Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов, О распределении чисел решений случайных включений, *Матем. вопр. криптогр.*, 2011, том 2, выпуск 2, 55–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk31>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:56:23

УДК: 519.212.2

О распределении чисел решений случайных включений

В. А. Копытцев¹, В. Г. Михайлов²

¹Академия криптографии Российской Федерации, Москва

²Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Получено 25.1.2011

При заданных множествах D и B векторов линейных пространств V^n и V^T над полем $K = GF(q)$ изучается распределение числа решений $\xi(D, F, B)$ системы включений $x \in D$, $A_1x + A_2f(x) \in B$, где A_1 и A_2 — случайные матрицы над полем K размеров $T \times n$ и $T \times m$ с независимыми элементами, а $f: V^n \rightarrow V^m$ заданное отображение. Указаны условия сходимости распределений случайных величин $\xi(D, F, B)$ к простому или сложному распределениям Пуассона. Результаты применяются к числу решений системы случайных полиномиальных уравнений.

Ключевые слова: случайные включения, системы случайных уравнений, число решений, предельная теорема Пуассона

On the distribution of the numbers of solutions of random inclusions

V. A. Kopytcev¹, V. G. Mikhailov²

¹Academy of Cryptography of Russian Federation, Moscow

²Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow

Abstract. For given sets D and B of vectors in linear spaces V^n and V^T over the field $K = GF(q)$ we consider the number of solutions $\xi(D, F, B)$ of the system of inclusions $x \in D$, $A_1x + A_2f(x) \in B$, where A_1 and A_2 are random $T \times n$ and $T \times m$ matrices over K with independent elements and $f: V^n \rightarrow V^m$ is a given mapping. Sufficient conditions for the convergence of distributions of $\xi(D, F, B)$ to the Poisson or compound Poisson distributions are found. Results are applied to the number of solutions of a system of random polynomial equations.

Key words: random inclusions, systems of random equations, number of solutions, Poisson limit theorem

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2011, vol. 2, no. 2, pp. 55–80 (Russian).

1. Введение

В работе исследуется распределение числа решений $\xi(D, F, B)$ системы включений

$$x \in D, \quad F(x) \in B, \quad (1.1)$$

где $F(x) = (F_1(x), \dots, F_T(x))$: $V^n \rightarrow V^T$ — случайное отображение пространства n -мерных векторов V^n над полем $K = GF(q)$ в пространство V^T , а D и B — некоторые множества n -мерных и T -мерных векторов над этим полем. В случае, когда $D = V^n$, а множество B состоит из единственного вектора $B = \{b = (b_1, \dots, b_T)\}$, включения (1.1) эквивалентны системе из T случайных уравнений $F_j(x) = b_j$, $j = 1, \dots, T$, относительно векторов $x \in V^n$.

Вместе с распределением величины $\xi(D, F, B)$ исследуется распределение числа $\xi(D, F, B \mid x^0)$, равного количеству решений системы включений

$$x \in D, \quad F(x) \in F(x^0) + B, \quad (1.2)$$

где $F(x^0) + B = \{F(x^0) + b \mid b \in B\}$, а $x^0 \in V^n$ — заданный вектор. В случае, когда $D = V^n$ и $B = \{0^T\}$, система включений (1.2) обращается в «заведомо совместную» систему уравнений $F_j(x) = F_j(x^0)$, $j = 1, \dots, T$, относительно векторов $x \in V^n$.

Поскольку заменой переменных $u = x - x^0$ включения (1.2) приводятся к виду (1.1)

$$u \in D - x^0, \quad F^{(x^0)}(u) \in B,$$

где $F^{(x^0)}(u) = F(u + x^0) - F(x^0)$, между величинами $\xi(D, F, B \mid x^0)$ и величинами $\xi(D, F, B)$ существует связь, выраженная равенством

$$\xi(D, F, B \mid x^0) = \xi(D - x^0, F^{(x^0)}, B). \quad (1.3)$$

При этом $\xi(D, F, B \mid 0^n) = \xi(D, F, B)$, если $F(0^n) = 0^T$.

Рассмотрим специальный класс включений (1.1). Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x)$ при случайных матрицах A_1 и A_2 над полем $K = GF(q)$ размерностей $T \times n$ и $T \times m$ соответственно с независимыми в совокупности случайными элементами и при заданном отображении $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$: $V^n \rightarrow V^m$, удовлетворяющем условию $f(0^n) = 0^m$. Класс включений с таким отображением F представляет особый интерес, поскольку в него входят системы полиномиальных уравнений

$$\sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \in \{0, \dots, q-1\} \\ 1 \leq d_1 + \dots + d_n \leq g}} a_{d_1 \dots d_n}^{(t)} x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} = b_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.4)$$

В случае, когда $F(x) = A_1x + A_2f(x)$, число решений системы включений (1.1) совпадает с числом решений системы линейных включений

$$y \in D_f, \quad Ay \in B,$$

где

$$y = (x, f(x)), \quad D_f = \{(x, f(x)) | x \in D\} \subseteq V^{n+m},$$

а матрица $A = (A_1, A_2)$ получена объединением столбцов матриц A_1, A_2 . Значит,

$$\xi(D, F, B) = \xi(D_f, A, B). \quad (1.5)$$

Равенства (1.5) и (1.3) позволяют использовать для изучения распределений случайных величин $\xi(D, F, B)$ и $\xi(D, F, B | x^0)$ результаты работы [1].

В работе [1] был изучен случай, когда $f(x) \equiv 0^m$, $F(x) = A_1x$. Были выведены условия сходимости при $n, T \rightarrow \infty$ распределения числа решений системы включений $x \in D$, $A_1x \in B$ к распределениям пуассоновского типа. Решения включения $A_1x \in B$ (или системы линейных уравнений $A_1x = b$), удовлетворяющие условию $x \in D$, $D \subset V^n$, принято называть *специальными*. В работах [3], [4] в качестве множеств D рассматривались шары и сферы относительно метрики Хемминга в пространстве V^n . В работе [7] была описана связь между числом специальных решений случайных однородных линейных уравнений $A_1x = 0$ и числом решений специально построенного случайного линейного включения $A'y \in B'$. Итог этим исследованиям был подведен в работе [1].

Исследование распределений величин $\xi(D, F, B)$ с использованием равенств (1.5) впервые проведено в работе [2]. Главная особенность работы [2] состоит в том, что в ней ослаблены асимптотические условия для распределений элементов матрицы A по сравнению с условиями из работы [1].

Сформулируем результаты настоящей работы. Далее предполагаем, что от параметров n, T зависят числа $m = m(n)$, множества $D = D(n)$, $B = B(T)$ и матрицы $A = A(n, T)$.

Обозначим через $N(a_1, a_2, a_3, d, B)$ число решений уравнения $a_1u^1 + a_2u^2 + a_3u^3 = d$ относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in B^3$, где $a_1, a_2, a_3 \in K \setminus \{0\}$, $d \in V^T$. Пусть

$$N(B) = \max_{a_1, a_2, a_3, d} N(a_1, a_2, a_3, d, B),$$

$$\rho(B) = N(B)/|B|^2. \quad (1.6)$$

Очевидно, что $0 \leq \rho(B) \leq 1$. Если B — линейное или аффинное подпространство, то эта величина принимает максимально возможное значение $\rho(B) = 1$ (см. [7]).

Ниже будут играть важную роль условие $\rho(B(T)) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ и условие $\rho(D(n)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\|b\|$ означает количество ненулевых координат вектора $b \in V^T$. Согласно теореме 1 [1] условие $\rho(B(T)) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ выполнено, в частности, для множеств

$$S_r^T(b^*) = \{b \in V^T : 1 \leq \|b - b^*\| \leq r\},$$

$$\hat{S}_r^T(b^*) = \{b \in V^T : \|b - b^*\| = r\}$$

при любых векторах $b^* \in V^T$, если $1 \leq r$ и $rT^{-1} \leq \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < (q-1)/q$ — заданное число, а q — число элементов поля $K = GF(q)$. Аналогичное утверждение справедливо для величины $\rho(D(n))$.

