Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Копытцев, О пороговом эффекте для среднего числа решений системы случайных уравнений, *Матем. вопр. криптогр.*, 2019, том 10, выпуск 3, 67–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 03:41:41

О пороговом эффекте для среднего числа решений системы случайных уравнений

В. А. Копытцев

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 10.I.2019

Аннотация. Исследуется система со случайным выбором переменных в каждом уравнении. Доказывается теорема о пороговом эффекте для математического ожидания числа решений.

Ключевые слова: система случайных уравнений, число решений, математическое ожидание, пороговый эффект

On a threshold effect for the mean number of solutions of systems of random equations

V. A. Kopyttsev

Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow

Abstract. The system with a random sampling of variables in each equation is investigated. The theorem on a threshold effect for the mean number of solutions is proved.

Keywords: system of random equations, number of solutions, mathematical expectation, threshold effect

1. Введение

Пусть ξ — число решений случайной системы с числом уравнений T и числом неизвестных n . Математическое ожидание $E\xi$ обладает пороговым эффектом при $T, n \rightarrow \infty$, если существует такое число $\gamma^* > 0$, что $E\xi \rightarrow 0$ при $T/n \rightarrow \gamma > \gamma^*$ и $E\xi \rightarrow \infty$ при $T/n \rightarrow \gamma < \gamma^*$.

Пороговый эффект для различных характеристик систем случайных уравнений исследовался в ряде работ (см., например, [1–4]). В данной работе исследуется система случайных уравнений с независимыми левыми и правыми частями и случайным выбором неизвестных, принимающих значения в произвольном конечном множестве.

Пусть $V_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$, $q \geq 2$, функция $\varphi(y_1, \dots, y_d)$ задана на множестве V_q^d всех d -мерных векторов с координатами $y_1, \dots, y_d \in V_q$ и принимает значения в некотором множестве A_φ .

Обозначим Σ_φ группу инерции функции φ в симметрической группе S_d перестановок аргументов, определяемую условием

$$\sigma \in \Sigma_\varphi \Leftrightarrow \varphi(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(d)}) \equiv \varphi(y_1, \dots, y_d).$$

Рассмотрим случайное уравнение

$$\varphi(x_{s_1}, \dots, x_{s_d}) = a \quad (1)$$

относительно переменных $x_1, \dots, x_n \in \{0, \dots, q-1\}$, где индексы $s_1, \dots, s_d$ образуют случайную выборку без возвращения из множества $\{1, \dots, n\}$. Будем предполагать, что упорядоченные выборки $(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(d)})$, $\sigma \in \Sigma_\varphi$, не различаются и объединяются в один исход. На множестве $\Omega = \{\omega\}$ возможных исходов (классов эквивалентных левых частей уравнения) задано равномерное распределение вероятностей

$$P(\omega) = \left[\binom{n}{d} \frac{d!}{|\Sigma_\varphi|} \right]^{-1} \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (2)$$

Правая часть $a \in A_\varphi$ уравнения (1) является случайной величиной и не зависит от левой части. Положим

$$p(\alpha) = \mathbf{P}\{a = \alpha\}, \quad \alpha \in A_\varphi.$$

Пусть случайная система уравнений

$$\varphi(x_{s_1(t)}, \dots, x_{s_d(t)}) = a_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3)$$

состоит из независимо выбранных уравнений вида (1).

Предположим теперь, что задан конечный набор функций

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_R\},$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_r &= \varphi_r(y_1, \dots, y_{d(r)}), \\ y_1, \dots, y_{d(r)} &\in V_q, \quad r = 1, \dots, R.\end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}\varphi_r(x_{s_1(t,r)}, \dots, x_{s_{d(r)}(t,r)}) &= a_{t,r}, \\ t &= 1, \dots, T(r), \quad r = 1, \dots, R,\end{aligned}\tag{4}$$

составленную из независимо выбранных подсистем вида (3), соответствующих функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_R$. Распределения величин $a_{t,r}$ — правых частей системы (4) — могут зависеть от номера r .

