с порождающей матрицей $A(i_1, \dots, i_s)$:

$$K(i_1, \dots, i_s) = \{(x_1, \dots, x_s) A(i_1, \dots, i_s) : x_1, \dots, x_s \in GF(q^m)\}, \quad (16)$$

и обозначим множество всех его векторов веса t через $K_t(i_1, \dots, i_s)$. Так как кодовое расстояние $d = r - s + 1$ и по условию $s + t \geq r + 1$, то $t \geq d$, и потому множество $K_t(i_1, \dots, i_s)$ не пусто. Пусть $K_t(i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_t)$ есть подмножество всех его векторов с ненулевыми компонентами на местах с номерами $j_1, \dots, j_t$. По теореме 6 п. 11.3 из [3]

$$|K_t(i_1, \dots, i_s)| = C_r^t (q^m - 1) \sum_{j=0}^{s+t-(r+1)} (-1)^j C_{t-1}^j q^{m(s+t-(r+1+j))}.$$

Согласно лемме величина $K_t(i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_t)$ не зависит от выбора чисел $j_1, \dots, j_t$. Поэтому

$$|K_t(i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_t)| = (q^m - 1) \sum_{j=0}^{s+t-(r+1)} (-1)^j C_{t-1}^j q^{m(s+t-(r+1+j))}.$$

Из последней формулы видно, что число $|K_t(i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_t)|$ не зависит от $i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_t$, а зависит лишь от s и t , причем s и t входят в нее симметричным образом. Обозначим это число через $\nu(s, t)$. Теперь для нахождения искомой величины нам нужно удалить из $K_t(i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_t)$ все векторы, которые определяются формулой (16) при наборах $(x_1, \dots, x_s)$, содержащих нулевые координаты, и найти число оставшихся векторов. Множество всех подлежащих удалению векторов можно представить в виде объединения множеств $U_1, \dots, U_s$, где U_i соответствует наборам векторов $(x_1, \dots, x_s)$, в которых $x_i = 0$, а остальные компоненты произвольные. Очевидно, что U_i есть МДР-код длины r и размерности $s-1$. Его порождающая матрица получается удалением из матрицы $A(i_1, \dots, i_s)$ ее i -й строки. По формуле включения–исключения получаем:

$$|U_1 \cup \dots \cup U_s| = C_s^{s-1} \nu(s-1, t) - C_s^{s-2} \nu(s-2, t) + \dots + (-1)^{s-2} \nu(1, t).$$

Отсюда видно, что искомая величина $|L(V(i_1, \dots, i_s)) \cap V(j_1, \dots, j_t)|$ также зависит лишь от s и t . Обозначим ее через $\mu(s, t)$. Из проведенных рассуждений видно, что

$$\mu(s, t) = \nu(s, t) - C_s^{s-1} \nu(s-1, t) + C_s^{s-2} \nu(s-2, t) - \dots + (-1)^{s-1} \nu(1, t).$$

Заменив в последней формуле величины $\nu(j, t)$ их найденными выше значениями при $j = 1, \dots, s$ и воспользовавшись равенствами

$$\sum_{i=0}^k C_u^i C_v^{k-i} = C_{u+v}^k, \quad k \leq u, k \leq v,$$

получим искомую формулу (15). Теорема доказана.

Следствие 3. В условиях теорем 3–4 для чисел $\mu_{s,t}$ выполняются следующие соотношения:

$$1) \mu_{s,t} = \mu_{t,s}, \quad 2) \mu_{s,t} > 0 \Leftrightarrow s + t \geq r + 1, \quad 3) \mu_{s,t} = q^m - 1, \text{ если } s + t = r + 1.$$

Следствие 4. Если в A_1 -схеме подстановки Π_i выбраны так, что $(Q_i)^2 > 0$, $i \in \{1, \dots, r\}$, а преобразования L_2, L_4 — максимально рассеивающие, то матрица $(Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}_2 (Q^{(\Pi)})^2$ не является положительной, а

$$(Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}_2 (Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}_4 Q^{(\Pi)} > 0, \quad (17)$$

т. е. минимальное число раундов N , за которое A_1 -схемой реализуется 2-транзитивное множество подстановок, равно 6, причем на 6-м раунде требуется лишь прибавление ключей.

Доказательство. Первое утверждение следует из утверждения 1, если учесть, что $\mu_{s,t} = 0$ при $s + t < r + 1$. Докажем неравенство (17). Из теоремы 4 и утверждения 1 следует, что в матрице $(Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}_2(Q^{(\Pi)})^2$ в строках с номерами $V(i_1, \dots, i_s)$ будут ненулевыми все элементы из столбцов с номерами $V(j_1, \dots, j_t)$ при всех $t \geq r - s + 1$ и любых $j_1, \dots, j_t$. Далее, применяя теорему 4 к матрице, транспонированной к $Q^{(\Pi)}$, замечаем, что в матрице $\tilde{L}_4 Q^{(\Pi)}$ в строках с номерами $V(j_1, \dots, j_t)$ при всех $t \geq r - s + 1$ и любых $j_1, \dots, j_t$ в каждом столбце есть ненулевые элементы. Отсюда следует, что в строках с номерами из $V(i_1, \dots, i_s)$ матрицы $(Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}_2(Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}_4 Q^{(\Pi)}$ все элементы отличны от нуля. Так как это верно для любых множеств $V(i_1, \dots, i_s)$ из (1), то неравенство (19) доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В статье Ф. М. Малышева [3] оценивалось число N раундов, необходимое для реализации 2-транзитивного множества подстановок XSL-сетями, в которых подблоками были элементы поля F , в качестве подстановок Π_i использовалась подстановка τ обращения ненулевых элементов поля F , к блокам в нечетных раундах применялись мономиальные матрицы, а в четных — матрицы с отличными от нуля элементами и их алгебраическими дополнениями. При этом, естественно, возникает вопрос о сохранении полученных оценок показателей 2-транзитивности при замене подстановки τ любыми подстановками Π_i , удовлетворяющими условию $(Q^{(\Pi_i)})^2 > 0$ (которое выполняется при $\Pi_i = \tau$). На этот вопрос в случае конечного поля F отвечает следующее утверждение, которое существенно обобщает и частично улучшает результаты из [3].