Пусть элементы случайной матрицы $A = (A_1, A_2)$ независимы в совокупности и распределены с вероятностями

$$P\{a_{i,j} = k\} = \frac{1 + \Delta_{i,j}(k)}{q}, \quad k \in K, \quad (1.7)$$

где $\sum_{k \in K} \Delta_{i,j}(k) = 0$, $i = 1, \dots, T$, $j = 1, \dots, n + m$.

Пусть

$$\Delta = \max_{i,j,k} |\Delta_{i,j}(k)| < 1. \quad (1.8)$$

Элементы (x, b) и (x', b') множества $D \times B$ назовем подобными, если $(x', b') = (kx, kb)$ при некотором элементе $k \in K \setminus \{0\}$. Разобьем множество $D \times B$ на классы $(DB)_1, \dots, (DB)_M$ подобных векторов, где M — общее число таких классов. Положим

$$l_r(D, B) = |\{u \in \{1, \dots, M\} : |(DB)_u| = r\}|, \quad r = 1, \dots, q-1.$$

Пусть $\pi_1(\lambda_1), \pi_2(\lambda_2), \dots, \pi_{q-1}(\lambda_{q-1})$ — независимые в совокупности случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{q-1}$ соответственно.

Теорема 1. Пусть $D \subseteq V^n \setminus \{0^n\}$, выполнены условия $n, T \rightarrow \infty$, $T\Delta \rightarrow 0$, $|D| \rightarrow \infty$ и соотношения

$$\rho(D_f)\rho(B) \rightarrow 0, \quad (1.9)$$

$$q^{-T}l_r(D_f, B) \rightarrow \lambda_r, \quad 0 \leq \lambda_r < \infty, \quad r = 1, \dots, q-1,$$

$$\exists r \in \{1, \dots, q-1\} : \lambda_r > 0. \quad (1.10)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, F, B)$ сходится к распределению случайной величины

$$\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}) = \pi_1(\lambda_1) + 2\pi_2(\lambda_2) + \dots + (q-1)\pi_{q-1}(\lambda_{q-1}).$$

Определим отображение $f^{(x^0)}: V^n \rightarrow V^m$ равенствами $f^{(x^0)}(x) = f(x + x^0) - f(x^0)$. Будем предполагать, что вектор $x^0 = x^0(n)$ зависит от параметра n .

Теорема 1а. Пусть $D \subseteq V^n \setminus \{x^0\}$, выполнены условия $n, T \rightarrow \infty$, $T\Delta \rightarrow 0$, $|D| \rightarrow \infty$ и соотношения

$$\rho\left((D - x^0)_{f(x^0)}\right) \rho(B) \rightarrow 0, \quad (1.11)$$

$$q^{-T} l_r \left((D - x^0)_{f(x^0)}, B \right) \rightarrow \lambda_r, \quad 0 \leq \lambda_r < \infty, \quad r = 1, \dots, q-1, \\ \exists r \in \{1, \dots, q-1\}: \lambda_r > 0. \quad (1.12)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, F, B \mid x^0)$ сходится к распределению случайной величины $\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 вытекает непосредственно из теоремы 3 работы [1] и равенств (1.5). Теорема 1а следует из теоремы 1, равенств (1.3) и $F^{(x^0)}(x) = F(x + x^0) - F(x^0) = A_1 x + A_2 f^{(x^0)}(x)$. Из условия $f(0^n) = 0^m$ следует, что $f^{(0^n)}(x) = f(x)$. Поэтому теорема 1а обратится в теорему 1, если положить $x^0 = 0^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из результатов работы [2] следует, что в некоторых случаях условие $T\Delta \rightarrow 0$, использованное в теоремах 1 и 1а, можно ослабить. Так, из теоремы 4 работы [2] и равенств (1.3) вытекает, что справедливо утверждение, получающееся из теоремы 1а после замены условий $D \subseteq V^n \setminus \{x^0\}$ и $T\Delta \rightarrow 0$ условиями $D = V^n \setminus \{x^0\}$ и $\Delta \rightarrow 0$ соответственно, и включения в перечень условий соотношения $|B| \leq q^{\delta T}$, где $0 \leq \delta < 1$ — заданное число.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно определениям

$$\rho\left((D - x^0)_{f(x^0)}\right) \leq \rho(D - x^0) = \rho(D).$$

Поэтому соотношение $\rho(D) \rightarrow 0$ влечет выполнение условия (1.11).

Пусть $D = V^n \setminus \{x^0\}$, тогда $D - x^0 = V^n \setminus \{0^n\}$ и

$$\rho\left((D - x^0)_{f(x^0)}\right) = \rho\left((V^n \setminus \{0^n\})_{f(x^0)}\right).$$

Приведем условия, влекущие соотношение

$$\rho\left((V^n \setminus \{0^n\})_{f(x^0)}\right) \rightarrow 0$$

и, следовательно, выполнение условия (1.11).

Положим

$$R(f) = \{f_1(x), \dots, f_m(x)\}.$$

Введем при $l = 2, 3, \dots$ множество функций

$$Q(d^1, \dots, d^l) = \bigcup_{s=1}^l \{x_1^{d_s^1} \dots x_n^{d_s^n}\}, \quad (1.13)$$

где $d^s = (d_1^s, \dots, d_n^s) \in \{0, 1\}^n$, $s = 1, \dots, l$, при этом

$$\|d^s\| \geq 2, \quad s = 1, \dots, l, \quad (1.14)$$

$$\|(d_1^{s_1} d_1^{s_2}, \dots, d_n^{s_1} d_n^{s_2})\| = 0, \quad 1 \leq s_1 < s_2 \leq l. \quad (1.15)$$

Согласно условию (1.15) множества существенных переменных функций $x_1^{d_1^s} \dots x_n^{d_n^s}$ из набора $Q(d^1, \dots, d^l)$ попарно не пересекаются, а условие (1.14) означает, что степень нелинейности функций $x_1^{d_1^s} \dots x_n^{d_n^s}$ больше единицы.

Будем предполагать, что векторы $d^s = d^s(n)$, $s = 1, \dots, l$, и величина $l = l(n)$ зависят от параметра n .

Теорема 2. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x)$, $R(f) \supseteq Q(d^1, \dots, d^l)$, $l \leq m$, $n \rightarrow \infty$, и

$$\prod_{s=1}^l \left(1 - q^{-2\|d^s\|}\right) \rightarrow 0. \quad (1.16)$$

Тогда выполнено соотношение

$$\rho\left((V^n \setminus \{0^n\})_{f(x^0)}\right) \rightarrow 0, \quad (1.17)$$

равномерно относительно векторов $x^0 \in V^n$.

Скажем, что для множества B выполнено условие (В), если B разбивается на тривиальные классы подобных векторов, содержащие по одному элементу. Условие (В), например, выполнено для множеств $B = \{b = (b_1, \dots, b_T)\}$, состоящих из единственного вектора, а в случае $K = GF(2)$ для всех множеств $B \subseteq V^T$.

Непосредственно из теорем 1а, 2 вытекает следствие 1.

