Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Круглов, И. В. Чередник, О существовании неотрицательных базисов в подгруппах свободных групп шрейеровых многообразий, *Матем. вопр. криптогр.*, 2019, том 10, выпуск 4, 53–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:00:03

**О существовании неотрицательных базисов
в подгруппах свободных групп
шрейеровых многообразий**

И. А. Круглов¹, И. В. Чередник²

¹*Академия криптографии Российской Федерации, Москва*

²*ООО «Центр сертификационных исследований», Москва*

Получено 30.V.2016

Переработанный вариант 03.X.2019

Аннотация. Показано, что подгруппа H свободной группы F с базисом X обладает свободным порождающим множеством, элементы которого есть произведения положительных степеней элементов X тогда и только тогда, когда H порождается множеством всех своих элементов, представимых в виде произведения положительных степеней элементов X . Аналогичный факт доказан также для подгрупп свободных абелевых групп.

Ключевые слова: неотрицательный базис подгруппы, свободные группы, свободные абелевы группы, шрейеровы многообразия групп

On the existence of non-negative bases in subgroups of free groups of Schreier varieties

I. A. Kruglov¹, I. V. Cherednik²

¹*Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow*

²*«Certification Research Center», LLC, Moscow*

Abstract. We show that a subgroup H of a free group $F(X)$ has a non-negative (with respect to X) basis if and only if H is generated by the set of all its non-negative (with respect to X) elements. A similar result is proved for subgroups of free Abelian groups.

Keywords: non-negative basis of a subgroup, free groups, free Abelian groups, Schreier varieties of groups

Пусть G — произвольная группа, $\{g_i: i \in I\}$ — система образующих группы G . Элемент $g \in G$ будем называть *неотрицательным по отношению к системе образующих* $\{g_i: i \in I\}$ группы G , если его можно представить в виде

$$g = g_{i_1} \cdot \dots \cdot g_{i_t}, \quad i_1, \dots, i_t \in I.$$

Свойство быть неотрицательным по отношению к заданной системе образующих заведомо выполнено для любого элемента конечной группы, а точнее, для любого элемента периодической группы. Действительно, в этом случае любая отрицательная степень g_i^{-k} элемента g_i , входящая в выражение g , равна положительной степени $g_i^{k(n_i-1)}$, где n_i — порядок элемента g_i .

При решении практических задач возникает вопрос о построении системы образующих подгруппы H группы G , состоящей из элементов, которые неотрицательны по отношению к заданной системе образующих $\{g_i: i \in I\}$ группы G . Здесь полезным является следующий достаточно общий результат.

Утверждение 1. Пусть G — конечно-порожденная группа, $g_1, \dots, g_n$ — система образующих группы G . Тогда любая подгруппа конечного индекса H группы G обладает конечной системой образующих, элементы которой неотрицательны по отношению к системе $g_1, \dots, g_n$.

Доказательство. Сначала покажем, что подгруппа конечного индекса H конечно-порожденной группы G обладает конечной системой образующих элементов. Для этого рассмотрим свободную группу F_n с базисом $x_1, \dots, x_n$ и естественный эпиморфизм $\varphi: F_n \rightarrow G$, при котором $\varphi(x_i) = g_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Подгруппа $\varphi^{-1}(H)$ имеет конечный индекс в F_n :

$$|F_n : \varphi^{-1}(H)| = |G : H|,$$

и согласно теореме Нильсена–Шрайера $\varphi^{-1}(H)$ — свободная группа с конечным базисом $v_1, \dots, v_t$. Соответственно, $h_1 = \varphi(v_1), \dots, h_t = \varphi(v_t)$ — конечная система образующих группы H .

Предположим теперь, что не существует конечной системы образующих группы H , все элементы которой неотрицательны по отношению к системе $g_1, \dots, g_n$. Тогда выберем в группе H такую конечную систему образующих $w_1, \dots, w_s$, элементы которой можно выразить некоторым образом с использованием минимального в совокупности количества сомножителей $g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}$. Не ограничивая общности, полагаем, что элемент w_1 не допускает неотрицательную запись в системе $g_1, \dots, g_n$.