Утверждение 3. Если в A_1 -схеме из следствия 2 заменить тождественные преобразования L_1, L_3 умножением на мономиальные матрицы, а максимально рассеивающие преобразования L_2, L_4 — умножением на матрицы с неравными нулю минорами 1-го и $(r-1)$ -го порядков, то для полученной XSL-сети будет выполняться соотношение

$$(Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}_2(Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}_4(Q^{(\Pi)})^2 > 0. \quad (18)$$

Если при этом число $q^m - r - 1$ больше максимального числа нулей по столбцам матриц Q_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, то выполняется неравенство (17).

Иначе говоря, 2-транзитивное множество подстановок реализуется в 1-м случае за 7, а во 2-м случае — за 6 раундов.

Доказательство. Возможность указанной замены L_1, L_3 с сохранением оценок объясняется тем, что матрица $Q^{(PS)}Q^{(П)}$, как и $(Q^{(П)})^2$, состоит из положительных клеток тех же размеров, но расположенных несколько иначе (в соответствии с перестановкой S). Заменяем еще L_2, L_4 на указанные в утверждении 3 преобразования. Из доказательства теоремы 3 видно, что при $t = r$ и любом s требовалось лишь, чтобы отличными от нуля были элементы матрицы A , а при $s = r$ и любом t — чтобы отличными от нуля были все миноры порядка $r - 1$ матрицы A . Таким образом, неравенства из теоремы 3 при $s = r$ и любом t , а также $t = r$ и любом s останутся верными при указанной замене L_2, L_4 . Следовательно, по утверждению 1 в матрице $(Q^{(П)})^2 \tilde{L}_2 (Q^{(П)})^2$ будут отличными от нуля все элементы столбцов и строк с номерами из $V(1, 2, \dots, r)$, а в матрице $\tilde{L}_4 (Q^{(П)})^2$ в системе строк с номерами из $V(1, 2, \dots, r)$ каждый столбец будет содержать ненулевые элементы. Отсюда и из правила умножения матриц следует, что неравенство (18) выполнено. Теперь для доказательства неравенства (17) достаточно показать, что в матрице $\tilde{L}_4 Q^{(П)}$ в системе всех строк с номерами из $V(1, \dots, r)$ каждый столбец будет содержать хотя бы один ненулевой элемент. Для простоты записей рассмотрим столбец с номером $b = (b_1, \dots, b_r) \in V(1, \dots, s)$. Согласно теореме 3 в строки с номерами из $V(1, \dots, r)$ под действием L_4 перейдут все строки с номерами вида $(x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0) \in V(1, \dots, s)$, где $x_1, \dots, x_{s-1}$ — любые, отличные от 0, а x_s принимает не менее $q^m - r - 1$ значений при любых фиксированных $x_1, \dots, x_{s-1}$. Зафиксируем $x_1, \dots, x_{s-1}$ так, чтобы выполнялись условия $q_{x_i, b_i}^{(i)} \neq 0$, $i = 1, \dots, s - 1$. Так как $(q^m - r - 1) > p$, то для указанных $i = 1, \dots, s - 1$ найдется значение x_s , при котором $q_{x_s, b_s}^{(s)} \neq 0$. Отсюда, учитывая, что $Q_{1, \dots, s} = Q_1 \otimes \dots \otimes Q_s$, получаем: в столбце с номером b матрицы $Q_{1, \dots, s}$ найдется ненулевой элемент, который перейдет в строку с номером из $V(1, \dots, r)$. Следствие 3 доказано.

ПРИМЕР 3. Пользуясь формулой (17), составим таблицу для чисел $\mu_{s,t}$ в A -схеме при $q = 2$, $n = 9$, $m = 3$, $d = 1$ в случае, когда L_2, L_4 совпадают с максимально рассеивающим преобразованием L_A , определяемом матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

над полем $GF(2^3)$. В этом случае таблица имеет следующий вид:

Таблица 2

L	(1)	(2)	(3)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,2,3)
(1)	0	0	0	0	0	0	7
(2)	0	0	0	0	0	0	7
(3)	0	0	0	0	0	0	7
(1,2)	0	0	0	7	7	7	28
(1,3)	0	0	0	7	7	7	28
(2,3)	0	0	0	7	7	7	28
(1,2,3)	7	7	7	28	28	28	238

§ 4. Составные рассеивающие преобразования

Рассмотрим А-схему с блоками длины $n = mr$, r подблоками длины m , в которой $r = dh$, $d > 1$, $h > 1$, и подстановка Π устроена так же, как и в А-схемах из § 2, 3. Для рассматриваемых ниже вопросов, не теряя общности, можно считать, что на всех раундах действует одно и то же рассеивающее составное линейное преобразование L . Оно представляется в виде произведения $L = \bar{g}f$, где $\bar{g}$ — пока любая перестановка подблоков, индуцируемая подстановкой g , действующей на множестве $\{1, \dots, r\}$ всех номеров подблоков, а f определяется следующим образом.