Следствие 1. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x)$, $R(f) \supseteq Q(d^1, \dots, d^l)$, выполнены условия (B), $n, T \rightarrow \infty$, $T\Delta \rightarrow 0$, (1.16) и соотношение

$$q^{n-T}|B| \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Тогда распределения случайных величин $\xi(V^n \setminus \{x^0\}, F, B|x^0)$ (и в том числе распределение величины $\xi(V^n \setminus \{0^n\}, F, B)$) сходятся к распределению Пуассона с параметром λ равномерно относительно векторов $x^0 \in V^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условия теоремы 2 выполнены для $R(f) \supseteq Q_n^{(t)}$, где $t \geq 2$,

$$Q_n^{(t)} = \bigcup_{\substack{d_1, \dots, d_n \in \{0, \dots, q-1\} \\ d_1 + \dots + d_n = t}} \{x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}\}.$$

Это условие означает, что среди координатных функций отображения f присутствуют все мономы степени t .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Класс случайных включений $F(x) \in F(x^0) + B$, где $F(x) = A_1x + A_2f(x)$, а множество $R(f) = \{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ удовлетворяет условию следствия 1, содержит «заведомо совместные» системы полиномиальных уравнений (1.4). Для этих систем уравнений в качестве элементов множества (1.13) можно взять функции $f_s(x) = x_{t(s-1)+1} \dots x_{ts}$, $s = 1, \dots, l$, где $2 \leq t < n$ — целое число и $l = [n/t]$ — целая часть числа n/t . Тогда $\|d_s\| = t$, $s = 1, \dots, l$, и условие (1.16) принимает вид

$$(1 - q^{-2t})^{[n/t]} \rightarrow 0.$$

Очевидно, это соотношение выполнено при $n \rightarrow \infty$ и заданном числе t .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В теореме работы [8] приведены условия появления предельного распределения Пуассона для числа решений $x \neq x^0$, $x^0 \in V^n \setminus \{0^n\}$, системы булевых уравнений $F_t(x) = F_t(x^0)$, $t = 1, \dots, T$, где

$$F_t(x) = \sum_{k=1}^{g_t} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} a_{j_1, \dots, j_k}^{(t)} x_{j_1} \dots x_{j_k}$$

и величины g_t зависят от номеров $t = 1, \dots, T$. По сравнению со следствием 1 теорема работы [8] содержит более широкие условия для параметра (1.8), но ограничивает вес $\|x^0\|$ векторов $x^0 = x^0(n)$ (не допускаются векторы, имеющие при $n \rightarrow \infty$ «малый» вес, в частности, не допускается вектор

$x^0 = 0^n$). В связи с этим отметим, что в утверждении следствия 1 сходимость к предельному распределению выполняется равномерно относительно векторов $x^0 \in V^n$.

В теоремах 1 и 1а дан общий вид предельного распределения случайной величины $\xi(D, F, B)$, называемого сложным распределением Пуассона. Приведем некоторые варианты этого распределения, определяемые структурой множества $R(f) = \{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$.

Пусть $t_1, \dots, t_k$ — натуральные числа. Обозначим $G(t_1, \dots, t_k)$ подгруппу мультипликативной группы поля K , состоящую из всех элементов, имеющих порядки, делящие НОД($t_1 - 1, \dots, t_k - 1$).

Следствие 2. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x)$ и кроме этого:

1) множество $R(f)$ определено формулой

$$R(f) = Q_s^{(t_0)} \cup Q_n^{(t_1)} \cup \dots \cup Q_n^{(t_k)},$$

где $s, t_0, t_1, \dots, t_k$ — заданные натуральные числа, $1 \leq s < n$, $1 \leq t_0 \leq s(q-1)$, $2 \leq t_1 < \dots < t_k < n(q-1)$;

2) $aB = B$ при всех $a \in G(t_1, \dots, t_k)$;

3) выполнены условия $n, T \rightarrow \infty$, $T\Delta \rightarrow 0$ и соотношение

$$q^{n-T}|B| \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Тогда:

1) если $G(t_0, t_1, \dots, t_k) < G(t_1, \dots, t_k)$, то распределение случайной величины $\xi(V^n \setminus \{0^n\}, F, B)$ сходится к распределению случайной величины $g\pi_g(\lambda_g) + h\pi_h(\lambda_h)$, где

$$g = |G(t_0, t_1, \dots, t_k)|, \quad h = |G(t_1, \dots, t_k)|,$$

$$\lambda_g = \lambda(1 - p(s, t_0))/g,$$

$$\lambda_h = \lambda p(s, t_0)/h,$$

$$p(s, t_0) = \sum_{0 \leq i < t_0/(q-1)} C_s^i ((q-1)/q)^i (1/q)^{s-i};$$

2) если $G(t_0, t_1, \dots, t_k) = G(t_1, \dots, t_k)$, то распределение случайной величины

$$\xi(V^n \setminus \{0^n\}, F, B)/|G(t_1, \dots, t_k)|$$

сходится к распределению Пуассона с параметром $\lambda/|G(t_1, \dots, t_k)|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Условию 2 следствия 2 удовлетворяют, в частности, множества $\{b \in V^T : \|b\| \leq r\}$ и $\{b \in V^T : \|b\| = r\}$ при любом $0 \leq r \leq n$, поскольку для них $aB = B, \forall a \in K \setminus \{0\}$.

Следствие 3. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x)$, множество $R(f)$ определено по формуле

$$R(f) = Q_n^{(t_1)} \cup \dots \cup Q_n^{(t_k)},$$

где $t_1, \dots, t_k$ — заданные натуральные числа, причем $2 \leq t_1 < \dots < t_k < n(q - 1)$, выполнены условия 2 и 3 следствия 2. Тогда распределение случайной величины

$$\xi(V^n \setminus \{0^n\}, F, B) / |G(t_1, \dots, t_k)|$$

сходится к распределению Пуассона с параметром $\lambda / |G(t_1, \dots, t_k)|$.

Отметим, что в следствиях 2 и 3 степени мономов $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ в разложениях координатных функций $F_i(x)$, $i = 1, \dots, T$ фиксированы. При использовании моделей случайных включений более естественными представляются условия следствия 4.

Следствие 4. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x)$ и кроме этого:

1) выполнено, по крайней мере, одно из двух включений:

$$R(f) \supseteq Q_n^{(2)}, \quad (1.18)$$

$$R(f) \supseteq Q_n^{(t_1)} \cup Q_n^{(t_2)}, \quad (1.19)$$

где $2 < t_1 < t_2$, $\text{НОД}(t_1 - 1, t_2 - 1) = 1$;

2) выполнены условия $n, T \rightarrow \infty, T\Delta \rightarrow 0$,

$$q^{n-T}|B| \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Тогда:

1) распределение случайной величины $\xi(V^n \setminus \{0^n\}, F, B)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ ;

2) если выполнено условие (B), то распределение случайной величины $\xi(V^n \setminus \{x^0\}, F, B|x^0)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ равномерно относительно векторов $x^0 \in V^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Класс случайных включений $A_1x + A_2f(x) \in B$, для которых выполнено условие 1 следствия 4, содержит системы полиномиальных уравнений (1.4).

Условие $T\Delta \rightarrow 0$ в теоремах 1 и 1а означает асимптотическую равномерность распределений (1.7) элементов матрицы $A = (A_1, A_2)$. Приведем теперь главный результат настоящей работы — предельную теорему Пуассона, в которой допускается асимптотическая неравномерность и, более того, вырождение распределений элементов A .

Пусть

$$\overline{Q}_n^{(g)} = \bigcup_{t=2}^g Q_n^{(t)} = \bigcup_{t=2}^g \bigcup_{\substack{d_1, \dots, d_n \in \{0, \dots, q-1\} \\ d_1 + \dots + d_n = t}} \{x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}\}. \quad (1.20)$$

Для натуральных чисел r и g положим

$$l(r, g) = \sum_{i=1}^{\min(r, g)} C_r^i. \quad (1.21)$$

Далее предполагаем, что числа $r = r(n)$, $g = g(n)$ зависят от параметра n .

Теорема 3. Пусть $K = GF(2)$, $F(x) = A_1x + A_2f(x)$, $R(f) = \overline{Q}_n^{(g)}$, $D \subseteq V^n \setminus \{0^n\}$, выполнены условия $n, T \rightarrow \infty$, $r, g \rightarrow \infty$, $|D| \rightarrow \infty$, и соотношения

$$\rho(D_f)\rho(B) \rightarrow 0, \quad (1.22)$$

$$2^{-T}|D||B| \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (1.23)$$

$$\frac{(1 + \Delta)^T |\{x \in D : \|x\| < r\}|}{|D|} \rightarrow 0, \quad (1.24)$$

$$T\Delta^{l(r-j, g-j)} \rightarrow 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (1.25)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, F, B)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Следствие 5. Пусть $K = GF(2)$, $F(x) = A_1x + A_2f(x)$, $R(f) = \overline{Q}_n^{(g)}$, выполнены условия $n, T \rightarrow \infty$ и соотношения $\log_2 n \leq g \leq n$,

$$2^{n-T}|B| \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (1.26)$$

$$|B| \leq 2^{\delta T}, \quad (1.27)$$

$$0 \leq \Delta \leq \left(2(1 - n^{-1}\psi(n))\right)^{1-\delta} - 1, \quad (1.28)$$

где $0 \leq \delta = \delta(n) < 1$, $0 < \psi(n) = o(n)$ и

$$\frac{\ln(1 - \delta(n))}{\psi(n)} \rightarrow 0, \quad \frac{\ln^2 n}{\psi(n)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.29)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(V^n \setminus \{0^n\}, F, B)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть в условиях (1.27), (1.28) величина $\delta(n)$ стремится к нулю. Тогда условия следствия 5 допускают возможность асимптотического вырождения распределений элементов матрицы A (см. (1.7)).