Если запись элемента w_1 имеет вид

$$w_1 = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot g_{i_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}} \cdot g_{i_k} \cdot g_{i_{k+1}}^{-1} \cdot \dots \cdot g_{i_t}^{-1}, \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1} \in \{\pm 1\}, \quad 0 \leq k < t,$$

то заметим, что элемент $w = g_{i_t} \cdot \dots \cdot g_{i_{k+1}}$ в некоторой положительной степени r ввиду конечности индекса $|G : H|$ содержится в группе H . Отсюда следует, что система

$$w^r, w_1 \cdot w^r, w_2, \dots, w_s$$

порождает группу H . Однако для ее записи в совокупности требуется строго меньше сомножителей $g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}$, чем для системы образующих элементов $w_1, \dots, w_s$. Получено противоречие.

Если же запись элемента w_1 имеет вид

$$w_1 = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot g_{i_{l-1}}^{\varepsilon_{l-1}} \cdot g_{i_l} \cdot g_{i_{l+1}}^{-1} \cdot \dots \cdot g_{i_k}^{-1} \cdot g_{i_{k+1}} \cdot \dots \cdot g_{i_t},$$

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l-1} \in \{\pm 1\}, \quad 0 \leq l < k < t,$$

то ввиду конечности индекса $|G : H|$ элемент $w = g_{i_{k+1}} \cdot \dots \cdot g_{i_t}$ в некоторой положительной степени r содержится в группе H и элемент

$$v = (g_{i_{k+1}} \cdot \dots \cdot g_{i_t})^{r-1} \cdot g_{i_k} \cdot \dots \cdot g_{i_{l+1}}$$

в некоторой конечной степени m содержится в группе H . В таком случае система

$$v^m, w^r, w_1 \cdot w^{-r} \cdot v^m, w_2, \dots, w_s$$

порождает группу H , и для ее записи в совокупности требуется строго меньше сомножителей $g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}$, чем для системы образующих элементов $w_1, \dots, w_s$. Снова получено противоречие.

В целом для случая конечно-порожденных групп утверждение 1 неулучшаемо. С одной стороны, пример

$$G = \mathbb{Z}^2, \quad \{g_1, g_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}, \quad H = \langle (1, -1) \rangle$$

наглядно показывает, что нельзя отказаться от условия конечности индекса $|G : H|$. С другой стороны, в случае произвольной группы G отсутствуют какие-то общие результаты о мощности систем образующих подгруппы H даже в случае ее конечного индекса.

Однако для практически важной задачи о существовании неотрицательных базисов подгрупп свободных групп можно получить содержательные результаты. Для конечно-порожденных подгрупп свободных групп конечного ранга в работе [7] была доказана следующая теорема.

Теорема 1 ([7], следствие 3.6). Пусть F_n — конечно-порожденная свободная группа с базисом $x_1, \dots, x_n$. Конечно-порожденная подгруппа H в группе F_n обладает неотрицательным по отношению к системе $x_1, \dots, x_n$ базисом в том и только в том случае, когда H порождается множеством всех своих элементов, которые неотрицательны по отношению к системе $x_1, \dots, x_n$.

Следствие 1. Пусть F_n — конечно-порожденная свободная группа с базисом $x_1, \dots, x_n$. Тогда любая подгруппа конечного индекса H в группе F_n обладает неотрицательным базисом по отношению к системе $x_1, \dots, x_n$.

Следствие 1 несложно вывести из теоремы 1 и утверждения 1.

Заметим также, что последний результат, в совокупности с известной формулой Нильсена–Шрейера, позволяет уточнить доказанное выше утверждение 1 следующим образом.

Следствие 2. Пусть G — конечно-порожденная группа с множеством образующих элементов $g_1, \dots, g_n$. Тогда любая подгруппа конечного индекса H в группе G обладает неотрицательной по отношению к системе $g_1, \dots, g_n$ системой образующих $h_1, \dots, h_t$ с числом элементов $t \leq |G : H| \cdot (n - 1) + 1$.

Еще один класс групп, важных с практической точки зрения, представляют свободные абелевы группы конечного ранга. Пусть $(A_n, +)$ — свободная абелева группа конечного ранга $n \geq 1$ с базисом $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Любая подгруппа конечного индекса в группе A_n является свободной абелевой группой конечного ранга n . В [9] А. А. Нечаевым была предложена задача описать все подгруппы конечного индекса в группе A_n , которые порождаются множеством всех своих элементов, неотрицательных по отношению к системе $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. В [6] И. В. Чередник получил следующий результат.