Каждый блок α представляется в виде конкатенации h подвекторов длины md :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h). \quad (19)$$

Вектор α_i условимся называть i -м каскадом блока α . Подчеркнем, что каскад α_i является конкатенацией всех подблоков с номерами

$$(i-1)d+1, (i-1)d+2, \dots, id, \quad i=1, 2, \dots, h. \quad (20)$$

Пусть U_i — множество i -х каскадов всех блоков; является линейным пространством размерности md над полем $GF(q)$, и f задается системой линейных преобразований $f_1, \dots, f_h$, действующих соответственно на пространствах $U_1, \dots, U_h$. Так что для вектора (19)

$$f(\alpha) = (f_1(\alpha_1), f_2(\alpha_2), \dots, f_h(\alpha_h)).$$

В данном параграфе мы будем рассматривать лишь А₁-схемы с составными рассеивающими преобразованиями в четных раундах, причем все

$f_1, \dots, f_h$ будем считать либо максимально рассеивающими, либо блочно-равномерными преобразованиями, действующими на соответствующих пространствах. Кроме того, будем предполагать, что квадраты диагональных клеток Q_i матрицы $Q^{(n)}$ положительны.

Введем еще следующие обозначения:

если $\{i_1, \dots, i_s\} = M$, то $V(i_1, \dots, i_s) = V(M)$ и $N(V(M)) = M$ для любого $V(i_1, \dots, i_s)$ из (1);

$W(i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d$, — множество всех блоков, в которых каскады с номерами $i_1, \dots, i_k$ ненулевые, а остальные каскады нулевые, в частности, $W(i)$ состоит из всех подмножеств $V(j_1, \dots, j_s)$, где $1 \leq s \leq d$, а $(j_1, \dots, j_s)$ — любое сочетание из чисел (20);

$\bar{W}(i) = V((i-1)d+1, (i-1)d+2, \dots, id)$ и $N(\bar{W}(i))$ есть множество чисел (20);

$C(\bar{W}(i_1) \cup \dots \cup \bar{W}(i_t))$ — замыкание множества $\bar{W}(i_1) \cup \dots \cup \bar{W}(i_t)$, т. е. система множеств

$$\{V(R_1 \cup \dots \cup R_t) : \emptyset \neq R_s \subset N(\bar{W}(i_s)), s = 1, \dots, t\}.$$

Множество чисел вида $N(\bar{W}(i_1)) \cup \dots \cup N(\bar{W}(i_t))$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq h$, $1 \leq t \leq h$, назовем полно-каскадным, а при $t < h$ — собственным полно-каскадным.

При рассмотрении указанной А-схемы естественно возникает вопрос о выборе подстановки g , при которой матрица $(Q^{(n)})^2 \tilde{L}$ сходится к положительной, а значит, и к равномерной матрице. В следующем утверждении дается необходимое и более сильное достаточное условие на g .

Теорема 5. Пусть в А-схеме используется составное рассеивающее преобразование $L = \tilde{g}f$, где $\tilde{g}$ — перестановка подблоков, индуцируемая перестановкой g номеров подблоков, преобразования $f_1, \dots, f_h$ все являются или максимально рассеивающими, или блочно-равномерными, и $(Q_i)^2 > 0$, $i = 1, \dots, r$.

Тогда матрица $(Q^{(n)})^2 \tilde{L}$ сходится к равномерной матрице в том и только том случае, когда в группе $\langle g \rangle$ отсутствует область импримитивности, являющаяся собственным полно-каскадным множеством.

Заметим, что с определением области импримитивности (или блока) группы подстановок и с простейшими свойствами блоков можно познакомиться, например, по книге [7] (см. также [2]).

Доказательство. Матрица $(Q^{(n)})^2 \tilde{L}$ сходится к равномерной матрице в том и только том случае, когда при некотором p матрица $((Q^{(n)})^2 \tilde{L})^p$ положительна. Из утверждения 1 следует, что последнее условие выполнено

лишь в том случае, когда в каждой строке матрицы $((Q^{(n)})^2 \tilde{L})^{p-1}$ найдется хотя бы один ненулевой элемент в столбцах с номерами каждого из множеств (1). В связи с этим, необходимо проследить, в какие из множеств (1) будут переходить векторы заданного множества $V(i_1, \dots, i_s)$ под действием раундовых преобразований. Напомним, что подстановки σ_x не изменяют разностей блоков, подстановки Π_i действуют независимо на множествах $V(i)$ при $i = 1, \dots, r$, а преобразование L переставляет номера столбцов матрицы $(Q^{(n)})^2$ на втором раунде, матрицы $(Q^{(n)})^2 \tilde{L} (Q^{(n)})^2$ на четвертом раунде и т. д. Из всего сказанного следует, что для решения вопроса об условиях и скорости сходимости матрицы $(Q^{(n)})^2 \tilde{L}$ к положительной матрице достаточно следить лишь за действиями преобразования $\tilde{L}$. Условимся каждое применение к матрице преобразования $\tilde{L}$ с последующим умножением на матрицу $(Q^{(n)})^2$ называть шагом работы схемы. Кроме того, достаточно проследить лишь за векторами множеств $V(j)$, $j = 1, \dots, h$, т. е. за ненулевыми векторами отдельных подблоков, так как если векторы из них удастся перевести во все множества из (1), то, очевидно, то же самое будет выполняться и для векторов из $V(i_1, \dots, i_s)$ при $s > 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда f_i — максимально рассеивающие преобразования.

Зафиксируем в матрице $(Q^{(n)})^2$ строку c номером из $V(j)$. По условию ненулевыми элементами в этой строке будут все элементы из столбцов с номерами из $V(j)$. Пользуясь свойством максимально рассеивающего преобразования, указанным в теореме 3, и утверждением 1, проследим за переходами номеров столбцов из множества $V(j)$.

