Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Камловский, Коэффициенты кросс-корреляции разрядных последовательностей равномерных линейных рекуррент над примарным кольцом вычетов, *Матем. вопр. криптогр.*, 2020, том 11, выпуск 1, 47–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 09:24:44

Коэффициенты кросс-корреляции разрядных последовательностей равномерных линейных рекуррент над примарным кольцом вычетов

О. В. Камловский

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 29.IV.2019

Аннотация. Изучается класс последовательностей элементов простого поля, полученных в результате выделения старшего p -ичного разряда из линейных рекуррентных последовательностей над кольцом вычетов по модулю p^n . Приводятся абсолютные и неабсолютные оценки сверху для модулей коэффициентов кросс-корреляции рассматриваемых последовательностей. Эти результаты позволяют указать условия, при которых отрезки разрядных последовательностей, полученных из различных исходных последовательностей, также являются различными.

Ключевые слова: равномерные последовательности, линейные рекуррентные последовательности, разрядные последовательности, коэффициенты кросс-корреляции

Cross-correlation coefficients for digit sequences of uniform linear recurrent sequences over the residue ring

O. V. Kamlovskiy

Certification Research Center, LLC, Moscow

Abstract. We study the class of sequences over the prime field with p elements formed by the most significant p -ary digits of linear recurrent sequences over the residue ring modulo p^n . We obtain absolute and nonabsolute bounds for the cross-correlation coefficients of such sequences. This results lead to some sufficient conditions for segments of digit sequences obtained from different initial sequences to be different.

Keywords: uniform sequences, linear recurrent sequences, digit sequences, cross-correlation coefficients

Введение

Линейные рекуррентные последовательности (ЛРП) над кольцами вычетов примарного порядка p^n , где p — простое число, исследовались в ряде работ (см., например, [1, 2]). Одной из сложных современных задач является получение точных формул или оценок для частот появлений элементов на отрезках рассматриваемых последовательностей. В то же время важно уметь строить так называемые равномерные ЛРП, в которых на отрезках длины, кратной периоду последовательности, каждый элемент кольца появляется одинаково часто (см. [3–9]). Кроме того, для практических приложений необходимо усложнять исходную последовательность, чтобы получать последовательности с большим рангом (линейной сложностью). Один из таких способов построения равномерных ЛРП был предложен А.С. Кузьминым и А.А. Нечаевым в [1]. Он основан на сложении исходной (основной) ЛРП со счетчиковой последовательностью и последующим выделением старшего p -ичного разряда. Частотные характеристики r -грамм на циклах и отрезках таких последовательностей были изучены в [10, 11]. В частности, были получены оценки для модуля кросс-корреляционной функции, позволяющие гарантировать отсутствие сокращения периода и одинаковых последовательностей при различных начальных векторах ЛРП.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [10, 11]. В ней рассматриваются коэффициенты кросс-корреляции, характеризующие «близость» друг к другу отрезков исследуемых последовательностей. Отметим, что детально изучены сложные законы распределения элементов в основных последовательностях и их разрядных последовательностях (см., например, [2, 12–16]). Целью данной работы является получение для коэффициентов кросс-корреляции разрядных последовательностей равномерных ЛРП результатов, аналогичных тем, которые известны для разрядных последовательностей основных ЛРП.

1. Класс исследуемых последовательностей

Пусть $R = \mathbb{Z}_{p^n} = \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ — примарное кольцо вычетов. Рассмотрим унитарный реверсивный многочлен Галуа $F(x) \in R[x]$ (старший коэффициент многочлена $F(x)$ равен 1, многочлен $\bar{F}(x)$, полученный из $F(x)$ приведением всех его коэффициентов по модулю p , неприводим над полем $P = \mathbb{Z}_p$ и $\bar{F}(x) \neq x$) степени $\deg F(x) = m - 2$. Обозначим через $\oplus, \ominus, \otimes$ операции сложения, вычитания и умножения в поле P соответственно. Пусть