Будем исследовать свойства математического ожидания числа решений системы уравнений (4) в предположении, что $T(r) \rightarrow \infty$, R фиксировано и

$$\frac{T(r)}{T} \rightarrow \tau(r), \quad r = 1, \dots, R,\tag{5}$$

где $T = T(1) + \dots + T(R)$, а $\tau(r)$ — постоянные величины.

2. Теорема о пороговом эффекте

Введем в рассмотрение величины

$$L_{\varphi_r}(\alpha; d_0, \dots, d_{q-1}) = |\{y \in W(d_0, \dots, d_{q-1}) : \varphi_r(y) = \alpha \in A_{\varphi_r}\}|, \tag{6}$$

где $W(d_0, \dots, d_{q-1})$ — множество всех векторов $y = (y_1, \dots, y_{d(r)})$, в которых d_i координат принимают значение $i \in V_q$, $d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r)$. Положим

$$L_{\varphi_r}(d_0, \dots, d_{q-1}) = \sum_{\alpha \in A_{\varphi_r}} P_r(\alpha) L_{\varphi_r}(\alpha; d_0, \dots, d_{q-1}), \tag{7}$$

где $P_r(\alpha) = \mathbf{P}\{a_{t,r} = \alpha\}$.

Для формулировки теоремы нам понадобится следующее условие.

Условие А. Каждая функция $\varphi_r = \varphi_r(y_1, \dots, y_{d(r)})$, $r = 1, \dots, R$, принимает все значения в множестве A_{φ_r} , $|A_{\varphi_r}| \geq 2$, и при всех $\alpha \in A_{\varphi_r}$, $t = 1, \dots, T(r)$

$$P_r(\alpha) = \mathbf{P}\{a_{t,r} = \alpha\} > 0.$$

Заметим, что при условии **A** выполнены неравенства

$$L_{\varphi_r}(d_0, \dots, d_{q-1}) > 0 \quad (8)$$

при всех $d_0, \dots, d_{q-1} \geq 0$, $d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r)$.

В области значений переменных $z_0, \dots, z_{q-1}$, заданной условиями

$$0 \leq z_i, \quad z_0 + \dots + z_{q-1} = 1, \quad (9)$$

определим функцию

$$f(z_0, \dots, z_{q-1}) = \sum_{r=1}^R \tau(r) \ln \left[\sum_{\substack{d_0, \dots, d_{q-1} \\ d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r)}} \prod_{i=0}^{q-1} (z_i)^{d_i} L_{\varphi_r}(d_0, \dots, d_{q-1}) \right], \quad (10)$$

где $(z_i)^{d_i} = 1$ при $d_i = 0$. В силу (8) функция (10) принимает конечные значения во всех точках области (9). Определим также функцию

$$H(z_0, \dots, z_{q-1}) = \sum_{i=0}^{q-1} z_i \ln z_i. \quad (11)$$

Лемма. Пусть выполнено условие **A**. Тогда существует конечная верхняя граница

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \gamma^*(\varphi_1, \dots, \varphi_R; \tau(1), \dots, \tau(R); P_1(\alpha), \dots, P_R(\alpha)) = \\ &= \sup_{\substack{0 \leq z_0, \dots, 0 \leq z_{q-1} \\ z_0 + \dots + z_{q-1} = 1}} \frac{H(z_0, \dots, z_{q-1})}{f(z_0, \dots, z_{q-1})}, \end{aligned} \quad (12)$$

зависящая от функций φ_r , чисел $\tau(r)$ и распределений $P_r(\alpha)$, $\alpha \in A_{\varphi_r}$, $r = 1, \dots, R$.