Шаг 1. Под действием подстановки $\hat{g}$ множество $V(j)$ перейдет в множество $V(g(j))$, которое, очевидно, содержится в единственном из множеств $W(1), \dots, W(h)$. Если оно содержится в $W(i)$, то после 1-го шага в строках с номерами из $V(j)$ матрицы $(Q^{(n)})^2 \tilde{L} (Q^{(n)})^2$ ненулевыми будут все элементы столбцов с номерами из полно-каскадного множества $\bar{W}(i)$. Обозначим $N(\bar{W}(i)) = M_1$.

Шаг 2. Под действием преобразования $\hat{g}$ множество $\bar{W}(i) = V(M_1)$ перейдет в $V(g(M_1))$. Для нахождения образов векторов из множества $V(g(M_1))$ под действием f необходимо найти все те множества $W(s)$, $s = 1, \dots, h$, в которые переходят некоторые подблоки из $V(g(M_1))$, т. е. для которых выполняется условие

$$g(M_1) \cap N(\bar{W}(s)) \neq \emptyset.$$

Пусть для определенности это условие выполняется при $s = 1, \dots, t$, причем $g(M_1) \cap N(\bar{W}(s)) = M_{1,s}$. Тогда векторы из $V(M_{1,s})$ под действием f перейдут в некоторые множества из (1), содержащиеся в $W(s)$. Эти множества описаны в теоремах 3–4. Среди них максимальным по рангу будет множество $\bar{W}(s)$. Отсюда следует, что под действием f множество $V(g(M_1))$ перейдет в некоторые подмножества вида $V(M)$, из которых максимальным по рангу будет множество $V(M_2)$, где

$$M_2 = N(\bar{W}(1)) \cup \dots \cup N(\bar{W}(t)).$$

Шаг 3. Здесь аналогичным образом будем находить все множества из (1), в которые будут переходить векторы из $V(g(M))$ для всех M , полученных на 2-м шаге.

Продолжая этот процесс и выписывая из получаемых на каждом шаге множеств лишь максимальные по рангу, получим последовательность множеств

$$M_1, M_2, M_3, \dots \quad (21)$$

Из ее построения видно, что каждое из множеств M_i является полно-каскадным,

$$|M_1| \leq |M_2| \leq |M_3| \leq \dots, \quad (22)$$

и если $M_c = M_d$, то $M_{c+1} = M_{d+1}$. Отсюда следует, что последовательность (21) является смешанной периодической с некоторым минимальным периодом

$$M_c, \dots, M_{c-1+T}. \quad (23)$$

При этом, очевидно, будут выполняться равенства $M_{c+b} \subseteq g(M_{c+b-1})$, $b = 1, \dots, T-1$. Отсюда и из (22) следует, что $M_{c+b} = g(M_{c+b-1})$, $b = 1, \dots, T-1$.

Пусть группа $\langle g \rangle$ имеет областью импримитивности собственное полно-каскадное множество M . Тогда, применяя к $V(j)$ при $j \in M$ описанный выше процесс, мы после каждого шага будем получать полно-каскадное множество, содержащееся в области импримитивности, сопряженной с M . Следовательно, будем иметь

$$M_c \neq \{1, \dots, r\}. \quad (24)$$

Отсюда видно, что при любом натуральном x элементы матрицы $((Q^{(T)})^2 \tilde{L})^x$ в строках с номерами из $V(j)$ и столбцах с номерами из $V(1, \dots, r)$ будут нулями, и значит, матрица $(Q^{(T)})^2 \tilde{L}$ не будет сходиться к равномерной матрице.

Пусть группа $\langle g \rangle$ не имеет области импримитивности, являющейся собственным полно-каскадным множеством. Допустим, что при некотором $j \in \{1, \dots, r\}$ будет выполняться неравенство (24). Если период $T = 1$, то M_c

является собственным полно-каскадным инвариантным подмножеством группы $\langle g \rangle$. Если $T > 1$ и множества из (23) попарно не пересекаются, то они являются нетривиальными полно-каскадными областями импримитивности группы $\langle g \rangle$. Пусть $T > 1$ и какие-либо два множества из (23) имеют непустое пересечение, например, $M_c \cap M_{c+i} = B_1 \neq \emptyset$. Тогда по последовательности (23) можно построить периодическую последовательность с минимальным периодом

$$B_1, B_2, \dots, B_S, \quad (25)$$

в которой S делит T , $g(B_m) = B_{m+1}$, $|B_1| < |M_c|$, и каждое из множеств B_i является полно-каскадным. Если $s = 1$ или $s > 1$ и множества из (25) попарно не пересекаются, то они являются областями импримитивности группы $\langle g \rangle$. В противном случае из них аналогичным образом можно будет построить новую периодическую последовательность множеств еще меньшей мощности. Продолжая этот процесс, мы придем к периодической последовательности с одним множеством или с попарно не пересекающимися множествами. Таким образом, во всех случаях получаем нетривиальную полно-каскадную область импримитивности группы $\langle g \rangle$, что противоречит условию. Следовательно, для любого $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ найдется такое c , что

$$M_c = \{1, \dots, r\}. \quad (26)$$

Не теряя общности, можно считать, что c — одно и то же для всех j . В противном случае можно было бы взять наибольшее из них. Наша цель заключается в том, чтобы на некотором раунде получить все множества из (1).

Из (26) следует, что на шаге с номером c получено множество $\bar{W}(1) \cup \dots \cup \bar{W}(h)$. Тогда по свойству максимально рассеивающих преобразований, доказанному в теоремах 3–4, мы на $(c+1)$ -м шаге получим замыкание $C(\bar{W}(1) \cup \dots \cup \bar{W}(h))$.