$$H(x) = (x - 1)^2 F(x). \quad (1)$$

Будет рассматривать семейство $L_R(H)$ всех ЛРП над кольцом R с характеристическим многочленом $H(x)$. Всюду далее будет изучаться случай, когда $\bar{F}(x) \neq x \ominus 1$. В этой ситуации (см. [1, 10]) каждая ЛРП $\omega \in L_R(H)$ однозначно представима в виде

$$\omega = v + u, \quad (2)$$

где $v \in L_R((x - 1)^2)$, $u \in L_R(F)$, причем существуют такие однозначно определенные элементы $a, b \in R$, что

$$v(i) = ai + b, \quad i \geq 0.$$

Последовательность ω является равномерной (см. [1, 10]) тогда и только тогда, когда $a \in R^*$, где R^* — мультипликативная группа кольца R . В этом случае ее период связан с периодом многочлена $\bar{F}(x)$ соотношением

$$T(\omega) = p^n T(\bar{F}) = \frac{p^n (p^{m-2} - 1)}{d}, \quad (3)$$

где d — некоторый делитель числа $p^{m-2} - 1$.

Рассмотрим отображение $f : R \rightarrow P$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in R$ с p -ичным представлением

$$x = x_0 + px_1 + \dots + p^{n-1}x_{n-1},$$

где $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in P$, его старший разряд x_{n-1} . Обозначим через $\omega' = f(\omega)$ последовательность с элементами $f(\omega(i))$, где $i \geq 0$. Учитывая равенство (2), получим

$$\omega'(i) = f(v(i) + u(i)) = f(ai + b + u(i)), \quad i \geq 0. \quad (4)$$

Если ω — равномерная последовательность над кольцом R (т. е. $a \in R^*$), то ω' является равномерной последовательностью над полем P . Исследования работ [1, 11] показывают, что последовательности ω' представляют интерес для криптографических приложений.

2. Коэффициенты кросс-корреляции

Пусть $\omega_1, \omega_2 \in L_R(H)$ и выполнены равенства

$$\omega_1(i) = a_1 i + b_1 + u_1(i), \quad \omega_2(i) = a_2 i + b_2 + u_2(i), \quad i \geq 0, \quad (5)$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$, $u_1, u_2 \in L_R(F)$. Каждый гомоморфизм ψ группы $(P, \oplus)$ в мультипликативную группу $\mathbb{C}^*$ поля комплексных чисел имеет вид (см. [17])

$$\psi(x) = e^{2\pi i \frac{c \otimes x}{p}}, \quad x \in P, \quad (6)$$

где $c \in P$. Будем использовать обозначение $\psi = \psi_c$. Определим коэффициент кросс-корреляции последовательностей

$$\omega'_1 = f(\omega_1), \quad \omega'_2 = f(\omega_2) \quad (7)$$

равенством

$$C_{\omega'_1, \omega'_2}(\psi, l, t) = \sum_{i=0}^{l-1} \psi(\omega'_1(i) \ominus \omega'_2(i+t)), \quad (8)$$

где $l, t \in \mathbb{N}$. Так как всюду в дальнейшем результаты не будут зависеть от выбора элемента $c \in P$, $c \neq 0$, то для рассматриваемого коэффициента будем использовать обозначение $C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)$. Значение величины $C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)$ тесно связано с близостью между векторами

$$(\omega'_1(0), \dots, \omega'_1(l-1)), \quad (\omega'_2(t), \dots, \omega'_2(l+t-1)). \quad (9)$$

Чем меньше величина $|C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)|$, тем заметнее отличаются друг от друга рассматриваемые векторы. В случае $p = 2$ имеет место равенство

$$C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t) = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{\omega'_1(i) \oplus \omega'_2(i+t)},$$

и несложно проверить, что расстояние $\rho_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)$ Хэмминга между векторами (9) вычисляется по формуле

$$\rho_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t) = \frac{l - C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)}{2}.$$