Доказательство. Из определения величин (6) вытекает, что

$$L_{\varphi_r}(\alpha; d_0, \dots, d_{q-1}) \leq |W(d_0, \dots, d_{q-1})| = \frac{d(r)!}{d_0! \cdot \dots \cdot d_{q-1}!}, \quad (13)$$

при этом равенство в соотношении (13) не может достигаться одновременно при различных α . По условию **A** все $P_r(\alpha) < 1$. Поэтому при любом наборе $d_0, \dots, d_{q-1}$, $d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r)$, выполнено неравенство

$$L_{\varphi_r}(d_0, \dots, d_{q-1}) < \frac{d(r)!}{d_0! \cdot \dots \cdot d_{q-1}!}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{\substack{d_0, \dots, d_{q-1} \\ d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r)}} \prod_{i=0}^{q-1} (z_i)^{d_i} L_{\varphi_r}(d_0, \dots, d_{q-1}) \leq 1 - \delta_{\varphi_r}$$

при некоторой постоянной δ_{φ_r} , $0 < \delta_{\varphi_r} < 1$. Следовательно,

$$f(z_0, \dots, z_{q-1}) \leq \sum_{r=1}^R \tau(r) \ln(1 - \delta_{\varphi_r}) < 0 \quad (14)$$

и в области (9) существует конечная верхняя граница (12). Лемма 1 доказана.

Пусть $\mathbf{E}\xi$ — математическое ожидание числа решений системы уравнений (4). Положим

$$T = T(1) + \dots + T(R).$$

Теорема. Пусть $n, T \rightarrow \infty$, выполнены условие **A** и условие (5). Тогда

$$\mathbf{E}\xi \rightarrow 0, \text{ если } \underline{\lim}(T/n) > \gamma^*,$$

$$\mathbf{E}\xi \rightarrow \infty, \text{ если } \overline{\lim}(T/n) < \gamma^*,$$

где γ^* — постоянная величина, заданная формулой (12).

Замечание 1. В [5] исследовалась система уравнений, левая часть которой определяется так же, как в системе (4), а правая является результатом подстановки в левую часть некоторого вектора $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Таким образом, рассмотренная в [5] система является заведомо совместной, в то время как при наличии порогового эффекта (для среднего числа решений) вероятность совместности системы (3) стремится к нулю, если $T/n \rightarrow \gamma > \gamma^*$.

Замечание 2. Условие **A** в теореме 1 является существенным. Пусть, например, $R = 1$, $\tau_1 = 1$, $\varphi_1 = \varphi = y_1 \vee y_2$. Положим $P(0) = \mathbf{P}\{a_t = 0\} = 1$. В этом случае система уравнений является заведомо совместной, так как всегда имеет решение $x^0 = (0, \dots, 0)$. Поэтому пороговый эффект не наблюдается.

Замечание 3. Частный вариант теоремы 1 ранее был доказан Г.В. Балакиным в [3] для случая $R = 1$ и функции от двух булевых переменных $\varphi_1 = \varphi(y_1, y_2)$.

Пример. Рассмотрим пример системы, для которой пороговый эффект имеет место, и вычислим величину γ^* . Пусть $q = 2$, $R = 2$,

$$\varphi_r = \varphi_r(y_1, \dots, y_d) = y_1 \oplus \dots \oplus y_d \oplus (r - 1), \quad r = 1, 2,$$

где $d \geq 1$, знак $\oplus$ означает сложение в $GF(2)$. Положим $r' = r - 1$. Для величин (6) имеем

$$L_{\varphi_r}(\alpha; d_0, d_1) = \binom{d}{d_1} I\{d_1 \equiv r' \oplus \alpha \pmod{2}\},$$

где $I\{E\}$ обозначает индикатор события E . Поэтому функция (10) представляется формулой

$$f(z_0, z_1) = \tau(1) \ln \phi_1(z_0, z_1) + \tau(2) \ln \phi_2(z_0, z_1),$$

где

$$\begin{aligned} \phi_r(z_0, z_1) &= \sum_{\alpha \in \{0,1\}} P\{a_{t,r} = \alpha\} \times \\ &\times \sum_{v \geq 0: (r' \oplus \alpha) + 2v \leq d} \binom{d}{(r' \oplus \alpha) + 2v} z_1^{(r' \oplus \alpha) + 2v} z_0^{d - ((r' \oplus \alpha) + 2v)}. \end{aligned}$$