Возьмем теперь произвольное полно-каскадное множество M порядка $d(h-1)$ и найдем множество $g^{-1}(M)$. Пусть для простоты записей

$$M = N(\bar{W}_1) \cup \dots \cup N(\bar{W}_{h-1}).$$

Если для некоторого $i \in \{1, \dots, h\}$ имеет место равенство $M \cap g(N(\bar{W}(i))) = \emptyset$, то $g(N(\bar{W}(i))) = N(\bar{W}(i))$, что противоречит условию на группу $\langle g \rangle$. Следовательно, $g^{-1}(M) \cap N(\bar{W}(i)) \neq \emptyset$ при $i = 1, \dots, h$, и потому $V(g^{-1}(M))$ содержится в $C(\bar{W}(1) \cup \dots \cup \bar{W}(h))$. Значит, множество $V(g^{-1}(M))$ получено на $(c+1)$ -м шаге, а на $(c+2)$ -м шаге оно под действием подстановки g перейдет в $V(M)$, из которого под действием f получим замыкание множества M . Аналогично будут получены замыкания для всех полно-каскадных мно-

жеств порядка $d(h-1)$. Заметим, что при этом сохранится и множество $\bar{W}(1) \cup \dots \cup \bar{W}(h)$, поскольку $g\{1, 2, \dots, r\} = \{1, 2, \dots, r\}$. Аналогично, на $(c+3)$ -м шаге мы из замыканий полно-каскадных множеств порядка $d(h-1)$ получим замыкания всех полно-каскадных множеств порядка $d(h-2)$, сохранив полученные ранее замыкания полно-каскадных множеств порядков dh и $d(h-1)$. Продолжая этот процесс, мы после $(c+h)$ -го шага будем иметь замыкания всех полно-каскадных множеств, которые, очевидно, исчерпывают все множества из (1). Следовательно, $((Q^{(II)})^2 \tilde{L})^{c+h} (Q^{(II)})^2 > 0$, что и означает, что $\text{Exp}((Q^{(II)})^2 \tilde{L}) \leq c + h + 1$.

В случае, когда f_i являются блочно равномерными преобразованиями, рассуждения аналогичны. Однако здесь в раунде с номером c вместе с множеством $\bar{W}(1) \cup \dots \cup \bar{W}(h)$ будет получено и его замыкание. Значит, в этом случае $((Q^{(II)})^2 \tilde{L})^{c+h-1} (Q^{(II)})^2 > 0$. Теорема доказана.

Следствие 5. В условиях и обозначениях из доказательства теоремы 5 имеем:

$$c + 2 \leq \text{Exp}((Q^{(II)})^2 \tilde{L}) \leq c + h + 1, \text{ если } f_i \text{ максимально рассеивающие, и}$$

$$c + 1 \leq \text{Exp}((Q^{(II)})^2 \tilde{L}) \leq c + h, \text{ если } f_i \text{ блочно равномерные,}$$

где c – минимальное число, при котором $M_c = \{1, \dots, r\}$ для всех $j = 1, \dots, r$.

Заметим, что указанные в следствии 5 оценки являются, по-видимому, грубыми, так как при их получении до $(c+1)$ -го шага мы следили лишь за полнокаскадными множествами максимальных рангов.

Из доказательства теоремы 5 видно, что для минимизации экспоненты матрицы $(Q^{(II)})^2 \tilde{L}$ подстановку g необходимо выбирать так, чтобы параметр c был по возможности наименьшим. Легко видеть, что абсолютный минимум c равен 1 и достигается лишь при $h \leq d$ и для подстановок g , которые номера подблоков каждого каскада переводят в номера подблоков всех каскадов. Для этого случая получаем

Следствие 6. Если в A_1 -схеме из теоремы 5 выполняется неравенство $h \leq d$ и подстановка g переводит номера подблоков каждого каскада в номера подблоков всех каскадов, то матрица $(Q^{(II)})^2 \tilde{L}$ сходится к равномерной матрице, и $\text{Exp}((Q^{(II)})^2 \tilde{L}) = 4$, если f_i максимально рассеивающие, и $\text{Exp}((Q^{(II)})^2 \tilde{L}) = 3$, если f_i блочно равномерные.

Доказательство. Пусть f_i — максимально рассеивающие преобразования. В рассматриваемом случае равенство (26) будет выполняться при $c = 2$, и на 3-м шаге будет получено замыкание множества $\bar{W}(1) \cup \dots \cup \bar{W}(h)$. Докажем, что после 4-го шага появятся все множества из (1).

Пусть, например, $M \subset \{1, \dots, r\}$ и $M \cap N(W_s) \neq \emptyset$, например, только при $s = 1, \dots, t$. Выберем множества $R_i \in N(\bar{W}(i)), i = 1, \dots, h$, так, чтобы $g^{-1}(R_1 \cup \dots \cup R_h) = N(\bar{W}_1) \cup \dots \cup N(\bar{W}_t)$. При указанном условии на g такой выбор возможен, причем $R_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, h$. На 4-м шаге подстановка g переведет множество $V(R_1 \cup \dots \cup R_h)$, полученное на предыдущем шаге, в $V(N(\bar{W}_1) \cup \dots \cup N(\bar{W}_t))$, из которого с помощью f получится замыкание $C(\bar{W}(1) \cup \dots \cup \bar{W}(h))$, которое, очевидно, содержит $V(M)$. Следовательно, $\text{Exp}((Q^{(n)})^2 \tilde{L}) = 4$.

В случае, когда f_i — блочно равномерные преобразования, рассуждения аналогичны, следует лишь учесть, что замыкание множества $\bar{W}(1) \cup \dots \cup \bar{W}(h)$ получится на 2-м шаге. Поэтому здесь $\text{Exp}((Q^{(n)})^2 \tilde{L}) = 3$.

Следствие 7. В A_1 -схеме из теоремы 5 в условиях следствия 6 минимальное число раундов N , за которое реализуется 2-транзитивное множество подстановок, равно 9, если f_i максимально рассеивающие, и 7, если f_i блочно равномерные.