3. Сведение к суммам характеров кольца вычетов

Рассмотрим отображение $g = g_c : R \rightarrow \mathbb{C}$, определенное по правилу

$$g_c(x) = \psi(f(x)), \quad x \in R,$$

где f — функция выделения старшего p -ичного разряда, $c \in R$, $c \neq 0$, а $\psi = \psi_c$. Обозначим через L множество всех отображений из R в $\mathbb{C}$. Относительно операций сложения и умножения на комплексные числа L образует линейное пространство со скалярным произведением S , задаваемым для $h_1, h_2 \in L$ по правилу

$$S(h_1, h_2) = \frac{1}{|R|} \sum_{x \in R} h_1(x) \bar{h}_2(x),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Множество характеров группы $(R, +)$ состоит из характеров χ_a , $a \in R$, определенных равенством (см., например, [17])

$$\chi_a(x) = e^{2\pi i \frac{ax}{p^n}}, \quad x \in R. \quad (10)$$

Система характеров $\{\chi_a, a \in R\}$ образует ортонормированный базис евклидова пространства (L, S) , и справедливы равенства

$$g_c(x) = \sum_{d \in R} \nu_{c,d} \chi_d(x), \quad (11)$$

$$\nu_{c,d} = \frac{1}{|R|} \sum_{x \in R} g_c(x) \bar{\chi}_d(x). \quad (12)$$

В дальнейшем нам понадобится оценка величины

$$\sigma(g_c) = \sum_{d \in R} |\nu_{c,d}|. \quad (13)$$

Лемма 1 ([12]). 1) $\nu_{c,d} = 0$ при всех $d \in pR$,

2) при $n \geq 2$

$$\sigma(g_c) < \frac{2(n-1)}{\pi} \ln p + \frac{13}{40}p + \frac{7}{20}.$$

Докажем результаты, позволяющие свести изучение коэффициента $C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)$ к исследованию сумм значений аддитивных характеров кольца R .

Утверждение 1. Пусть $n \geq 2$, тогда

$$|C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)| < \left(\frac{2(n-1)}{\pi} \ln p + \frac{13}{40}p + \frac{7}{20} \right)^2 \max_{d, r \in R^*} \left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(d\omega_1(i) + r\omega_2(i+t)) \right|,$$

где $\chi = \chi_1$.

Доказательство. С использованием (8) и (11) получим

$$\begin{aligned} C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t) &= \sum_{i=0}^{l-1} \psi_c(\omega'_1(i)) \psi_{p \in c}(\omega'_2(i+t)) \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \psi_c(f(\omega_1(i))) \psi_{p \in c}(f(\omega_2(i+t))) = \sum_{i=0}^{l-1} g_c(\omega_1(i)) g_{p \in c}(\omega_2(i+t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{d \in R} \nu_{c,d} \chi_d(\omega_1(i)) \sum_{r \in R} \nu_{p \ominus c, r} \chi_r(\omega_2(i+t)) \\
&= \sum_{d, r \in R} \nu_{c,d} \nu_{p \ominus c, r} \sum_{i=0}^{l-1} \chi_d(\omega_1(i)) \chi_r(\omega_2(i+t)).
\end{aligned}$$

Согласно лемме 1 в этой формуле достаточно ограничиться суммированием по всем d, r из множества $R \setminus pR = R^*$, поэтому

$$C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t) = \sum_{d, r \in R^*} \nu_{c,d} \nu_{p \ominus c, r} \sum_{i=0}^{l-1} \chi(dw_1(i) + r\omega_2(i+t))$$

и, переходя к абсолютным величинам, получим

$$|C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)| \leq \left(\sum_{d \in R^*} |\nu_{c,d}| \right) \left(\sum_{r \in R^*} |\nu_{p \ominus c, r}| \right) \max_{d, r \in R^*} \left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(dw_1(i) + r\omega_2(i+t)) \right|.$$

Для завершения доказательства утверждения 1 остается воспользоваться оценкой величины $\sigma(g_c)$ из леммы 1. $\square$

4. Абсолютная оценка

Получим оценку коэффициента кросс-корреляции (8), которая не будет зависеть от длины l рассматриваемых отрезков ЛРП. Назовем такую оценку абсолютной.

Нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Лемма 2 ([10]). *Если $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени $m - 2$ над кольцом $R = \mathbb{Z}_{p^n}$, $\bar{F}(x) \neq x \ominus 1$, то для каждой ЛРП $\omega \in L_R(H) \setminus L_R(x - 1)$ и любого такого $l \in \mathbb{N}$, что $l \leq p^n T(\bar{F})$,*

$$\left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(\omega(i)) \right| < \left(\frac{4}{\pi^2} \ln T(\bar{F}) + \frac{9}{5} \right) p^{\frac{m}{2} + 2n - 2}.$$

На множестве всех векторов-строк фиксированной длины над кольцом R зададим бинарное отношение $\sim$, положив $\vec{\alpha} \sim \vec{\beta}$, если существует такой элемент $c \in R^*$, что $\vec{\beta} = c\vec{\alpha}$.

Теорема 1. *Пусть последовательности ω_1, ω_2 определены равенством (5), ω'_1, ω'_2 заданы соотношением (7), $F(x)$ — реверсивный*

многочлен Галуа степени $m - 2$ над кольцом R , $\bar{F}(x) \neq x \ominus 1$ и $(u_1(0), \dots, u_1(m-3), a_1) \not\sim (u_2(t), \dots, u_2(t+m-3), a_2)$, $n \geq 2$. Тогда при всех $l \leq p^n T(\bar{F})$ для коэффициента кросс-корреляции (8) справедлива оценка

$$|C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)| < \left(\frac{2(n-1)}{\pi} \ln p + \frac{13}{40}p + \frac{7}{20} \right)^2 \left(\frac{4}{\pi^2} \ln T(\bar{F}) + \frac{9}{5} \right) p^{\frac{m}{2} + 2n - 2}.$$

Доказательство. Покажем, что при условии

$$(u_1(0), \dots, u_1(m-3), a_1) \not\sim (u_2(t), \dots, u_2(t+m-3), a_2)$$

последовательность с элементами $d\omega_1(i) + r\omega_2(i+t)$, где $i \geq 0$, не принадлежит множеству $L_R(x-1)$ при всех $d, r \in R^*$. Действительно, согласно (5) $d\omega_1(i) + r\omega_2(i+t) = \text{const}$ для всех $i \geq 0$ только если $(da_1 + ra_2)i + du_1(i) + ru_2(i+t) = \text{const}$ для всех $i \geq 0$. В силу единственности представления (2) это равносильно тому, что $da_1 + ra_2 = 0$ и $du_1(i) + ru_2(i+t) = 0$ для всех $i \geq 0$, т. е. условию

$$d(u_1(0), \dots, u_1(m-3), a_1) + r(u_2(t), \dots, u_2(t+m-3), a_2) = (0, \dots, 0).$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 2 и утверждением 1. $\square$

5. Сравнение с основными ЛРП

Пусть $G(x)$ — унитарный реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом $R = \mathbb{Z}_{p^n}$, $\delta_1, \delta_2 \in L_R(G)$ — ЛРП и $\delta'_1 = f(\delta_1)$, $\delta'_2 = f(\delta_2)$ — их p -ичные разрядные последовательности. Последовательности δ'_1 и δ'_2 зачастую рассматриваются как усложнения последовательностей δ_1 и δ_2 соответственно (см. [1, 2]). Оценим коэффициент кросс-корреляции

$$C_{\delta'_1, \delta'_2}(l, t) = \sum_{i=0}^{l-1} \psi(\delta'_1(i) \ominus \delta'_2(i+t)).$$

Теорема 2. Пусть $\delta_1, \delta_2 \in L_R(G)$, $G(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом R , $\delta'_1 = f(\delta_1)$, $\delta'_2 = f(\delta_2)$, $(\delta_1(0), \dots, \delta_1(m-1)) \not\sim (\delta_2(t), \dots, \delta_2(t+m-1))$, $n \geq 2$. Тогда при всех $l \leq T(G)$

$$|C_{\delta'_1, \delta'_2}(l, t)| < \left(\frac{2(n-1)}{\pi} \ln p + \frac{13}{40}p + \frac{7}{20} \right)^2 \left(\frac{4}{\pi^2} \ln T(\bar{G}) + \frac{9}{5} \right) p^{\frac{m}{2} + 2n - 2}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 с использованием оценки (см. [12]).

$$\left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(\delta(i)) \right| < \left(\frac{4}{\pi^2} \ln T(\bar{G}) + \frac{9}{5} \right) p^{\frac{m}{2} + 2n - 2},$$

справедливой для всех $l \leq T(G)$ и каждой ненулевой ЛРП $\delta \in L_R(G)$. $\square$

Теорема 2 обобщает на случай произвольного значения p результаты работ [13, 14, 16]. Кроме того, при $p = 2$ теорема 2 устанавливает несколько более точные оценки, чем результаты, приведенные в указанных статьях.