Теорема 2 ([6], следствие 2). Пусть A_n — конечно-порожденная свободная абелева группа с базисом $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Подгруппа B группы A_n обладает неотрицательным по отношению к системе $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ базисом в том и только в том случае, когда B порождается множеством всех своих элементов, неотрицательных по отношению к системе $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Отметим, что теорема 2 не является непосредственным следствием из теоремы 1, что объясняется разной природой свободных и свободных абелевых групп.

Следствие 3. Любая подгруппа B конечного индекса свободной абелевой группы A_n обладает базисом $\beta_1, \dots, \beta_n$, элементы которого неотрицательны по отношению к системе образующих $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Следствие 3 вытекает из теоремы 2 с учетом утверждения 1.

На наш взгляд, приведенные выше теоремы 1, 2 и следствия 1, 3 весьма сложно обобщить непосредственно на случай свободных групп иных многообразий. Это объясняется тем, что свободные группы только трех многообразий: все группы, абелевы группы, абелевы группы (фиксированной) простой экспоненты, — обладают тем свойством, что любая их подгруппа является относительно свободной группой того же многообразия и, соответственно, имеет базисы, мощность которых инвариантна (такие многообразия называют шрейеровыми, см. [10], [5] (стр. 154), [2] (стр. 472)).

Остается заметить, что понятие неотрицательного элемента в случае периодических групп является вырожденным и, как следствие, любая подгруппа свободной группы многообразия абелевых групп простой экспоненты обладает неотрицательным базисом.

В настоящей работе доказываются обобщение теоремы 2 на случай произвольной подгруппы свободной абелевой группы A произвольного ранга, а также обобщение теоремы 1 на случай произвольной подгруппы свободной группы F произвольного ранга.

Начнем с обобщения теоремы 2. Напомним, что свободная абелева группа A с базисом $\mathcal{A} = \{\alpha_s : s \in S\}$ есть прямая сумма $\sum_{s \in S} \langle \alpha_s \rangle$ бесконечных циклических групп $\langle \alpha_s \rangle$ (см., например, [2], стр. 118) и каждый элемент группы A однозначно представляется в виде конечной суммы

$$c_1 \alpha_{s_1} + \dots + c_n \alpha_{s_n}$$

целочисленно кратных попарно различных элементов $\alpha_{s_1}, \dots, \alpha_{s_n} \in \mathcal{A}$.

Теорема 3. Пусть $(A, +)$ — свободная абелева группа с базисом $\mathcal{A} = \{\alpha_s : s \in S\}$. Подгруппа B группы A обладает неотрицательным по отношению к $\mathcal{A}$ базисом в том и только в том случае, когда B порождается множеством всех своих элементов, неотрицательных по отношению к $\mathcal{A}$.

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность условия.

Пусть $\mathcal{C} = \{\gamma_k : k \in K\}$ — некоторая система образующих группы B , состоящая из неотрицательных по отношению к базису $\mathcal{A}$ элементов.

Можно считать, что система $\mathcal{C}$ вполне упорядочена и не содержит элементов, целочисленно кратных элементам группы B . Доказательство существования неотрицательного базиса группы B проведем стандартным образом с использованием трансфинитной индукции, а именно: предложим индуктивный процесс построения линейно независимой системы $\{\gamma_i^* : i \in I\}$ неотрицательных элементов, через которые линейно выражается каждый элемент системы $\mathcal{C}$.

Выберем некоторый базис $\{\beta_j : j \in J_1\}$ группы B . Поскольку $\gamma_1 \in \mathcal{C}$ не является целочисленно кратным элемента группы B , то коэффициенты из его разложения

$$\gamma_1 = c_1\beta_{j_1} + \dots + c_t\beta_{j_t}, \quad j_1, \dots, j_t \in J_1,$$

взаимно просты в совокупности, т. е. $\text{НОД}(c_1, \dots, c_t) = 1$. Как известно из теории свободных абелевых групп конечного ранга, элемент γ_1 можно дополнить до базиса $\gamma_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_t$ свободной абелевой группы, порожденной системой $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_t}$. Пользуясь этим, элемент γ_1 дополним до базиса группы B :

$$\begin{aligned} \{\gamma_i^* : i \in I_2\} \cup \{\beta_j : j \in J_2\} \\ = \{\gamma_1\} \cup ((\{\beta_j : j \in J_1\} \setminus \{\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_t}\}) \cup \{\gamma'_2, \dots, \gamma'_t\}). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что построен такой базис

$$\{\gamma_i^* : i \in I_k\} \cup \{\beta_j : j \in J_k\}$$

группы B , что $\{\gamma_i^* : i \in I_k\}$ — линейно независимая система неотрицательных по отношению к $\mathcal{A}$ элементов, через которую линейно выражается любой элемент γ_s , $s < k$.