Доказательство теоремы 3 приведено в разделе 2. Раздел 3 посвящен доказательству теоремы 2 и следствий 2–5.

2. Доказательство теоремы 3

Пусть $I\{E\}$ обозначает индикатор случайного события E . Тогда

$$\xi(D, F, B) = \sum_{(x,b) \in J} I\{F(x) = b\},$$

где $J = D \times B$. Воспользуемся известной теоремой Б. А. Севастьянова о предельном распределении Пуассона суммы зависимых индикаторов (см. [5, 6]). Условия этой теоремы используют понятие исключительных множеств. Для их построения в нашем случае потребуется ряд определений.

Пусть $D(r) = \{x \in D : \|x\| \geq r\}$. Введем множества

$$D_{k,j}^f(r) = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in D^k(r) : \text{rank} \left((x^1, f(x^1)), \dots, (x^k, f(x^k)) \right) = j \right\}$$

и $D_k^f(r) = \bigcup_{j=1}^{k-1} D_{k,j}^f(r)$. Отметим, что

$$\left| D_{k,j}^f(r) \right| \leq \sum_{s=1}^j \left| \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in D^k : \text{rank}(x^1, \dots, x^k) = s \right\} \right|.$$

Поэтому

$$\left| D_{k,j}^f(r) \right| \leq \sum_{s=1}^j C_k^s q^{s(k-s)} |D|^s. \quad (2.1)$$

Положим $J(r) = D(r) \times B$ и

$$J_k(r) = \left\{ ((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k)) \in J^k(r) : (x^\alpha, b^\alpha) \neq (x^\beta, b^\beta) \ (\alpha \neq \beta) \right\}.$$

Определим исключительные множества $I_k(r) \subset J_k(r)$ равенством

$$I_k(r) = \left\{ ((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k)) \in J_k(r) : (x^1, \dots, x^k) \in D_k^f(r) \right\}.$$

Согласно теореме Б. А. Севастьянова, утверждение теоремы 3 будет доказано, если показать, что

$$\sum_{(x,b) \in J \setminus J(r)} \mathbf{P} \{F(x) = b\} \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

$$\sum_{(x,b) \in J(r)} \mathbf{P} \{F(x) = b\} \rightarrow \lambda, \quad (2.3)$$

$$\max_{(x,b) \in J(r)} \mathbf{P} \{F(x) = b\} \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

и при всех $k = 2, 3, \dots$ (используем обозначение $v^i = (x^i, b^i)$)

$$\max_{(v^1, \dots, v^k) \in J_k(r) \setminus I_k(r)} \left| \frac{\mathbf{P} \{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\}}{\mathbf{P} \{F(x^1) = b^1\} \cdot \dots \cdot \mathbf{P} \{F(x^k) = b^k\}} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k(r)} \prod_{j=1}^k \mathbf{P} \{F(x^j) = b^j\} \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k(r)} \mathbf{P} \{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Перед проверкой условий (2.2)–(2.7) приведем вспомогательное утверждение. Пусть множества $\overline{Q}_n^{(g)}$ определяются формулами (1.20), а числа $l_j(r, g) = l(r - j + 1, g - j + 1)$, $j = 1, 2, \dots$ (см. (1.21)).

Лемма 1. Пусть $K = GF(2)$, $F(x) = A_1x + A_2f(x)$, $R(f) = \overline{Q}_n^{(g)}$, $(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j}^f(r)$, $1 \leq j \leq \min(k, r, g)$, $b^1, \dots, b^k \in V^T$. Тогда при всех $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P} \{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} \leq \left(\frac{1 + \Delta_{l_j(r,g)}}{2} \right)^{iT}, \quad (2.8)$$

если $j \leq k - 1$, а если $j = k$, то

$$\left(\frac{1 - \Delta_{l_k(r,g)}}{2} \right)^{kT} \leq \mathbf{P} \{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} \leq \left(\frac{1 + \Delta_{l_k(r,g)}}{2} \right)^{kT}. \quad (2.9)$$

Доказательство. Соотношение $F(x^s) = b^s$ представляет собой систему $Ay = b^s$ из T линейных уравнений со случайной матрицей $A = (A_1, A_2)$ относительно вектора $y = (x^s, f(x^s))$. Пусть вектор y имеет не менее l ненулевых координат и при этом $y_{v_1} = \dots = y_{v_l} = 1$ для некоторых номеров $v_1, \dots, v_l \in \{v \in \overline{1, n+m}: y_v = 1\}$. Тогда, используя равенства $\Delta_{i,v}(k) = 2\mathbf{P}\{a_{i,v} = k\} - 1$ и $\sum_{k \in K} \Delta_{i,v}(k) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{a_{i,v_1}y_{v_1} + \dots + a_{i,v_l}y_{v_l} = c\} &= \sum_{w=1}^l \prod_{w=1}^l \mathbf{P}\{a_{i,v_w} = c_w\} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} \sum \Delta_{i,v_1}(c_1) \cdot \dots \cdot \Delta_{i,v_l}(c_l), \end{aligned}$$

где $c \in K$, а оба суммирования проводятся по всем $c_1, \dots, c_l \in K$, для которых выполнено равенство $c_1 + \dots + c_l = c$. Значит,

$$\frac{1 - \Delta^l}{2} \leq \mathbf{P}\{a_{i,v_1}y_{v_1} + \dots + a_{i,v_l}y_{v_l} = c\} \leq \frac{1 + \Delta^l}{2}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1 - \Delta^l}{2}\right)^T \leq \mathbf{P}\{F(x^s) = b^s | E\} \leq \left(\frac{1 + \Delta^l}{2}\right)^T, \quad (2.10)$$

где

$$F(x^s) = Ay, \quad y = (x^s, f(x^s)),$$

и E — любое событие, которое не зависит от совокупности случайных элементов, стоящих в столбцах матрицы A с номерами $v_1, \dots, v_l \in \{v \in \overline{1, n+m}: y_v = 1\}$.

Воспользуемся этими соображениями для того, чтобы доказать неравенства (2.8) и (2.9). Пусть $(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,1}^f(r)$. Из равенства $R(f) = \overline{Q}_n^{(g)}$ следует, что вектор $(x^1, f(x^1))$ имеет не менее $\sum_{i=1}^{\min(r,g)} C_r^i = l_1(r, g)$ ненулевых координат. Поэтому согласно (2.10)

$$\left(\frac{1 - \Delta^{l_1(r,g)}}{2}\right)^T \leq \mathbf{P}\{F(x^1) = b^1\} \leq \left(\frac{1 + \Delta^{l_1(r,g)}}{2}\right)^T, \quad (2.11)$$

при этом

$$\mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} \leq \mathbf{P}\{F(x^1) = b^1\} \leq \left(\frac{1 + \Delta^{l_1(r,g)}}{2}\right)^T.$$

Значит, в случае, когда $k \geq j = 1$, соотношения (2.8), (2.9) выполнены.