Положим

$$\mathbf{P}\{a_{t,r} = 0\} = \mathbf{P}\{a_{t,r} = 1\} = 1/2, \quad r = 1, 2.$$

В этом случае

$$\phi_r(z_0, z_1) \big|_{z_0+z_1=1} = 1/2, \quad f(z_0, z_1) \big|_{z_0+z_1=1} = -\ln 2,$$

и величина γ^* принимает значение

$$\gamma^* = \sup_{z_0, z_1: z_0+z_1=1} \frac{H(z_0, z_1)}{f(z_0, z_1)} = \sup_{z_0, z_1: z_0+z_1=1} \frac{-z_0 \ln z_0 - z_1 \ln z_1}{\ln 2} = 1.$$

Доказательство теоремы. Обозначим через $\pi_r(x)$ вероятность события, которое состоит в том, что вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет уравнению с функцией φ_r . Пусть вектор x содержит $n_i(x)$ координат, принимающих значение $i \in V_q$. Всем векторам x , имеющим одинаковый набор чисел

$$n_i(x) = n_i, \quad i \in V_q, \quad (15)$$

соответствует одинаковая вероятность

$$\pi_r(x) = P_r[n_0, \dots, n_{q-1}]. \quad (16)$$

Количество векторов x с фиксированным набором чисел (15) равно

$$\frac{n!}{n_0! \cdot \dots \cdot n_{q-1}!}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi &= \sum_{x \in \{0, \dots, q-1\}^n} \prod_{r=1}^R (\pi_r(x))^{T(r)} = \\ &= \sum_{\substack{n_0, \dots, n_{q-1} \\ n_0 + \dots + n_{q-1} = n}} \frac{n!}{n_0! \cdot \dots \cdot n_{q-1}!} \prod_{r=1}^R (P_r[n_0, \dots, n_{q-1}])^{T(r)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для вероятности (16) имеем

$$P_r[n_0, \dots, n_{q-1}] = \sum_{\alpha \in A_{\varphi_r}} P_r(\alpha) P_r[n_0, \dots, n_{q-1} | a_{t,r} = \alpha], \quad (18)$$

где (с учетом формулы (2))

$$\begin{aligned} P_r[n_0, \dots, n_{q-1} | a_{t,r} = \alpha] &= \left[\binom{n}{d(r)} \frac{d(r)!}{|\Sigma_{\varphi_r}|} \right]^{-1} \times \\ &\times \sum_{\substack{d_0, \dots, d_{q-1} \\ d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r)}} \left(\frac{\prod_{s=0}^{q-1} d_s!}{|\Sigma_{\varphi_r}|} L_{\varphi_r}(\alpha; d_0, \dots, d_{q-1}) \right) \prod_{i=0}^{q-1} \binom{n_i}{d_i} \end{aligned} \quad (19)$$

и $L_{\varphi_r}(\alpha; d_0, \dots, d_{q-1})$ — величина, заданная равенством (6).

Выберем некоторое число ε , $0 < \varepsilon < 1$, и разобьем сумму (17) на две части

$$\mathbf{E}\xi = \sum^* + \sum^{**}, \quad (20)$$

полагая

$$\sum^* = \sum_{\substack{n_0 + \dots + n_{q-1} = n \\ n_i \geq \varepsilon n, i=0, q-1}} \frac{n!}{n_0! \cdot \dots \cdot n_{q-1}!} \prod_{r=1}^R (P_r[n_0, \dots, n_{q-1}])^{T(r)},$$

$$\sum^{**} = \sum_{\substack{n_0 + \dots + n_{q-1} = n \\ \exists i: n_i < \varepsilon n}} \frac{n!}{n_0! \cdot \dots \cdot n_{q-1}!} \prod_{r=1}^R (P_r [n_0, \dots, n_{q-1}])^{T(r)}.$$

В области

$$\sum_{i=0}^{q-1} n_i = n, \quad n_i \geq \varepsilon n, \quad i = \overline{0, q-1}, \quad (21)$$

значений вектора $(n_0, \dots, n_{q-1})$ выполняются соотношения $n_0, \dots, n_{q-1} \rightarrow \infty$, и из формул (18), (19) с учетом оценок

$$\binom{n}{d(r)} = \frac{n^{d(r)}}{d(r)!} (1 + o(1)), \quad \binom{n_i}{d_i} = \frac{n_i^{d_i}}{d_i!} (1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, q-1,$$