Если γ_k линейно выражается через $\{\gamma_i^* : i \in I_k\}$, то положим

$$\{\gamma_i^* : i \in I_{k+1}\} = \{\gamma_i^* : i \in I_k\}, \quad \{\beta_j : j \in J_{k+1}\} = \{\beta_j : j \in J_k\}.$$

Если же γ_k не выражается линейно через $\{\gamma_i^* : i \in I_k\}$, то его разложение в базисе $\{\gamma_i^* : i \in I_k\} \cup \{\beta_j : j \in J_k\}$ имеет вид

$$\gamma_k = c_1\gamma_{i_1}^* + \dots + c_s\gamma_{i_s}^* + d_1\beta_{j_1} + \dots + d_t\beta_{j_t}, \quad (d_1, \dots, d_t) \neq (0, \dots, 0).$$

Пусть $(d_1, \dots, d_t) = d$. Выберем неотрицательные целые числа $r_1, \dots, r_s$ таким образом, что $d \mid (c_i + r_i)$, $i \in \{1, \dots, s\}$, и положим

$$\begin{aligned} \gamma'_k &= \gamma_k + r_1\gamma_{i_1}^* + \dots + r_s\gamma_{i_s}^* \\ &= (c_1 + r_1)\gamma_{i_1}^* + \dots + (c_s + r_s)\gamma_{i_s}^* + d_1\beta_{j_1} + \dots + d_t\beta_{j_t}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что элементы $\gamma_{i_1}^*, \dots, \gamma_{i_s}^*, \gamma_k$ неотрицательны по отношению к $\mathcal{A}$ и $r_1, \dots, r_s \geq 0$, элемент γ'_k также является неотрицательным по отношению к $\mathcal{A}$. Остается заметить, что элемент

$$\gamma^* = \frac{c_1 + r_1}{d} \gamma_{i_1}^* + \dots + \frac{c_s + r_s}{d} \gamma_{i_s}^* + \frac{d_1}{d} \beta_{j_1} + \dots + \frac{d_t}{d} \beta_{j_t}$$

неотрицателен по отношению к $\mathcal{A}$, а система $\gamma_{i_1}^*, \dots, \gamma_{i_s}^*, \gamma^*$ дополнима до некоторого базиса $\gamma_{i_1}^*, \dots, \gamma_{i_s}^*, \gamma^*, \gamma'_2, \dots, \gamma'_t$ свободной абелевой группы, порожденной системой $\gamma_{i_1}^*, \dots, \gamma_{i_s}^*, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_t}$. Итак, мы построили базис

$$\begin{aligned} & \{\gamma_i^* : i \in I_{k+1}\} \cup \{\beta_j : j \in J_{k+1}\} \\ &= (\{\gamma_i^* : i \in I_k\} \cup \{\gamma^*\}) \cup ((\{\beta_j : j \in J_k\} \setminus \{\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_t}\}) \cup \{\gamma'_2, \dots, \gamma'_t\}) \end{aligned}$$

группы B с тем свойством, что $\{\gamma_i^* : i \in I_{k+1}\}$ — линейно независимая система неотрицательных по отношению к базису $\mathcal{A}$ элементов, через которую линейно выражается любой элемент γ_s , $s < k + 1$.

Таким образом, доказано существование неубывающей цепочки систем

$$\{\gamma_i^* : i \in I_k\}, \quad k \in K,$$

с обозначенными выше свойствами. Теперь легко видеть, что система

$$\bigcup_{k \in K} \{\gamma_i^* : i \in I_k\}$$

является базисом группы B , состоящим из неотрицательных по отношению к базису $\mathcal{A}$ элементов.

Перейдем к обобщению теоремы 1. В наших рассуждениях будем использовать представление свободных групп в виде фундаментальных групп связанных графов. Приведем необходимые сведения (см. §§ 2, 3 главы 3 книги [3], а также § 3 главы 2 книги [1]).