§ 5. О сравнении рассеивающих свойств линейных преобразований

По результатам предыдущих параграфов для минимального числа N раундов, за которые A_1 -схема может реализовать 2-транзитивное множество подстановок, имеем следующие соотношения:

$N \leq 5$ — при блочно равномерных рассеивающих преобразованиях;

$N = 6$ — при максимально рассеивающих преобразованиях;

$N = 7$ — при составных рассеивающих преобразованиях с использованием блочно равномерных преобразований f_i ;

$N = 9$ — при составных рассеивающих преобразованиях с использованием максимально рассеивающих преобразований f_i .

Таким образом, блочно равномерные рассеивающие преобразования обеспечивают наилучшую скорость получения в A_1 -схемах 2-транзитивного множества подстановок, т. е. минимальную величину экспоненты матрицы $P^{(2)}$ переходных вероятностей пар различных блоков по сравнению с другими рассмотренными преобразованиями. Однако, как было указано во введении, под основным рассеивающим свойством преобразования L в A_1 -схемах мы понимаем его способность обеспечивать сравнительно быструю сходимость матрицы $P^{(2)}$, или, что то же самое, матрицы $(Q^{(n)})^2 \tilde{L}$, к равномерной матрице, при условии $(Q^{(n)})^2 > 0$. Известно, что малая величина

экспоненты матрицы способствует и сравнительно быстрой сходимости ее к равномерной матрице. Однако, ниоткуда не следует, что указанное свойство является определяющим для скорости сходимости. Поэтому вопрос о сравнении скоростей сходимости матриц к равномерной матрице требует особого исследования. Вопрос этот с теоретической точки зрения является, как правило, сложным. Экспериментальная проверка в практически интересных случаях также не реальна в силу большого размера блоков. Кроме того, на скорость сходимости матрицы $(Q^{(\Pi)})^2 L$ может влиять и подстановка Π . В связи с этим, нам представляется интересным следующий подход, который реально осуществим и позволяет качественно оценивать скорость сходимости матриц при достаточно больших значениях параметров.

Отвлечемся на время от A_1 -схем и вместо матриц $(Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}$ рассмотрим матрицы вида $\bar{Q}\tilde{L}$, где $\bar{Q}$ — матрица, полученная из $(Q^{(\Pi)})^2$ заменой ее диагональных клеток равномерными матрицами тех же размеров. Клетку матрицы $\bar{Q}$, заменившую клетку $(Q_{i_1, \dots, i_s})^2$, обозначим через $\bar{Q}_{i_1, \dots, i_s}$. Клетка $\bar{Q}_{i_1, \dots, i_s}$ является матрицей размеров $M^s \times M^s$ с элементами, равными M^{-s} , где $M = q^m - 1$. Отсюда видно, что сама матрица $\bar{Q}$ является сильно неравномерной. Так, например, в ней элементы клетки $\bar{Q}_{1, 2, \dots, m}$ в M^{m-1} раз меньше элементов клеток $\bar{Q}_i$.

Будем сравнивать скорости сходимости таких матриц к равномерной матрице при выборе L из некоторых рассмотренных выше классов рассеивающих линейных преобразований путем непосредственного вычисления их элементов.

1. Пусть L — блочно равномерное линейное преобразование из теоремы 1.

Матрицы $(\bar{Q}\tilde{L})^k \bar{Q}$ при $k = 1, 2, \dots$ можно записать в явном виде. Следствие 2 теоремы 1 подсказывает нам, что для более компактной записи этих матриц их целесообразно разбить на m горизонтальных и m вертикальных полос размеров соответственно

$$C_m^1 M, \quad C_m^2 M^2, \dots, \quad C_m^m M^m.$$

В итоге матрицы $(\bar{Q}\tilde{L})^k \bar{Q}$ разобьются на m^2 прямоугольных подматриц. Обозначим подматрицы-клетки размеров $C_m^s M^s \times C_m^t M^t$ для матрицы $(\bar{Q}\tilde{L})^k \bar{Q}$ в виде $(a_{s,t}^{(k)})$.

Утверждение 4. При введенных обозначениях для любых $s, t \in \{1, \dots, m\}$

имеют место равенства: 1) $a_{s,t}^{(1)} = \lambda_{s,t} M^{-(s+t)}$; 2) $a_{s,t}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^m C_m^i C_m^t \lambda_{i,t} a_{s,i}^{(k)}$.

Доказательство. Формула 1) следует непосредственно из теоремы 1, ее следствия 2 и правила умножения матриц. Докажем рекуррентную формулу 2).

Напомним, что умножение матрицы $(\bar{Q}\tilde{L})^k \bar{Q}$ на матрицу $\tilde{L}$ равносильно перестановке столбцов матрицы, причем, как следует из теоремы 1, из i -й вертикальной полосы в t -ю переставляется $C_m^i C_m^t \lambda_{i,t}$ столбцов. А так как каждый элемент, содержащийся в s -й горизонтальной и i -й вертикальной полосах матрицы S , равен $a_{s,i}^{(k)}$, то сумма всех элементов каждой строки из s -й горизонтальной полосы, расположенных в t -й вертикальной полосе, равна $\sum_{i=1}^m C_m^i C_m^t \lambda_{i,t} a_{s,i}^{(k)}$. При умножении матрицы $(\bar{Q}\tilde{L})^k \bar{Q}\tilde{L}$ на $\bar{Q}$ эта сумма умножается на элемент матрицы $\bar{Q}_{i_1 \dots i_t}$, который равен M^{-t} . В итоге получим требуемую формулу для элемента $a_{s,i}^{(k+1)}$. Утверждение 4 доказано.