получаем

$$\begin{aligned} P_r [n_0, \dots, n_{q-1}] &= \\ &= (1 + o(1)) \sum_{\alpha \in A_{\varphi_r}} P_r(\alpha) \times \sum_{\substack{d_0, \dots, d_{q-1} \\ d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r)}} L_{\varphi_r}(\alpha; d_0, \dots, d_{q-1}) \prod_{i=0}^{q-1} \left(\frac{n_i}{n}\right)^{d_i} = \\ &= (1 + o(1)) \sum_{\substack{d_0, \dots, d_{q-1} \\ d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r)}} L_{\varphi_r}(d_0, \dots, d_{q-1}) \prod_{i=0}^{q-1} \left(\frac{n_i}{n}\right)^{d_i}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $L_{\varphi_r}(d_0, \dots, d_{q-1})$ — величина, заданная формулой (7).

Далее, опять рассматривая формулу (17), получаем

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^R (P_r [n_0, \dots, n_{q-1}])^{T(r)} &= \exp \left\{ T \sum_{r=1}^R \tau(r) \ln P_r [n_0, \dots, n_{q-1}] \right\} = \\ &= \exp \left\{ T f \left(\frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n} \right) + o(T) \right\}. \end{aligned}$$

Вместе с этим, при условии (21) согласно формуле Стирлинга (см. стр. 67 в [6])

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n_0! \cdot \dots \cdot n_{q-1}!} &= \\ &= (1 + o(1)) (2\pi n)^{(1-q)/2} \left(\prod_{i=0}^{q-1} \frac{n_i}{n} \right)^{-1/2} \exp \left\{ -nH \left(\frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $H(z_0, \dots, z_{q-1})$ — величина, определенная формулой (11). Поэтому с учетом (10)

$$\sum^* = (1 + o(1)) \sum_{\substack{n_0 + \dots + n_{q-1} = n \\ (n_i/n) \geq \varepsilon, i=0, q-1}} (2\pi n)^{(1-q)/2} \left(\prod_{i=0}^{q-1} \frac{n_i}{n} \right)^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -nR \left(T; \frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n} \right) \right\}, \quad (24)$$

где (полагаем $H = H\left(\frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n}\right)$, $f = f\left(\frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n}\right)$)

$$R \left(T; \frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n} \right) = \\ = H - \frac{T}{n}(f + o(1)) = H - \frac{T}{n}f(1 + o(1)) = f \left[\frac{H}{f} - \frac{T}{n}(1 + o(1)) \right]. \quad (25)$$

При условии

$$\frac{T}{n} \geq \gamma^* + \delta, \quad \delta > 0, \quad (26)$$

каждому слагаемому в оценке (24), начиная с некоторых значений n, T , соответствует оценка (с учетом (25), (12) и неравенств $f\left(\frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n}\right) < 0$)

$$R \left(T; \frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n} \right) \geq -f \left(\frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n} \right) (\delta + w_n), \quad (27)$$

где $w_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. При этом согласно (14) существует такая постоянная величина $\delta' > 0$, что

$$-f \left(\frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n} \right) \geq \delta' > 0. \quad (28)$$

Поэтому из (27) следует оценка

$$R \left(T; \frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n} \right) \geq \delta'(\delta + w_n) > 0.$$

Следовательно, при условии (26)

$$\sum^* \rightarrow 0.$$

Пусть теперь

$$\frac{T}{n} \leq \gamma^* - \delta, \quad \delta > 0. \quad (29)$$

Функция

$$G(z_0, \dots, z_{q-1}) = \frac{H(z_1, \dots, z_{q-1})}{f(z_1, \dots, z_{q-1})}$$

непрерывна в каждой точке множества

$$Z = \{(z_0, \dots, z_{q-1}) : z_0 + \dots + z_{q-1} = 1, \quad z_i \geq 0, \quad i \in V_q\}.$$