Пусть $(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j}^f(r)$, $k \geq j \geq 2$. Без ограничения общности положим

$$\text{rank}((x^1, f(x^1)), \dots, (x^j, f(x^j))) = j, \quad (2.12)$$

$$r \leq \|x^1\| \leq \|x^2\| \leq \dots \leq \|x^j\|. \quad (2.13)$$

Для $2 \leq u \leq j$ через $\eta_u(f)$ обозначим число номеров таких координат $f_i(x^u)$ вектора $f(x^u)$, для которых выполнены равенства

$$f_i(x^u) = 1, \quad f_i(x^1) = \dots = f_i(x^{u-1}) = 0.$$

Пусть $r_u = \|x^u\|$. Выберем в матрице, составленной из строк $x^1, \dots, x^u$, подматрицу M_u размера $u \times r_u$, образованную r_u столбцами с ненулевыми элементами вектора x^u . Не ограничивая общности, будем полагать, что эти столбцы имеют номера $1, \dots, r_u$. Из условий (2.12), (2.13) и того, что все векторы $x^1, \dots, x^u$ различны, следует, что каждая строка матрицы M_u с номером $s = 1, \dots, u-1$ содержит нулевой элемент. Следовательно, для некоторого $1 \leq v \leq u-1$ найдутся такие номера $1 \leq \omega_1 < \dots < \omega_v \leq r_u$, что $x_{\omega_1}^u \dots x_{\omega_v}^u = 1$ и $x_{\omega_1}^s \dots x_{\omega_v}^s = 0$ при всех $s = 1, \dots, u-1$. Очевидно, что при любом наборе номеров $1 \leq k_1 < \dots < k_t \leq r_u$, $t \geq v$, включающем номера $\omega_1, \dots, \omega_v$, также выполнены равенства $x_{k_1}^u \dots x_{k_t}^u = 1$, $x_{k_1}^s \dots x_{k_t}^s = 0$ при всех $s = 1, \dots, u-1$. Из этих наборов нас интересуют лишь наборы не более чем по g номеров. Число таких наборов равно

$$\sum_{i=0}^{\min\{g-v, r_u-v\}} C_{r_u-v}^i \geq \sum_{i=0}^{\min\{g-u+1, r-u+1\}} C_{r-u+1}^i = l_u(r, g). \quad (2.14)$$

Здесь были использованы неравенства $r_u \geq r$ и $v \leq u-1$. Из (2.14), равенства $R(f) = Q_n^{(g)}$ и наших определений следует, что

$$\eta_u(f) \geq l_u(r, g), \quad u = 2, \dots, j. \quad (2.15)$$

Из (2.15) и (2.10) вытекает, что при всех $u = 2, \dots, j$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - \Delta^{l_u(r, g)}}{2} \right)^T &\leq \mathbf{P} \left\{ F(x^u) = b^u \mid F(x^1) = b^1, \dots, F(x^{u-1}) = b^{u-1} \right\} \leq \\ &\leq \left(\frac{1 + \Delta^{l_u(r, g)}}{2} \right)^T. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Осталось воспользоваться соотношениями

$$\mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^j) = b^j \right\},$$

$$\mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^j) = b^j\} = \mathbf{P}\{F(x^1) = b^1\} \times \\ \times \prod_{u=2}^j \mathbf{P}\{F(x^u) = b^u | F(x^1) = b^1, \dots, F(x^{u-1}) = b^{u-1}\}$$

и оценками (2.11), (2.16). Лемма 2.1 доказана.

Приступим к проверке соотношений (2.2)–(2.7). Проверим соотношение (2.2). Учитывая, что для любого $x \in V^n \setminus \{0^n\}$ выполнено неравенство $\mathbf{P}\{F(x) = b\} \leq ((1 + \Delta)/2)^T$, получаем

$$\sum_{(x,b) \in J \setminus J(r)} \mathbf{P}\{F(x) = b\} \leq |B| |\{x \in D: \|x\| < r\}| \left(\frac{1 + \Delta}{2}\right)^T = \\ = 2^{-T} |B| |D| \times \frac{|\{x \in D: \|x\| < r\}| (1 + \Delta)^T}{|D|}. \quad (2.17)$$

Согласно условиям (1.23), (1.24) правая часть в цепочке соотношений (2.17) стремится к нулю. Значит, соотношение (2.2) выполнено.

Из неравенств (2.8), (2.9), условий (1.23), (1.25) и (2.2) следуют соотношения (2.3) и (2.4).

Перед проверкой соотношений (2.5)–(2.7) отметим, что она вполне аналогична проверке подобных соотношений в доказательстве теоремы 4 работы [1]. Проверим условие (2.5). Согласно определениям множество $J_k(r) \setminus I_k(r)$ образуют все наборы $((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k))$, в которых $(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,k}^f(r)$. Из неравенств (2.9) вытекает, что для них

$$\left(\frac{1 - \Delta_{l_k(r,g)}}{1 + \Delta_{l_k(r,g)}}\right)^{kT} \leq \frac{\mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\}}{\mathbf{P}\{F(x^1) = b^1\} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}\{F(x^k) = b^k\}} \leq \left(\frac{1 + \Delta_{l_k(r,g)}}{1 - \Delta_{l_k(r,g)}}\right)^{kT}.$$

Поэтому из условия (1.25) следует (2.5).

Проверим соотношение (2.6) при $k \geq 2$. Используя неравенства (2.9) (где $k = 1$) и (2.1), получаем

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k(r)} \prod_{s=1}^k \mathbf{P}\{F(x^s) = b^s\} \leq \\ \leq \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in D_k^f(r)} \prod_{s=1}^k \mathbf{P}\{F(x^s) \in B\} = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j}^f(r)} \prod_{s=1}^k \mathbf{P}\{F(x^s) \in B\} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} |D_{k,j}^f(r)| \left(\frac{1 + \Delta_{l_1(r,g)}}{2} \right)^{kT} |B|^k \leq \\
&\leq \left(\frac{|D| \cdot |B|}{2^T} \right)^k \left(1 + \Delta_{l_1(r,g)} \right)^{kT} \frac{1}{|D|^k} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{s=1}^j C_k^s q^{s(k-s)} |D|^s. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Из условий (1.23), (1.25) и условия $|D| \rightarrow \infty$ следует, что выражение в правой части цепочки соотношений (2.18) стремится к нулю при всех $k \geq 2$. Соотношение (2.6) доказано.

Наконец, проверим соотношение (2.7). Опять $k \geq 2$. Из определений следует равенство

$$\begin{aligned}
&\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k(r)} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\} = \\
&= \sum_{\substack{(v^1, \dots, v^k) \in J_k(r) \\ (x^1, \dots, x^k) \in D_k^f(r)}} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\}. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение множества

$$\overline{D}_{k,j}^f(r) = D_{k,j}^f(r) \cap \{(x^1, \dots, x^k) \in (D(r))^k : x^\alpha \neq x^\beta (\alpha \neq \beta)\}.$$

Заметим, что $\overline{D}_{k,1}^f(r) = \emptyset$, $k = 2, 3, \dots$. Положим $\overline{D}_k^f(r) = \bigcup_{j=2}^{k-1} \overline{D}_{k,j}^f(r)$.

Лемма 2. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x)$, $((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k)) \in J_k(r)$, $(x^1, \dots, x^k) \in D_k^f(r) \setminus \overline{D}_k^f(r)$. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\} = 0.$$

Утверждение леммы вытекает из определений множеств $J_k(r)$ и $\overline{D}_k^f(r)$.

Из (2.19) и леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k(r)} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\} = \\
&= \sum_{\substack{(v^1, \dots, v^k) \in J_k(r) \\ (x^1, \dots, x^k) \in \overline{D}_k^f(r)}} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\}. \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим произвольный набор векторов $x^1, \dots, x^k \in V^n$. Ему соответствует система $L_f(x^1, \dots, x^k)$ однородных линейных уравнений над полем $K = GF(2)$ вида

$$c_1(x^1, f(x^1)) + \dots + c_k(x^k, f(x^k)) = 0$$

(возможно пустая), состоящая из всех линейных соотношений, которым удовлетворяет набор векторов $(x^1, f(x^1)), \dots, (x^k, f(x^k))$. Системе уравнений $L_f(x^1, \dots, x^k)$ сопоставим идентичную по составу систему $L_b(x^1, \dots, x^k)$ из линейных уравнений относительно $b^1, \dots, b^k \in B$. Обозначим через $B(x^1, \dots, x^k)$ множество решений $(b^1, \dots, b^k) \in B^k$ системы $L_b(x^1, \dots, x^k)$.