Отметим, что при фиксированных значениях n , p и $m \rightarrow \infty$ правые части оценок из теорем 1 и 2 имеют вид $O(mp^{\frac{m}{2}})$.

Рассмотрим оценки из теорем 1 и 2 в наиболее интересном частном случае, когда $F(x)$ и $G(x)$ — многочлены максимальных периодов: $T(F) = p^{n-1}(p^{m-2} - 1)$, $T(G) = p^{n-1}(p^m - 1)$. В этом случае для равномерных ЛРП ω'_1 , ω'_2 удастся гарантировать несколько более точные оценки, чем для ЛРП δ'_1 , δ'_2 . Отметим, что в общем случае нельзя добиться равномерности последовательностей δ'_1 и δ'_2 , в то время как равномерность последовательностей ω'_1 и ω'_2 достигается выбором обратимых элементов a_1 и a_2 в равенстве (5). Таким образом, разрядные последовательности равномерных ЛРП ω_1 , ω_2 с точки зрения обоснованности свойств распределений элементов на отрезках более интересны, чем разрядные последовательности основных ЛРП δ_1 , δ_2 .

6. Неабсолютная оценка

Получим верхнюю оценку модуля коэффициента кросс-корреляции (8), которая зависит от длины l рассматриваемых отрезков ЛРП. Для этого понадобится соответствующая оценка суммы

$$\sigma_l(\omega) = \sum_{i=0}^{l-1} \chi(\omega(i)).$$

Утверждение 2. Если $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени $m - 2$ над кольцом $R = \mathbb{Z}_{p^n}$, $\bar{F}(x) \neq x \oplus 1$, $T(F) = p^\nu(p^{m-2} - 1)/d$, $T(\bar{F}) \geq p^{2n}/3$, то для каждой ЛРП $\omega \in L_R(H) \setminus L_R(x - 1)$ и любого

такого $l \in \mathbb{N}$, что $l < T(\bar{F})$, выполнено неравенство

$$|\sigma_l(\omega)| \leq \left(\frac{3p^nl}{d} (p^{m-2} + (l-1)(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Доказательство. Пусть последовательность ω удовлетворяет соотношению (2). По условию либо $a \neq 0$, либо u — ненулевая последовательность. Если u — нулевая последовательность, то согласно [10, теорема 1] $|\sigma_l(\omega)| < p^n$. В этом случае доказываемое неравенство имеет место, так как $3T(\bar{F}) \geq p^{2n}$. Пусть теперь u — ненулевая ЛРП. Так как $F(x)$ — реверсивный многочлен, то ω является чисто периодической последовательностью и $T(\omega) \geq T(u) \geq T(\bar{F})$. Пусть $v_k = x^k\omega$, $k \geq 0$, — сдвиг последовательности ω на k шагов влево. Тогда множество $P(\omega)$ всех сдвигов ЛРП ω имеет вид $P(\omega) = \{v_0, v_1, \dots, v_{T(\omega)-1}\}$. Согласно [18, теорема 1] будет выполнено неравенство

$$|\sigma_l(\omega)| \leq \left(3 \sum_{v \in P(\omega)} |\sigma_l(v)|^2 \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (14)$$

Период $T(\omega)$ является делителем числа $p^n T(\bar{F})$, поэтому справедливо соотношение

$$\sum_{v \in P(\omega)} |\sigma_l(v)|^2 = \frac{T(\omega)}{p^n T(\bar{F})} \sum_{k=0}^{p^n T(\bar{F})-1} |\sigma_l(v_k)|^2. \quad (15)$$