Графом Γ называется совокупность $(V, E, \alpha, \omega, \eta)$, состоящая из непустого множества V (*множество вершин*), множества E (*множество ребер*), отображений $\alpha : E \rightarrow V$, $\omega : E \rightarrow V$, а также преобразования $\eta : E \rightarrow E$, для которых при любом $e \in E$ выполнены равенства

$$\eta(e) \neq e, \quad \eta^2(e) = e, \quad \alpha(\eta(e)) = \omega(e), \quad \omega(\eta(e)) = \alpha(e).$$

Для любого $e \in E$ вершина $\alpha(e)$ называется *началом*, а вершина $\omega(e)$ — *концом* ребра e . Ребра e и $\eta(e)$ называются *противоположными*, для любого ребра e пара $\{e, \eta(e)\}$ называется *неориентированным ребром*.

Отметим, что отображение $e \mapsto (\alpha(e), \omega(e))$ не обязательно предполагается инъективным, т. е. различные ребра могут иметь одинаковые начало и конец. В конечном графе с множеством ребер E число неориентированных ребер равно $\frac{|E|}{2}$.

Путем z в графе Γ называется конечная последовательность ребер

$$z = e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, \quad k \geq 1,$$

в которой для каждого $s = 1, 2, \dots, k - 1$ выполнено равенство $\alpha(e_{i_{s+1}}) = \omega(e_{i_s})$. При этом вершина $\alpha(z) = \alpha(e_{i_1})$ называется *началом*, вершина $\omega(z) = \omega(e_{i_k})$ — *концом* пути z . Путь

$$\eta(e_{i_k}), \dots, \eta(e_{i_1})$$

будем называть обратным к пути $z = e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ и обозначать через z^{-1} .

Граф Γ называется *связным*, если для любых двух различных вершин $v_1, v_2 \in V$ существует путь в Γ с началом v_1 и концом v_2 . Далее мы рассматриваем только связные графы с непустым множеством ребер.

Если для вершины $v \in V$ и пути z выполнены равенства $\alpha(z) = \omega(z) = v$, то путь z называется *петлей с концом v* . Кроме того, каждой вершине $v \in V$ ставится в соответствие пустая петля 1_v с концом v , не содержащая ребер.

Обозначим через Z_v множество всех петель в графе Γ с фиксированным концом v . Для любых петель $z, w \in Z_v$ последовательность (z, w) , полученная приписыванием w справа от z , является петлей из множества Z_v . Это определяет полугрупповую операцию на множестве Z_v .

Две петли $z_1, z_2 \in Z_v$ назовем *эквивалентными*, если z_2 можно получить из z_1 конечным числом вставок и вычеркиваний подпутей вида $e, \eta(e)$. Введенное отношение действительно является отношением эквивалентности на множестве Z_v , и оно согласовано с указанной выше полугрупповой операцией. Фактор-полугруппу $\Phi(\Gamma, v)$ полугруппы Z_v по данному отношению эквивалентности называют *фундаментальной группой графа Γ в точке v* . В дальнейшем для любой петли $z \in Z_v$ класс эквивалентности с представителем z будем обозначать через $\bar{z}$.

Хорошо известно, что $\Phi(\Gamma, v)$ является свободной группой, и если Γ — конечный граф, то $\Phi(\Gamma, v)$ — свободная группа ранга $\frac{|E|}{2} - |V| + 1$ (см., например, предложения 2.1 и 2.2 в книге [3]). Также известно (см., например, § 2 главы 3 книги [3]), что структура $\Phi(\Gamma, v)$ не зависит от выбора вершины v : группы $\Phi(\Gamma, v_1)$ и $\Phi(\Gamma, v_2)$ сопряжены и, следовательно, изоморфны.

Путь z в графе Γ называется *приведенным*, если он не содержит подпути вида $(e, \eta(e))$. Можно показать, что каждый класс $\bar{z} \in \Phi(\Gamma, v)$ содержит единственную приведенную петлю.