Лемма 3. Пусть $(b^1, \dots, b^k) \notin B(x^1, \dots, x^k)$, $(x^1, \dots, x^k) \in \overline{D}_k^f(r)$. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\} = 0.$$

Доказательство леммы 3 повторяет доказательство леммы 4.3 работы [1], и мы его не приводим.

Из леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(v^1, \dots, v^k) \in I_k(r) \\ (x^1, \dots, x^k) \in \overline{D}_k(r)}} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\} = \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in \overline{D}_{k,j}(r)} \sum_{(b^1, \dots, b^k) \in B(x^1, \dots, x^k)} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\}. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Здесь нам понадобится оценка мощности множества $B(x^1, \dots, x^k)$.

Лемма 4. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x)$, $2 \leq j \leq k-1$, $(x^1, \dots, x^k) \in \overline{D}_{k,j}^f(r)$. Тогда

$$\left| B(x^1, \dots, x^k) \right| \leq \rho(B) |B|^j.$$

Лемма 4 повторяет (с некоторыми отличиями в обозначениях) лемму 4.4 работы [1]. Поэтому ее доказательство мы не приводим.

Применим лемму 4 и оценку (2.8) к выражению в правой части цепочки неравенств (2.21), а результат подставим в (2.20). Получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k(r)} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\} \leq \\
& \leq \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in \overline{D}_{k,j}^f(r)} \sum_{(b^1, \dots, b^k) \in B(x^1, \dots, x^k)} \left(\frac{1 + \Delta_{l_j(r,g)}}{2} \right)^{iT} \leq \\
& \leq \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in \overline{D}_{k,j}^f(r)} |B(x^1, \dots, x^k)| \left(\frac{1 + \Delta_{l_j(r,g)}}{2} \right)^{iT} \leq \\
& \leq \rho(B) \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in \overline{D}_{k,j}^f(r)} |B|^j \left(\frac{1 + \Delta_{l_j(r,g)}}{2} \right)^{iT} \leq \\
& \leq \rho(B) \sum_{j=2}^{k-1} |\overline{D}_{k,j}^f(r)| \cdot |B|^j \left(\frac{1 + \Delta_{l_j(r,g)}}{2} \right)^{iT} \leq \\
& \leq \rho(B) \sum_{j=2}^{k-1} \frac{|\overline{D}_{k,j}^f|}{|D|^j} \cdot \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{(1 + \Delta_{l_j(r,g)})^T |D| \cdot |B|}{2^T} \right)^j, \quad (2.22)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{k,j}^f = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in D^k : \text{rank} \left((x^1, f(x^1)), \dots, (x^k, f(x^k)) \right) = j, \right. \\
\left. x^\alpha \neq x^\beta \ (\alpha \neq \beta) \right\}.
\end{aligned}$$

Лемма 5. Пусть $2 \leq j \leq k-1, n \rightarrow \infty$, а множество D меняется так, что $\rho(D_f) \rightarrow 0$. Тогда

$$|\overline{D}_{k,j}^f| \cdot |D|^{-j} \rightarrow 0.$$

Доказательство леммы 5 повторяет доказательство леммы 4.5 работы [1], и мы его также не приводим.

Из условий (1.22), (1.23), (1.25) и леммы 5 следует, что выражение в правой части цепочки неравенств (2.22) стремится к нулю. Значит, условие (2.7) тоже выполнено. Теорема 3 доказана.

3. Доказательства теоремы 2 и следствий 2–5

В пунктах 3.1–3.3 рассматривается случай $K = GF(q)$.

3.1. Доказательство теоремы 2

Нам понадобится следующий результат.

Лемма 6. При всех $x^0 \in V^n$ выполнено равенство

$$\rho \left((V^n)_{f(x^0)} \right) = \rho \left((V^n)_f \right). \quad (3.1)$$

Доказательство леммы. Напомним, что

$$(V^n)_f = \{ (x, f(x)) = (x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_m(x)), x \in V^n \},$$

$$(V^n)_{f(x^0)} = \left\{ (x, f^{(x^0)}(x)) = (x_1, \dots, x_n, f_1^{(x^0)}(x), \dots, f_m^{(x^0)}(x)), x \in V^n \right\},$$

где

$$f_s^{(x^0)}(x) = f_s(x + x^0) - f_s(x^0), \quad s = 1, \dots, m.$$

Согласно определению, приведенному в разделе 1,

$$\rho \left((V^n)_f \right) = \frac{N_f}{q^{2n}}, \quad \rho \left((V^n)_{f(x^0)} \right) = \frac{N_{f(x^0)}}{q^{2n}},$$

где N_f и $N_{f(x^0)}$ — максимально возможное при $a_1, a_2, a_3 \in K \setminus \{0\}$, $c = (c^1, c^2) \in V^{n+m}$ число решений уравнения

$$a_1 y^1 + a_2 y^2 + a_3 y^3 = c \quad (3.2)$$

относительно тройки векторов $(y^1, y^2, y^3) \in ((V^n)_f)^3$ в первом случае и относительно тройки векторов $(y^1, y^2, y^3) \in ((V^n)_{f(x^0)})^3$ во втором случае.

В первом случае уравнение (3.2) относительно переменных x_i^1, x_i^2, x_i^3 , $i = 1, \dots, n$, переписывается как система из $n + m$ уравнений (назовем ее системой (3.3)):

$$a_1 x_i^1 + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 = c_i^1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3.1)$$

$$a_1 f_s(x^1) + a_2 f_s(x^2) + a_3 f_s(x^3) = c_s^2, \quad s = 1, \dots, m. \quad (3.3.2)$$

Во втором случае уравнение (3.2) относительно переменных x_i^1, x_i^2, x_i^3 , $i = 1, \dots, n$ переписывается как система из $n + m$ уравнений (назовем ее системой (3.4)):

$$a_1 x_i^1 + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 = c_i^1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned} a_1 f_s(x^1 + x^0) + a_2 f_s(x^2 + x^0) + a_3 f_s(x^3 + x^0) = \\ = c_s^2 + (a_1 + a_2 + a_3) f_s(x^0), \quad s = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Система (3.4) приводится к виду (3.3) заменой правых частей и линейной заменой переменных. Поэтому $N_f = N_{f(x^0)}$ и выполнено равенство (3.1). Лемма 6 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Не нарушая общности рассуждений, будем рассматривать мономы $x_1^{d_1^s} \dots x_n^{d_n^s}$ из множества $Q(d^1, \dots, d^l)$ в качестве первых l координатных функций $f_1(x), \dots, f_l(x)$ отображения $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Напомним, что $m = m(n) \geq l = |Q(d^1, \dots, d^l)|$.

Исключим из системы (3.3) последние $m - l$ уравнений подсистемы (3.3.2), оставив в ней лишь уравнения, соответствующие мономам из множества $Q(d^1, \dots, d^l)$. Обозначим полученную систему как (3.3*), а максимальное число ее решений — как N_f^* . Очевидно, что

$$N_f^* \geq N_f. \quad (3.5)$$

Система (3.3*) является системой из $n + l$ уравнений относительно $3n$ неизвестных элементов x_i^1, x_i^2, x_i^3 , $i = 1, \dots, n$, поля K . Нетрудно убедиться, что ее уравнения можно распределить по $l + 1$ системам следующим образом. Обозначим через I_s множество существенных переменных монома $f_s(x) = f_s(x_1, \dots, x_n)$. Согласно определению $|I_s| = \|d^s\|$. Система с номером $s = 1, \dots, l$ имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 f_s(x^1) + a_2 f_s(x^2) + a_3 f_s(x^3) = c_s^2, \\ a_1 x_i^1 + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 = c_i^1, \quad i \in I_s. \end{aligned} \quad (3.6.s)$$

К системе (3.6.($l + 1$)) отнесем все остальные $n - \|d^1\| - \dots - \|d^l\|$ уравнений подсистемы (3.3.1).