Оценим сверху величину

$$R(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n T(\bar{F})-1} |\sigma_l(v_k)|^2.$$

Имеет место равенство

$$R(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n T(\bar{F})-1} \sigma_l(v_k) \overline{\sigma_l(v_k)},$$

где $\overline{\sigma_l(v_k)}$ — число, комплексно сопряженное к числу $\sigma_l(v_k)$. Тогда

$$R(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n T(\bar{F})-1} \sum_{i=0}^{l-1} \chi(v_k(i)) \sum_{j=0}^{l-1} \chi(-v_k(j)). \quad (16)$$

Из (16) следует, что

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \sum_{k=0}^{p^n T(\bar{F})-1} \sum_{i,j=0}^{l-1} \chi(v_k(i) - v_k(j)) \\ &= \sum_{k=0}^{p^n T(\bar{F})-1} \sum_{i,j=0}^{l-1} \chi(ai - aj + u(k+i) - u(k+j)). \end{aligned}$$

Представим ЛРП u с использованием функции «след» (см., например, [1]):

$$u(i) = \text{Tr}_R^S(b\alpha^i), \quad i \geq 0,$$

где $S = GR(p^{(m-2)n}, p^n)$ — кольцо Галуа характеристики p^n , состоящее из $p^{(m-2)n}$ элементов, α — корень многочлена $F(x)$ в кольце S , а b — ненулевой элемент кольца S . Тогда

$$R(\omega) = \sum_{i,j=0}^{l-1} \chi(a(i-j)) \sum_{k=0}^{p^n T(\bar{F})-1} \chi'(b(\alpha^i - \alpha^j)\alpha^k),$$

где χ' — аддитивный характер кольца S , определенный равенством $\chi'(y) = \chi(\text{Tr}_R^S(y))$. Выделив отдельно слагаемое, соответствующее случаю $i = j$, получим

$$R(\omega) = p^n T(\bar{F})l + p^{n-\nu} \sum_{i \neq j} \chi(a(i-j)) \sum_{k=0}^{p^\nu T(\bar{F})-1} \chi'(b(\alpha^i - \alpha^j)\alpha^k).$$

Значит,

$$\begin{aligned} R(\omega) &= p^n T(\bar{F})l \\ &+ p^{n-\nu} \sum_{i \neq j} \chi(a(i-j)) \left(\sum_{k=0}^{p^\nu T(\bar{F})-1} \chi'(b(\alpha^i - \alpha^j)\alpha^k) + \frac{p^\nu}{d} \right) - \frac{p^n}{d} \sum_{i \neq j} \chi(a(i-j)). \end{aligned}$$

Если $a = 0$, то

$$\sum_{i \neq j} \chi(a(i-j)) = l(l-1).$$

Если $a \neq 0$, то

$$\sum_{i \neq j} \chi(a(i-j)) = -l + \sum_{i,j=0}^{l-1} \chi(a(i-j)) = -l + \left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(ai) \right|^2.$$

Переходя к рассмотрению абсолютных величин, получим

$$|R(\omega)| \leq p^n T(\bar{F})l + \frac{lp^n}{d} + p^{n-\nu}l(l-1) \max_{i \neq j} \left| \sum_{k=0}^{p^\nu T(\bar{F})-1} \chi'(b(\alpha^i - \alpha^j)\alpha^k) + \frac{p^\nu}{d} \right|$$

$$= \frac{lp^{m+n-2}}{d} + p^{n-\nu}l(l-1) \max_{i \neq j} \left| \sum_{k=0}^{p^\nu T(\bar{F})-1} \chi'(b(\alpha^i - \alpha^j)\alpha^k) + \frac{p^\nu}{d} \right|.$$