Поэтому при $0 < \delta'' < \delta$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется такое слагаемое в правой части (24), что

$$G\left(\frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n}\right) \geq \gamma^* - \delta'',$$

и с учетом символического соотношения $\frac{T}{n}(1 + o(1)) = \frac{T}{n} + o(1)$ при $0 \leq \frac{T}{n} \leq \gamma^* - \delta$ (см. (25))

$$\begin{aligned} R\left(T; \frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n}\right) &= f\left(\frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n}\right) \left(G\left(\frac{n_0}{n}, \dots, \frac{n_{q-1}}{n}\right) - \frac{T}{n} + o(1)\right) \leq \\ &\leq -\delta'(\delta - \delta'' + w'_n) < 0, \end{aligned}$$

где величина δ' берется из неравенства (28) и $w'_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, если выполняется условие (29), то $\sum^* \rightarrow \infty$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что при условии (26)

$$\sum^{**} \rightarrow 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(i_1, \dots, i_k) &= \left\{ (n_0, \dots, n_{q-1}) : \sum_{i=0}^{q-1} n_i = n; \quad n_{i_j} < \varepsilon n, \quad j = \overline{1, k}; \right. \\ &\quad \left. n_i \geq \varepsilon n, \quad i \in \{0, \dots, q-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\} \right\} \end{aligned}$$

и представим $\sum^{**}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum^{**} &= \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q-1} \sum_{(n_0, \dots, n_{q-1}) \in N_\varepsilon(i_1, \dots, i_k)} \frac{n!}{n_0! \cdot \dots \cdot n_{q-1}!} \times \\ &\quad \times \prod_{r=1}^R (P_r[n_0, \dots, n_{q-1}])^{T(r)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Сначала оценим комбинаторный множитель в правой части (30). При $(n_0, \dots, n_{q-1}) \in N_\varepsilon(i_1, \dots, i_k)$ имеем

$$\frac{n!}{n_0! \dots n_{q-1}!} = \frac{\left(\sum_{j=1}^k n_{i_j}\right)!}{\prod_{j=1}^k n_{i_j}!} \cdot \binom{n}{\sum_{j=1}^k n_{i_j}} \cdot \frac{\left(n - \sum_{j=1}^k n_{i_j}\right)!}{\prod_{\nu \notin \{i_1, \dots, i_k\}} n_\nu!}. \quad (31)$$

Для оценки каждого из трех множителей в правой части (31) воспользуемся общим неравенством вида

$$\frac{m!}{m_1! \dots m_s!} \leq \frac{m^m}{m_1^{m_1} \dots m_s^{m_s}} = \exp \left\{ -mH \left(\frac{m_1}{m}, \dots, \frac{m_s}{m} \right) \right\}, \quad (32)$$

где $s \geq 2$, $m_1 + \dots + m_s = m$, следующим из оценки $\binom{n}{r} \leq \frac{n!}{r!(n-r)!}$ [7, с. 27]. Кроме того, для оценки первого множителя применим неравенство

$$-H \left(\frac{m_1}{m}, \dots, \frac{m_s}{m} \right) \leq -H \left(\frac{1}{s}, \dots, \frac{1}{s} \right) = \ln s, \quad (33)$$

которое отражает экстремальное свойство энтропии равномерного распределения на конечном множестве.

Используя (32), (33), для первого множителя в правой части (31) получаем оценку

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^k n_{i_j}\right)!}{\prod_{j=1}^k n_{i_j}!} \leq \exp\{k \cdot n\varepsilon \ln k\}.$$

Для второго множителя с помощью (32) находим, что при $k\varepsilon < 1$

$$\binom{n}{\sum_{j=1}^k n_{i_j}} \leq \exp\{-nH(k\varepsilon, 1 - k\varepsilon)\},$$

где $-H(k\varepsilon, 1 - k\varepsilon)$ есть энтропия биномиального распределения $B(k\varepsilon)$.