Вершину $v' \in V$ будем называть *сильно связанной* с вершиной v , если существует такая приведенная петля

$$z = e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \in Z_v,$$

что $v' = \alpha(e_{i_s})$ для некоторого $s \in 1, \dots, k$. Обозначим множество всех вершин графа Γ , сильно связанных с v , через V_v и определим подграф

$$\Gamma_v = (V_v, E_v), \quad E_v = \{e \in E: \alpha(e), \omega(e) \in V_v\}. \quad (1)$$

Вообще, группа $\Phi(\Gamma_v, v)$ очевидным образом изоморфна группе $\Phi(\Gamma, v)$. Однако для удобства изложения бывает предпочтительнее рассматривать граф Γ_v и группу $\Phi(\Gamma_v, v)$.

Определим понятие сильной связности графа, следуя [3]. Выбрав произвольно по одному ребру из каждого неориентированного ребра графа Γ , получим некоторое подмножество $E_0 \subset E$. Будем говорить, что подмножество E_0 *определяет ориентацию ребер в графе* Γ . В случае конечного графа Γ выполнено равенство $|E_0| = \frac{|E|}{2}$, т. е. имеется $2^{\frac{|E|}{2}}$ способов определить ориентацию ребер в графе Γ .

Граф Γ называется *сильно связным относительно ориентации ребер, определяемой подмножеством* E_0 , если для любых двух вершин $v_1, v_2 \in V$ существует такой путь z в Γ с началом v_1 и концом v_2 , что все ребра пути z содержатся в множестве E_0 . Отметим, что для любой вершины v произвольная петля $z \in Z_v$, все ребра которой содержатся в множестве E_0 , является приведенной, а потому для сильно связного относительно некоторой ориентации E_0 графа Γ выполнено равенство $\Gamma_v = \Gamma$.

В 1973 году Ю. Н. Горчинский, в связи с исследованием специальных алгоритмов обработки информации, опубликовал в ведомственном научном журнале утверждение, эквивалентное приведенному выше следствию 1. При этом наиболее содержательная часть доказательства была оформлена в виде следующего отдельного результата.

Лемма 1 (Ю. Н. Горчинский, 1973). Пусть конечный граф Γ с множеством вершин V и множеством ребер E является сильно связным относительно ориентации ребер, определяемой некоторым подмножеством $E_0 \subset E$. Тогда для любой вершины $v \in V$ существует такая система петель $z_1, \dots, z_t \in Z_v$, что при любом $i = 1, \dots, t$ все

ребра петли z_i содержатся в множестве E_0 и множество соответствующих классов эквивалентности $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_t$ является базисом группы $\Phi(\Gamma, v)$.

В данной работе мы предлагаем доказательство обобщения леммы 1 на случай произвольного сильно связного графа, проведенное с использованием более современных методов ([3, 4, 8]).

Лемма 2. Пусть граф Γ с множеством вершин V и множеством ребер E является сильно связным относительно ориентации ребер, определяемой некоторым подмножеством $E_0 \subset E$. Тогда для любой вершины $v \in V$ существует такая система петель $\{z_i: i \in I\}$, что при любом $i \in I$ все ребра петли z_i содержатся в множестве E_0 и множество соответствующих классов эквивалентности $\{\bar{z}_i: i \in I\}$ является базисом группы $\Phi(\Gamma, v)$.

Доказательство. Множество всех корневых деревьев сильно связного графа $\Gamma_0 = (V, E_0)$, вырастающих из фиксированной вершины $v \in V$, является частично упорядоченным и обладает верхней гранью. Согласно лемме Цорна в данном множестве можно выбрать некоторый максимальный элемент $S = (V_S, E_S)$, который является остовным деревом для графа Γ_0 , т.е. $V_S = V$ (см., например, § 2.2 книги [8]). При этом для каждой вершины $v' \in V$ в дереве S существует единственный путь $z_{v,v'}^S$ с началом v и концом v' .

Пусть $E_0 \setminus E_S = \{e_i: i \in I\}$. Тогда, как известно (см., например, предложения 2.1 и 2.2 в книге [3]), система петель

$$w_i = z_{v, \alpha(e_i)}^S, e_i, (z_{v, \omega(e_i)}^S)^{-1}, \quad i \in I,$$

обладает тем свойством, что $\{\bar{w}_i: i \in I\}$ — базис группы $\Phi(\Gamma, v)$.

Выберем дополнительно в сильно связном графе $\Gamma_0 = (V, E_0)$ произвольное остовное корневое дерево $T = (V, E_T)$, вырастающее в вершину v . Для каждой вершины $v' \in V$ в дереве T существует единственный путь $z_{v',v}^T$ с началом v' и концом v .