Обозначим через $N_f^{(s)}$ максимальное (по всем допустимым вариантам выбора коэффициентов и правых частей уравнений) число решений системы (3.6.s). Так как множества неизвестных, входящих в системы (3.6.s), $s = 1, \dots, l + 1$, попарно не пересекаются, то

$$N_f^* = \prod_{s=1}^{l+1} N_f^{(s)}. \quad (3.7)$$

Ниже мы покажем, что

$$N_f^{(s)} \leq q^{2\|d^s\|} - 1, \quad s = 1, \dots, l, \quad (3.8)$$

$$N_f^{(l+1)} = q^{2(n-\|d^1\|-\dots-\|d^l\|)}. \quad (3.9)$$

Из (3.7)–(3.9) и (3.5) следуют неравенства

$$N_f \leq N_f^* \leq q^{2n} \prod_{s=1}^l (1 - q^{-2\|d^s\|}).$$

Поэтому с учетом (3.1) получаем:

$$\rho \left((V^n)_{f(x^0)} \right) = \rho \left((V^n)_f \right) \leq \prod_{s=1}^l (1 - q^{-2\|d^s\|}). \quad (3.10)$$

Осталось воспользоваться тем, что для некоторого $C > 0$

$$\left| \rho \left((V^n \setminus \{0^n\})_{f(x^0)} \right) - \rho \left((V^n)_{f(x^0)} \right) \right| \leq \frac{C}{q^n}.$$

Для завершения доказательства теоремы 2 надо убедиться в справедливости соотношений (3.8) и (3.9). Равенство (3.9) почти очевидно. Система (3.6.($l+1$)) позволяет выразить элементы x_i^3 через x_i^1 и x_i^2 для всех $i \in \{1, \dots, n\} \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_l)$, что и приводит к равенству (3.9).

Докажем неравенство (3.8). Рассмотрим систему (3.6.s), $1 \leq s \leq l$. Используя линейные уравнения, выразим неизвестные x_i^3 через x_i^1 и x_i^2 (полагаем $a_3 = 1$) и подставим их в нелинейное уравнение. Получим уравнение

$$a_1 f_s(x^1) + a_2 f_s(x^2) + f_s(c^1 - a_1 x^1 - a_2 x^2) = c_s^2,$$

где $f_s(x) = x_{j_1} \dots x_{j_k}$ при некоторых $2 \leq k \leq n$ и $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. Другими словами,

$$a_1 \prod_{u=1}^k x_{j_u}^1 + a_2 \prod_{u=1}^k x_{j_u}^2 + \prod_{u=1}^k (c_{j_u}^1 - a_1 x_{j_u}^1 - a_2 x_{j_u}^2) = c_s^2. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) является уравнением от $2\|d^s\|$ неизвестных из поля K . Покажем, что при любом задании элементов $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, c_s^2$ и вектора c^1 левая часть уравнения (3.11) не равна тождественно константе; тогда число решений этого уравнения меньше $q^{2\|d^s\|}$.

Выражение в левой части (3.11) является многочленом степени $k \geq 2$. Опуслав в нем члены степени меньше k , получим выражение

$$\begin{aligned} & a_1 \prod_{u=1}^k x_{j_u}^1 + a_2 \prod_{u=1}^k x_{j_u}^2 + (-1)^k \prod_{u=1}^k (a_1 x_{j_u}^1 + a_2 x_{j_u}^2) = \\ & = (a_1 + (-a_1)^k) \prod_{u=1}^k x_{j_u}^1 + (a_2 + (-a_1)^k) \prod_{u=1}^k x_{j_u}^2 + \\ & + (-1)^k \sum_{\substack{U \subset \{1, \dots, k\} \\ 1 \leq |U| \leq k-1}} \prod_{u \in U} (a_1 x_{j_u}^1) \prod_{u \in \{1, \dots, k\} \setminus U} (a_2 x_{j_u}^2). \end{aligned}$$

Очевидно, что все мономы, входящие в сумму по множествам $U \subset \{1, \dots, k\}$, $1 \leq |U| \leq k-1$, имеют коэффициенты, отличные от нуля, и не могут сократиться при приведении подобных членов. Значит, левая часть уравнения (3.11) не является тождественной константой. Следовательно, выполнено неравенство (3.8). Доказательство теоремы 2 завершено.

3.2. Доказательство следствия 2

Выделим в множестве D_f подмножества (здесь $x^{(s)} = (x_1, \dots, x_s)$)

$$\begin{aligned} M_f^{(0)} &= \left\{ y = (x, f(x)) \in D_f : \|x^{(s)}\| < t_0/(q-1), \|x\| \geq t_k \right\}, \\ M_f^{(1)} &= \left\{ y = (x, f(x)) \in D_f : \|x^{(s)}\| \geq t_0/(q-1), \|x\| \geq t_k \right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что векторы $y^1 = (x^1, f(x^1)), y^2 = (x^2, f(x^2)) \in M_f^{(0)}$ являются подобными в том и только том случае, когда $x^2 = ax^1$, причем $a \in G(t_1, \dots, t_k)$. Следовательно, множество $M_f^{(0)}$ разбивается на $|M_f^{(0)}|/|G(t_1, \dots, t_k)|$ классов подобных векторов, каждый мощности $|G(t_1, \dots, t_k)|$. В силу условия $aB = B$, $a \in G(t_1, \dots, t_k)$, множество $M_f^{(0)} \times B$ разбивается на $|M_f^{(0)}| \cdot |B|/|G(t_1, \dots, t_k)|$ классов такой же мощности.

Аналогичными рассуждениями показывается, что множество $M_f^{(1)} \times B$ разбивается на $|M_f^{(1)}| \cdot |B|/|G(t_0, t_1, \dots, t_k)|$ классов подобных векторов, каждый мощности $|G(t_0, t_1, \dots, t_k)|$.

Пусть $G(t_0, t_1, \dots, t_k) < G(t_1, \dots, t_k)$. Положим $H_f = (V^n \setminus \{0^n\})_f$. Используя указанные выше разбиения множеств $M^{(0)} \times B$, $M^{(1)} \times B$, равенство

$|H_f| = q^n - 1$ и легко проверяемые соотношения

$$\frac{|M^{(0)}|}{|H_f|} \rightarrow p(s, t_0), \quad \frac{|M^{(1)}|}{|H_f|} \rightarrow 1 - p(s, t_0), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$p(s, t_0) = \sum_{0 \leq i < (t_0/(q-1))} C_s^i ((q-1)/q)^i (1/q)^{s-i},$$

получаем две цепочки асимптотических равенств:

$$q^{-T} l_{|G(t_1, \dots, t_k)|}(H_f, B) \approx q^{-T} \frac{|M^{(0)}| \cdot |B|}{|G(t_1, \dots, t_k)|} \approx \frac{\lambda p(s, t_0)}{|G(t_1, \dots, t_k)|}, \quad (3.13)$$

$$q^{-T} l_{|G(t_0, t_1, \dots, t_k)|}(H_f, B) \approx q^{-T} \frac{|M^{(1)}| \cdot |B|}{|G(t_0, t_1, \dots, t_k)|} \approx \frac{\lambda(1 - p(s, t_0))}{|G(t_0, t_1, \dots, t_k)|} \quad (3.14)$$

(здесь и далее запись $a(n) \approx b(n)$ означает, что $a(n) = b(n)(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$). Вместе с этим получаем, что

$$q^{-T} l_r(H_f, B) \leq q^{n-T} |B| \cdot \frac{|H_f| - |M^{(0)}| - |M^{(1)}|}{|H_f|} \quad (3.15)$$

для значений

$$r \in \{1, \dots, q-1\}, \quad r \neq |G(t_1, \dots, t_k)|, \quad r \neq |G(t_0, t_1, \dots, t_k)|. \quad (3.16)$$

Следовательно,

$$q^{-T} l_r(H_f, B) \rightarrow 0 \quad (3.17)$$

для указанных в (3.16) значений параметра r . Из (3.13), (3.14), (3.17) следует, что условие (1.10) теоремы 1 выполнено, причем

$$\lambda_{|G(t_1, \dots, t_k)|} = \frac{\lambda p(s, t_0)}{|G(t_1, \dots, t_k)|},$$

$$\lambda_{|G(t_0, t_1, \dots, t_k)|} = \frac{\lambda(1 - p(s, t_0))}{|G(t_0, t_1, \dots, t_k)|},$$

и $\lambda_r = 0$ для указанных в (3.16) значений параметра r .