Перед оценкой третьего множителя отметим, что

$$0 \leq \sum_{j=1}^k n_{i_j} \leq n\varepsilon \cdot k.$$

Пусть $n_{i_j} = \theta_j n$, тогда можно положить

$$\sum_{j=1}^k n_{i_j} = n\theta \cdot k, \quad \theta = (\theta_1 + \dots + \theta_k)/k, \quad 0 \leq \theta \leq \varepsilon. \quad (34)$$

Используя (32), (34), получаем

$$\frac{\left(n - \sum_{j=1}^k n_{i_j}\right)!}{\prod_{\nu \notin \{i_1, \dots, i_k\}} n_{\nu}!} \leq \exp\{-n(1 - k\theta)H(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta))\} \leq \\ \leq \exp\{-nH(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta))\},$$

где

$$z_i(\theta) = \frac{n_i}{n(1 - k\theta)} I\{i \in \{0, \dots, q-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}\}, \quad (35)$$

$I\{E\}$ – индикатор события E .

Таким образом получаем, что при $(n_0, \dots, n_{q-1}) \in N_{\varepsilon}(i_1, \dots, i_k)$

$$\frac{n!}{n_0! \dots n_{q-1}!} \leq \exp\{n(-H(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta)) + C(\varepsilon))\}, \quad (36)$$

где $C(\varepsilon) = k\varepsilon \ln k - H(k\varepsilon, 1 - k\varepsilon)$. Отметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$C(\varepsilon) = O(\varepsilon \ln \varepsilon). \quad (37)$$

Теперь оценим величины $P_r[n_0, \dots, n_{q-1}]$. Аналогично (22) при $(n_0, \dots, n_{q-1}) \in N_{\varepsilon}(i_1, \dots, i_k)$ получаем, что

$$P_r[n_0, \dots, n_{q-1}] \leq (1 + w_{n,r}) \sum_{d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r)} \prod_{i=0}^{q-1} \left(\frac{n_i}{n}\right)^{d_i} L_{\varphi_r}(d_0, \dots, d_{q-1}),$$

где $w_{n,r} = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда, из неравенств (см. (35))

$$\left(\frac{n_i}{n}\right)^{d_i} \leq (z_i(\theta))^{d_i}, \quad i \in \{0, \dots, q-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\},$$

$$\left(\frac{n_i}{n}\right)^{d_i} \leq \varepsilon^{d_i}, \quad i \in \{i_1, \dots, i_k\},$$

и определения множества $N_{\varepsilon}(i_1, \dots, i_k)$ следует, что

$$P_r[n_0, \dots, n_{q-1}] \leq (1 + w_{n,r}) [D_r(\theta; n_0, \dots, n_{q-1}) + K'(\varepsilon)], \quad (38)$$

где $K'(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и

$$D_r(\theta; n_0, \dots, n_{q-1}) = \sum_{\substack{d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r) \\ d_i = 0, i \in \{i_1, \dots, i_k\}}} \prod_{i=0}^{q-1} (z_i(\theta))^{d_i} L_{\varphi_r}(d_0, \dots, d_{q-1}). \quad (39)$$

Заметим, что согласно определениям (6), (7) и условию **A**

$$L_{\varphi_r}(d_0, \dots, d_{q-1}) \geq \frac{d(r)!}{d_0! \dots d_{q-1}!} \min_{\alpha \in A_{\varphi_r}} P_r(\alpha) > 0. \quad (40)$$

Из (39), (40) и равенств

$$\sum_{\substack{d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r) \\ d_i = 0, i \in \{i_1, \dots, i_k\}}} \prod_{i=0}^{q-1} (z_i(\theta))^{d_i} \frac{d(r)!}{d_0! \dots d_{q-1}!} = (z_0(\theta) + \dots + z_{q-1}(\theta))^{d(r)} = 1$$

получаем, что

$$D_r(\theta; n_0, \dots, n_{q-1}) \geq \min_{\alpha \in A_{\varphi_r}} P_r(\alpha) > 0. \quad (41)$$

С учетом (41) соотношение (38) можно переписать в виде

$$P_r[n_0, \dots, n_{q-1}] \leq (1 + w_{n,r}) D_r(\theta; n_0, \dots, n_{q-1}) (1 + K''(\varepsilon)),$$