Рассмотрим систему петель

$$z_i = z_{v, \alpha(e_i)}^S, e_i, z_{\omega(e_i), v}^T, \quad i \in I,$$

в которой каждая петля по построению содержит только ребра из E_0 . Покажем, что система $\{\bar{z}_i: i \in I\}$ порождает базис $\{\bar{w}_i: i \in I\}$. Действительно, если

$$z_{\omega(e_i), v}^T = e_{j_1}, \dots, e_{j_{r-1}}, e_{j_r}, e_{j_{r+1}}, \dots, e_{j_l}, \quad e_{j_1}, \dots, e_{j_{r-1}} \in E_S, \quad e_{j_r} \in E_T \setminus E_S,$$

то ввиду единственности пути в S с началом v и концом $\alpha(e_{j_r})$ выполнено равенство

$$z_{v,\alpha(e_{j_r})}^S = z_{v,\omega(e_i)}^S, e_{j_1}, \dots, e_{j_{r-1}},$$

а ввиду единственности пути в T с началом $\omega(e_{j_r})$ и концом v — равенство

$$z_{\omega(e_{j_r}),v}^T = e_{j_{r+1}}, \dots, e_{j_l}.$$

Остается заметить, что

$$\begin{aligned} \bar{z}_i \cdot (\bar{z}_{j_r})^{-1} &= \overline{z_i, (z_{j_r})^{-1}} = \overline{z_{v,\alpha(e_i)}^S, e_i, z_{\omega(e_i),v}^T, (z_{v,\alpha(e_{j_r})}^S, e_{j_r}, z_{\omega(e_{j_r}),v}^T)^{-1}} \\ &= \overline{z_{v,\alpha(e_i)}^S, e_i, e_{j_1}, \dots, e_{j_{r-1}}, e_{j_r}, e_{j_{r+1}}, \dots, e_{j_l}, (z_{v,\alpha(e_{j_r})}^S, e_{j_r}, z_{\omega(e_{j_r}),v}^T)^{-1}} \\ &= \overline{z_{v,\alpha(e_i)}^S, e_i, e_{j_1}, \dots, e_{j_{r-1}}, e_{j_r}, z_{\omega(e_{j_r}),v}^T, (z_{\omega(e_{j_r}),v}^T)^{-1}, \eta(e_{j_r}), (z_{v,\alpha(e_{j_r})}^S)^{-1}} \\ &= \overline{z_{v,\alpha(e_i)}^S, e_i, e_{j_1}, \dots, e_{j_{r-1}}, \eta(e_{j_{r-1}}), \dots, \eta(e_{j_1}), (z_{v,\omega(e_i)}^S)^{-1}} \\ &= \overline{z_{v,\alpha(e_i)}^S, e_i, (z_{v,\omega(e_i)}^S)^{-1}} = \bar{w}_i. \end{aligned}$$

Таким образом, $\{\bar{z}_i: i \in I\}$ — система образующих свободной группы $\Phi(\Gamma, v)$. Покажем, что $\{\bar{z}_i: i \in I\}$ — свободная система образующих этой группы.

Рассмотрим произвольную конечную систему петель

$$z_{i_1} = z_{v,\alpha(e_{i_1})}^S, e_{i_1}, z_{\omega(e_{i_1}),v}^T, \dots, z_{i_k} = z_{v,\alpha(e_{i_k})}^S, e_{i_k}, z_{\omega(e_{i_k}),v}^T.$$

Пусть $e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_n}$ — все ребра из множества $E_T \setminus E_S$, содержащиеся в путях $z_{\omega(e_{i_1}),v}^T, \dots, z_{\omega(e_{i_k}),v}^T$. Тогда системы петель

$$w_{i_1}, \dots, w_{i_k}, w_{i_{k+1}}, \dots, w_{i_n}$$

и

$$z_{i_1}, \dots, z_{i_k}, z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_n}$$

обладают тем свойством, что $\bar{w}_{i_1}, \dots, \bar{w}_{i_n}$ порождает $\bar{z}_{i_1}, \dots, \bar{z}_{i_n}$, и наоборот. Таким образом, система $\bar{z}_{i_1}, \dots, \bar{z}_{i_n}$ является системой образующих конечно-порожденной свободной группы с базисом $\bar{w}_{i_1}, \dots, \bar{w}_{i_n}$, а значит (см. предложение 2.7 в книге [3] или следствие 2.13.1 в книге [4]), $\bar{z}_{i_1}, \dots, \bar{z}_{i_n}$ — свободная система образующих. Итак, мы показали, что произвольная конечная система образующих $\bar{z}_{i_1}, \dots, \bar{z}_{i_k}$ свободна.