Для наглядности выпишем общий вид матрицы $S = \bar{Q}\tilde{L}\bar{Q}$:

$$S = \begin{pmatrix} (\lambda_{1,1} M^{-2}) & (\lambda_{1,2} M^{-3}) & (\lambda_{1,3} M^{-4}) & \dots & (\lambda_{1,m} M^{-(m+1)}) \\ (\lambda_{2,1} M^{-3}) & (\lambda_{2,2} M^{-4}) & (\lambda_{2,3} M^{-5}) & \dots & (\lambda_{2,m} M^{-(m+2)}) \\ (\lambda_{3,1} M^{-4}) & (\lambda_{3,2} M^{-5}) & (\lambda_{3,3} M^{-6}) & \dots & (\lambda_{3,m} M^{-(m+3)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_{m,1} M^{-(m+1)}) & (\lambda_{m,2} M^{-(m+2)}) & (\lambda_{m,3} M^{-(m+3)}) & \dots & (\lambda_{m,m} M^{-2m}) \end{pmatrix},$$

где $(\lambda_{i,j} M^{-(i+j)})$ — матрица размера $C_m^i M^i \times C_m^j M^j$ с элементами $\lambda_{i,j} M^{-(i+j)}$.

ПРИМЕР 4. Найдем в условиях утверждения 4 матрицы $S = \bar{Q}\tilde{L}\bar{Q}$ и $T = (\bar{Q}\tilde{L})^3 \bar{Q}$ при $q = 2$, $m = r = 3$ и блочно-равномерном рассеивающем преобразовании L из теоремы 1.

Из утверждения 4, пользуясь таблицей 1 для значений $\lambda_{s,t}$ из примера 1, получим:

$$S = \begin{pmatrix} (7^{-2}) & (7^{-3}) & (7^{-4}) \\ (7^{-3}) & (7 \cdot 7^{-4}) & (25 \cdot 7^{-5}) \\ (7^{-4}) & (25 \cdot 7^{-5}) & (265 \cdot 7^{-6}) \end{pmatrix};$$

числа строк 1-й, 2-й и 3-й полосы матрицы S равны: $3 \cdot 7$, $3 \cdot 7^2$, 7^3 соответственно.

Для нахождения матрицы T выпишем сначала формулу для $a_{s,t}^{(3)}$ в общем случае (пользуясь утверждением 4):

$$a_{s,t}^{(3)} = M^{-(s+t)} \sum_{j=1}^m C_m^j \lambda_{j,t} M^{-j} \sum_{i=1}^m C_m^i \lambda_{i,j} \lambda_{s,i} M^{-i}.$$

Теперь, произведя необходимые промежуточные вычисления с точностью до 0,001, получим:

$$T \approx 7^{-4} \begin{pmatrix} (13,53) & (5,66) & (3,75) \\ (5,66) & (4,87) & (4,57) \\ (3,75) & (4,57) & (4,81) \end{pmatrix}.$$

II. Пусть L — максимально рассеивающее преобразование.

Здесь подматрицы-клетки размера $C_m^s M^s \times C_m^t M^t$ для матрицы $(\bar{Q}\tilde{L})^k \bar{Q}$ обозначим через $b_{s,t}^{(k)}$ и выпишем для них рекуррентные формулы.

Утверждение 5. При введенных обозначениях для любых $s, t \in \{1, \dots, m\}$

имеют место равенства: 1) $b_{s,t}^{(1)} = \mu_{s,t} M^{-(s+t)}$; 2) $b_{s,t}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^m C_m^i C_m^t \mu_{i,t} a_{s,i}^{(k)}$.

Доказательство утверждения 5 получается из доказательства утверждения 4 заменой чисел $\lambda_{i,j}$ на $\mu_{i,j}$ и числа m на r .

В частности, здесь матрица $S_1 = \bar{Q}\tilde{L}\bar{Q}$, с учетом равенств $\mu_{i,j} = 0$ при $j \leq r - i$, выглядит следующим образом:

$$S_1 = \begin{pmatrix} (0) & (0) & \dots & (0) & (\mu_{1,r} M^{-(r+1)}) \\ (0) & (0) & \dots & (\mu_{2,r-1} M^{-(r+1)}) & (\mu_{2,r} M^{-(r+2)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (0) & (\mu_{r-1,2} M^{-(r+1)}) & \dots & (\mu_{r-1,r-1} M^{-(2r-2)}) & (\mu_{r-1,r} M^{-(2r-1)}) \\ (\mu_{r,1} M^{(r+1)}) & (\mu_{r,2} M^{-(r+2)}) & \dots & (\mu_{r,r-1} M^{-(2r-1)}) & (\mu_{r,r} M^{-2r}) \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 5. Найдём матрицы S_1 и $T_1 = (\bar{Q}\tilde{L})^3 \bar{Q}$ при $q = 2$, $m = r = 3$ и максимально рассеивающем преобразовании $L = L_A$ из примера 3.

Здесь матрицы T_1 и S_1 при таком же разбиении на полосы и такой же точности вычислений, что и в примере 4, имеют вид:

$$S_1 = \begin{pmatrix} (0) & (0) & (7^{-3}) \\ (0) & (7^{-3}) & (4 \cdot 7^{-4}) \\ (7^{-3}) & (4 \cdot 7^{-4}) & (34 \cdot 7^{-5}) \end{pmatrix}, \quad T_1 \approx 7^{-4} \begin{pmatrix} (4,86) & (4,49) & (4,78) \\ (4,49) & (4,83) & (4,65) \\ (4,8) & (4,7) & (4,71) \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из примеров 4, 5 видно, что максимально рассеивающая матрица обеспечивает более быструю сходимость матрицы $\bar{Q}\tilde{L}$ к равномерной матрице по сравнению с блочно равномерной матрицей. И этот факт имеет простое объяснение. Блочно равномерное преобразование более равномерно рассеивает элементы множеств (1) по всем множествам из (1) по сравнению с максимально рассеивающим преобразованием, однако при этом слабо учитываются порядки множеств (1). Так, например, преобразование из теоремы 1 отображает из множеств $V(i)$ в множество $V(j_1, \dots, j_t)$ ровно $(q-1)^t$ элементов, и значит, при $q=2$ — по одному элементу в каждое из множеств (1), хотя мощности множества $V(j_1, \dots, j_t)$ в данном случае при $t=1$ и $t=r$ равны соответственно $2^m - 1$ и $(2^m - 1)^r$. Поэтому в матрице S при блочно-равномерном преобразовании самые большие элементы находятся в левом верхнем углу, они и создают неравномерность в степенях матрицы. В то же время максимально рассеивающее преобразование отображает все элементы из $V(i)$ в одно и то же, самое мощное, множество $V(1, \dots, r)$, что дает возможность более равномерного рассеивания элементов на следующем раунде.

III. Пусть L — составное рассеивающее преобразование.

Здесь, как и выше, для нахождения матрицы $\bar{Q}\tilde{L}$ необходимо знать числа (6). В общем случае вся информация о числах (6) размещается в матрице размера $(2^r - 1) \times (2^r - 1)$. Однако в п. I, II всю эту информацию оказалось возможным разместить в матрицах размеров $r \times r$, поскольку число (6) однозначно определялось значениями s, t . При использовании составного рассеивающего преобразования в общем случае аналогичный факт не имеет места, и потому матрицей размеров $r \times r$ здесь не обойтись. Кроме того, здесь матрица $\bar{Q}\tilde{L}$ зависит и от разбиения блоков на каскады, и от выбора подстановки g . В связи с этим в данном случае сравнение скорости сходимости матрицы $\bar{Q}\tilde{L}$ к равномерной со случаями I, II затруднительно. Такое сравнение скоростей возможно при конкретных подстановках g , что в этой работе не рассматривается.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что при надлежащем выборе подстановок P_i матрицы Q_i^2 могут быть достаточно близкими к равномерным, так, что в них максимальный элемент лишь в 2-3 раза отличается от минимального. Отсюда, учитывая указанную выше огромную разницу между элементами разных клеток матрицы $(Q^{(n)})^2$, сохраняющуюся при переходе к $\bar{Q}$, можно предполагать, что имеющиеся в матрице $(Q^{(n)})^2$ отклонения от равномерности не будут существенно влиять на различие в скоростях сходимости мат-

риц $(Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}$ и $\bar{Q}\tilde{L}$ к равномерной матрице. В связи с этим скорость сходимости матрицы $\bar{Q}\tilde{L}$ можно рассматривать как качественную оценку скорости сходимости матрицы $(Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L}$.

Указанное предположение подтверждают, в частности, компьютерные вычисления матрицы $((Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L})^3 Q^{(\Pi)}$ для A_1 -схем из примеров 4, 5 при выборе в качестве подстановок Π_i подстановки обращения ненулевых элементов поля $GF(2^3)$. Для наглядности выпишем матрицы T' и T'_1 минимальных элементов клеток матриц $((Q^{(\Pi)})^2 \tilde{L})^3 Q^{(\Pi)}$, соответствующих клеткам матриц T и T_1 примеров 4, 5:

$$T' = \begin{pmatrix} 14,55 & 5,02 & 2,82 \\ 5,02 & 4,74 & 4,16 \\ 2,82 & 4,16 & 4,76 \end{pmatrix}, \quad T'_1 = \begin{pmatrix} 4,85 & 4,44 & 4,77 \\ 4,45 & 4,81 & 4,64 \\ 4,76 & 4,64 & 4,71 \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Выполнение условия $(Q_i)^2 > 0$, использованного нами при изучении A_1 -схем, достигалось за счет выбора подходящих подстановок Π_i и за счет такого режима работы схемы, когда нетривиальные линейные преобразования применяются лишь в четных раундах. Однако такой режим работы может повлечь необходимость увеличения числа раундов для обеспечения стойкости схемы по отношению к некоторым методам анализа. В связи с этим может оказаться полезным другой путь, заключающийся в замене матриц Q_i на положительные матрицы за счет незначительного изменения A -схемы. Из [1] следует, что этого нельзя добиться за счет лучшего выбора подстановок Π_i . Однако этого можно добиться путем замены группы Σ_m каким-либо другим, более мощным, множеством преобразований. Например, вместо группы Σ_m можно использовать объединение нескольких смежных классов полной аффинной группы $GL(m, q)$ по подгруппе Σ_m , выбор которых из заданного множества производится в каждом раунде по независимому ключу. Введение такой динамики в A -схему усложняет её с точки зрения XSL-метода анализа блочных шифров.

В заключение выражаю признательность рецензентам А. М. Зубкову, А. С. Кузьмину, Ф. М. Малышеву, Б. А. Погорелову и А. Е. Тришину за полезные замечания к первоначальному варианту данной статьи.

Список литературы

1. Глухов М. М. О 2-транзитивных произведениях регулярных групп подстановок. — Труды по дискретной математике, т. 3. М.: 2000. С. 37–52.
2. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А. Алгебра, т. II. — М.: «Гелиос-АРВ», 2003.

3. *Малышев Ф. М.* Дважды транзитивные XSL-семейства подстановок. — Матем. вопросы криптографии, т. 1, вып. 2, с. 93–106.
4. *Мак-Вильямс Ф. Д., Слоэн Н. Д. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.
5. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978.
6. *Daemen J., Rijmen V.* The Rijndael block cipher. — AES Proposal, 1998. P. 1–37.
7. *Wielandt H.* Finite permutation groups. — N.Y.-London: Acad. Press, 1984.