где $K''(\varepsilon) = K'(\varepsilon)/D_r(n_0, \dots, n_{q-1}) = O(\varepsilon)$. В силу равенства (см. (10), (39))

$$f(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta)) = \sum_{r=1}^R \tau(r) \ln D_r(\theta; n_0, \dots, n_{q-1})$$

и соотношения (14)

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^R (P_r[n_0, \dots, n_{q-1}])^{T(r)} &= \exp \left\{ T \sum_{r=1}^R \tau(r) \ln P_r[n_0, \dots, n_{q-1}] \right\} \leq \\ &\leq \exp \{ T f(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta)) (1 + K'''(\varepsilon) + w_n) \}, \end{aligned} \quad (42)$$

где $K'''(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $w_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, для внутренней суммы в представлении (30) справедлива оценка (см. (36) и (42)):

$$\begin{aligned} \sum_{(n_0, \dots, n_{q-1}) \in N_\varepsilon(i_1, \dots, i_k)} \frac{n!}{n_0! \dots n_{q-1}!} \prod_{r=1}^R (P_r[n_0, \dots, n_{q-1}])^{T(r)} &\leq \\ &\leq \sum_{(n_0, \dots, n_{q-1}) \in N_\varepsilon(i_1, \dots, i_k)} \exp \{ -nR(T; z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta)) \}, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$R(T; z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta)) =$$

$$\begin{aligned}
&= H(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta)) - C(\varepsilon) - \frac{T}{n} f(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta)) (1 + K'''(\varepsilon) + w_n) = \\
&= f \left[\frac{H}{f} - \frac{T}{n} (1 + K'''(\varepsilon) + w_n) - \frac{C(\varepsilon)}{f} \right]. \quad (44)
\end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения $H = H(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta))$, $f = f(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta))$. Согласно (12) (учитываем, что $0 \leq z_0(\theta), \dots, 0 \leq z_0(\theta), z_0(\theta) + \dots + z_{q-1}(\theta) = 1$)

$$\frac{H}{f} = \frac{H(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta))}{f(z_0(\theta), \dots, z_{q-1}(\theta))} \leq \gamma^*.$$

Поэтому величина (44) при $T/n > \gamma^* + \delta$ и достаточно малом ε больше некоторой положительной константы $\delta(\varepsilon)$. Эта оценка величины (44) равномерна относительно наборов $(n_0, \dots, n_{q-1}) \in N_\varepsilon(i_1, \dots, i_k)$. Теперь с учетом неравенства $|N_\varepsilon(i_1, \dots, i_k)| < n^q$ получаем

$$\sum_{(n_0, \dots, n_{q-1}) \in N_\varepsilon(i_1, \dots, i_k)} \frac{n!}{n_0! \cdot \dots \cdot n_{q-1}!} \prod_{r=1}^R (P_r[n_0, \dots, n_{q-1}])^{T(r)} \rightarrow 0.$$

Следовательно (см. (30)), $\sum^{**} \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Автор признателен В.Г. Михайлову за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Балакин Г.В., Колчин В.Ф., Хохлов В.И., “Гиперциклы в случайном гиперграфе”, *Дискретная математика*, **3:3** (1991), 102–108.
- [2] Колчин В.Ф., Хохлов В.И., “Пороговый эффект для систем линейных уравнений специального вида”, *Дискретная математика*, **7:4** (1995), 29–39.
- [3] Балакин Г.В., “Графы систем двучленных уравнений с булевыми неизвестными”, *Теория вероятностей и ее применения*, **40:2** (1995), 241–259.
- [4] Колчин В.Ф., “О пороговом эффекте для систем случайных уравнений”, *Труды по дискретной математике*, **2** (1998), 183–190.
- [5] Копытцев В.А., “Предельные теоремы для числа решений системы случайных уравнений”, *Теория вероятностей и ее применения*, **45:1** (2000), 52–72.
- [6] Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1, М.: Мир, 1964.
- [7] Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*, М.: ИЛ, 1963, 288 с.