Согласно теореме 2 и замечанию 4 кроме условия (1.10) выполнено и условие (1.9) теоремы 1. Все остальные условия теоремы 1 содержатся в условиях следствия. Первое утверждение следствия 2 доказано.

Пусть $G(t_0, t_1, \dots, t_k) = G(t_1, \dots, t_k)$. Тогда вместо цепочек (3.13), (3.14) получим одну цепочку асимптотически эквивалентных величин

$$q^{-T} l_{|G(t_1, \dots, t_k)|}(H_f, B) \approx q^{-T} \frac{(|M^{(0)}| + |M^{(1)}|)|B|}{|G(t_1, \dots, t_k)|} \approx \frac{\lambda}{|G(t_1, \dots, t_k)|}.$$

Используя неравенства (3.15) для

$$r \in \{1, \dots, q-1\}, \quad r \neq |G(t_1, \dots, t_k)|, \quad (3.18)$$

получим для этих значений соотношения (3.17). Таким образом, установим, что условие (1.10) теоремы 1 выполнено так, что

$$\lambda_{|G(t_1, \dots, t_k)|} = \frac{\lambda}{|G(t_1, \dots, t_k)|},$$

и $\lambda_r = 0$ для указанных в (3.18) значений параметра r . Осталось заметить, что условие (1.9) теоремы 1 выполнено согласно теореме 2 и замечанию 4. Следствие 2 доказано.

3.3. Доказательства следствий 3 и 4

Доказательство следствия 3 и первого утверждения следствия 4 проводятся по той же схеме, что и доказательство следствия 2. Теперь вместо двух множеств M_f^0 и M_f^1 рассматривается одно множество

$$M_f = \{y = (x, f(x)) \in D_f : \|x\| \geq t\},$$

где $t = t_k$ в случае следствия 3 и $t = 2$ или $t = t_2$ в случае следствия 4 (в зависимости от того, которое из условий (1.18) и (1.19) считается выполненным). В условиях следствия 3 векторы $y^1 = (x^1, f(x^1)), y^2 = (x^2, f(x^2)) \in M_f$ являются подобными в том и только том случае, когда $x^2 = ax^1$, причем $a \in G(t_1, \dots, t_k)$. Поэтому опять приходим к выводу о том, что множество $M_f \times B$ разбивается на $|M_f| \cdot |B|/|G(t_1, \dots, t_k)|$ классов подобных векторов мощности $|G(t_1, \dots, t_k)|$ каждый. В условиях следствия 4 векторы $y^1 = (x^1, f(x^1)), y^2 = (x^2, f(x^2)) \in M_f$ являются подобными в том и только том случае, когда $x^2 = x^1$, т. е. когда они совпадают. Поэтому множество $M_f \times B$ не содержит подобных векторов.

Дальнейшие рассуждения для обоих следствий аналогичны заключительной части доказательства следствия 2, и мы их не приводим. Второе утверждение следствия 4 вытекает из теорем 1 и 2 и следствия 1.

3.4. Доказательство следствия 5

Напомним, что в данном случае $K = GF(2)$, $D = V^n \setminus \{0^n\}$ и выполнены условия (1.27) и (1.28):

$$|B| \leq 2^{\delta T}, \quad 0 \leq \Delta \leq \left(2(1 - n^{-1}\psi(n))\right)^{1-\delta} - 1, \quad (3.19)$$

где $0 \leq \delta = \delta(n) < 1$, $0 < \psi(n) = o(n)$ и

$$\frac{\ln(1 - \delta(n))}{\psi(n)} \rightarrow 0, \quad \frac{\ln^2 n}{\psi(n)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

Покажем, что в этих условиях для величины $\xi(V^n \setminus \{0^n\}, F, B)$ выполнены условия теоремы 3.

Из условий (1.16) и (3.19) вытекает, что при достаточно больших n

$$T \leq \frac{n - \log_2 \lambda + 1}{1 - \delta}. \quad (3.21)$$

Положим $r = r(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Тогда

$$|\{x \in V^n \setminus \{0^n\} : \|x\| < r\}| < C_n^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \log_2 n < n^{\log_2 n}. \quad (3.22)$$

Из (3.22) и условия (1.18) следует, что найдется такое $C_1(\lambda) > 0$, что при достаточно больших n

$$\begin{aligned} T \ln(1 + \Delta) &\leq (n - \log_2 \lambda + 1) \ln \left(2 \left(1 - \frac{\psi(n)}{n} \right) \right) \leq \\ &\leq (n - \log_2 \lambda + 1) \left(\ln 2 - \frac{\psi(n)}{n} \right) = \\ &= \ln(2^n - 1) - \psi(n) - \left(\ln(1 - 2^{-n}) + (1 - \log_2 \lambda)(\ln 2 - n^{-1}\psi(n)) \right) \leq \\ &\leq \ln(2^n - 1) - C_1(\lambda)\psi(n). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из (3.20)–(3.23) следует, что в нашем случае выполнено условие (1.24) теоремы 3:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \Delta)^T}{|D|} |\{x \in V^n \setminus \{0^n\} : \|x\| < r\}| &< \frac{e^{T \ln(1 + \Delta)}}{2^n - 1} n^{\log_2 n} < \\ &< e^{-C_1(\lambda)\psi(n)} n^{\log_2 n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Проверим, что в нашем случае выполнено условие (1.25) теоремы 3. Так как у нас $g = g(n) \geq r$, то согласно определению (см. (1.21))

$$l(r, g) = 2^{\lceil \log_2 n \rceil} - 1, \quad l(r - j, g - j) = 2^{\lceil \log_2 n \rceil - j} - 1 \geq n2^{-j-1} - 1. \quad (3.24)$$

Из (1.18), (3.21) и (3.24) следует, что при $j = 0, 1, \dots$ и достаточно больших n

$$T\Delta^{l(r-j, g-j)} < \frac{n - \log_2 \lambda + 1}{1 - \delta(n)} \left(1 - \frac{2\psi(n)}{n}\right)^{n2^{-j-1}-1} < \frac{C_2(\lambda)}{1 - \delta(n)} ne^{-2^{-j}\psi(n)}, \quad (3.25)$$

где $C_2(\lambda) < \infty$. Из (3.25) и (3.20) следует (1.25).

Осталось отметить, что в случае $D = V^n \setminus \{0^n\}$ и $R(f) = \overline{Q}_n^{(g)}$ соотношение (1.22) вытекает из теоремы 2. Таким образом, можно воспользоваться теоремой 3. Следствие 5 доказано.

Список литературы

1. Копытцев В. А., Михайлов В. Г. Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения. — Дискретная математика, 2010, т. 22, вып. 2, с. 3–21.
2. Копытцев В. А., Михайлов В. Г. Теоремы пуассоновского типа для числа решений случайных включений. — Математические вопросы криптографии, 2010, т. 1, вып. 4, с. 63–84.
3. Копытцев В. А. О числе решений систем линейных булевых уравнений в множестве векторов, обладающих заданным числом единиц. — Дискретная математика, 2002, т. 14, вып. 4, с. 87–109.
4. Копытцев В. А. О числе решений системы случайных линейных уравнений. — Дискретная математика, 2006, т. 18, вып. 1, с. 40–62.
5. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. — М.: Наука, 1976.
6. Севастьянов Б. А. Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее применен., 1972, т. 17, вып. 4, с. 733–738.
7. Михайлов В. Г. Предельные теоремы для числа решений системы случайных линейных уравнений, попавших в заданное множество. — Дискретная математика, 2007, т. 19, вып. 1, с. 17–26.
8. Масол В. И. Теорема о предельном распределении числа ложных решений системы нелинейных случайных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, вып. 1, с. 41–56.