Доказанное обобщение леммы 1 позволяет обосновать основной результат настоящей работы.

Теорема 4. Пусть F — свободная группа с базисом X . Подгруппа H группы F обладает неотрицательным по отношению к X базисом в том и только в том случае, когда H порождается множеством всех своих элементов, которые неотрицательны по отношению к X .

Доказательство. Необходимость прямо следует из определения; докажем достаточность условия.

Рассмотрим граф Γ с множеством вершин $V = \{Hg : g \in G\}$ и множеством ребер

$$E = \{(Hg, Hgs) : Hg \in V, s \in X \cup X^{-1}\}.$$

Элемент s будем называть *меткой ребра* (Hg, Hgs) . Если $e_1, \dots, e_t$ — путь в графе Γ и ребра $e_1, \dots, e_t$ имеют метки $s_1, \dots, s_t$ соответственно, то элемент $s_1 \cdot \dots \cdot s_t \in G$ будем называть *меткой пути* $e_1, \dots, e_t$. Подгруппа H состоит из меток всех петель в графе Γ с концом в вершине H , при этом отображение

$$\overline{e_1, \dots, e_t} \mapsto s_1 \cdot \dots \cdot s_t,$$

определенное на множестве классов петель с концом H , является изоморфизмом групп $\Phi(\Gamma, H)$ и H .

Далее для удобства вместо графа Γ и группы $\Phi(\Gamma, H)$ будем рассматривать определенный в соотношении (1) граф Γ_H (при $v = H$) и соответствующую группу $\Phi(\Gamma_H, H)$. Обозначим через Γ_0 подграф Γ_H с множеством вершин V_H и множеством ребер

$$E_0 = \{(Hg, Hgs) \in E_H : s \in X\}.$$

Поскольку группа H порождается множеством всех своих неотрицательных элементов, то группа $\Phi(\Gamma_H, H)$ обладает системой образующих элементов, приведенные представители которых содержатся в Γ_0 .

Методом «от противного» можно показать, что для любой вершины $Hg \in V_H$ в графе Γ_0 существует хотя бы одна петля с концом H , содержащая данную вершину. Последнее означает, что граф Γ_H сильно связан относительно ориентации E_0 и, следовательно, к графу Γ_H можно применить лемму 2.

Таким образом, группа $\Phi(\Gamma_H, H)$ обладает свободной системой образующих элементов, приведенные представители которых содержатся в Γ_0 , а соответствующие им метки образуют неотрицательный относительно X базис группы H .

Список литературы

- [1] Бахтурин Ю.А., *Основные структуры современной алгебры*, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990, 320 с.
- [2] Курош А. Г., *Теория групп*, М.: Наука, 1967, 648 с.
- [3] Линдон Р., Шупп П., *Комбинаторная теория групп*, М.: Мир, 1980, 447 с.
- [4] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., *Комбинаторная теория групп*, М.: Наука, 1974, 456 с.
- [5] Нейманн Х., *Многообразия групп*, М.: Мир, 1969, 264 с.
- [6] Чередник И.В., “Неотрицательный базис решетки”, *Дискретная математика*, **26**:3 (2014), 127–135.
- [7] Khan B., “Positively generated subgroups of free groups and the Hanna Neumann conjecture”, *Contemporary Mathematics*, **296**, eds. R. Gilman et al., AMS, 2002.
- [8] *Horizons of Combinatorics*, eds. Gyori E., Katona G. O. H., Lovasz L., Springer Science & Business Media, 2008, 280 pp.
- [9] Kurakin V.L., Kuzmin A.S., Mikhalev A.V., Nechaev A.A., “Linear recurring sequences over rings and modules”, *J. Math. Sci.*, **76**:6 (1995), 2793–2915.
- [10] Neumann P.M. , Wiegold J., “Schreier varieties of groups”, *Matematika*, **12**:4 (1968), 42–49.