Заметим, что образ элемента $\alpha^i - \alpha^j$ при действии естественного эпиморфизма колец $S \rightarrow S/pS$ равен $\bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^j$, где $\bar{\alpha}$ — корень многочлена $\bar{F}(x)$ в поле $GF(q^{m-2})$. Тогда при всех различных $i, j \in \overline{0, l-1}$ и $l \leq T(\bar{F})$ элемент $\bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^j$ ненулевой, а значит, элемент $\alpha^i - \alpha^j$ — обратимый элемент кольца S . С использованием оценки из [19] получим

$$\left| \sum_{k=0}^{p^\nu T(\bar{F})-1} \chi'(b(\alpha^i - \alpha^j)\alpha^k) + \frac{p^\nu}{d} \right| \leq \frac{dp^{n-1} - 1}{d} p^{\frac{m}{2} + \nu - 1}.$$

Таким образом,

$$|R(\omega)| \leq \frac{lp^n}{d} (p^{m-2} + (l-1)(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}),$$

а значит, согласно равенству (15)

$$\sum_{v \in P(\omega)} |\sigma_l(v)|^2 \leq \frac{lp^n}{d} (p^{m-2} + (l-1)(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}).$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться неравенством (14). $\square$

Основным результатом этого раздела является следующая неабсолютная оценка модуля коэффициента кросс-корреляции.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 дополнительно выполнены соотношения $T(\bar{F}) \geq p^{2n}/3$, $l < T(\bar{F})$, тогда

$$|C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)| < C(n, p)^2 \left(\frac{3p^n l}{d} (p^{m-2} + (l-1)(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \right)^{\frac{1}{3}},$$

где

$$C(n, p) = \frac{2(n-1)}{\pi} \ln p + \frac{13}{40}p + \frac{7}{20}.$$

Доказательство. проводится аналогично доказательству теоремы 1 с использованием утверждений 1 и 2. $\square$

Покажем, что полученная неабсолютная оценка точнее абсолютной оценки из теоремы 1 при всех l , удовлетворяющих условиям

$$p^{\frac{m}{2}-1} \leq l \leq \frac{1}{\sqrt{3}} C(F)^{\frac{3}{2}} p^{\frac{m}{2}+2n-2}, \quad (17)$$

где

$$C(F) = \frac{4}{\pi^2} \ln T(\bar{F}) + \frac{9}{5}.$$

Действительно, это так при условии

$$\frac{3p^nl}{d}(p^{m-2} + (l-1)(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) < C(F)^3 p^{\frac{3m}{2}+6n-6}.$$

Последнее неравенство заведомо выполнено, если

$$\frac{l}{d}(p^{m-2} + l(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \leq \frac{1}{3} C(F)^3 p^{\frac{3m}{2}+5n-6}. \quad (18)$$

Так как $l \geq p^{m/2-1}$, то неравенство (18) выполняется при условии

$$\frac{l}{d}(p^{\frac{m}{2}-1}l + l(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \leq \frac{1}{3} C(F)^3 p^{\frac{3m}{2}+5n-6},$$

что равносильно

$$l^2 \leq \frac{1}{3} C(F)^3 p^{m+4n-4}.$$

7. Различные отрезки последовательностей

Рассмотрим вопрос о значении длины l , при которой отрезки (9) являются различными.

Теорема 4. Пусть последовательности ω_1, ω_2 определены равенством (5), последовательности ω'_1, ω'_2 заданы соотношением (7), $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени $m-2$ над кольцом R , $m \geq 4$, $n \geq 2$, $\bar{F}(x) \neq x \ominus 1$, $(u_1(0), \dots, u_1(m-3), a_1) \not\sim (u_2(t), \dots, u_2(t+m-3), a_2)$,

$$l_0 = \lceil 3C(n, p)^6 p^{\frac{m}{2}+2n-2} \rceil.$$

Тогда если $l_0 < T(\bar{F})$, то

$$(\omega'_1(0), \dots, \omega'_1(l_0-1)) \neq (\omega'_2(t), \dots, \omega'_2(t+l_0-1)).$$

Доказательство. Допустим, что рассматриваемые отрезки последовательностей равны. Тогда $|C_{\omega'_1, \omega'_2}(l_0, t)| = l_0$. Так как $C(n, p) \geq 1$, $m \geq 4$, то из условия $T(\bar{F}) > l_0$ следует, что $3T(\bar{F}) \geq p^{2n}$. Тогда по теореме 3

$$l_0 = |C_{\omega'_1, \omega'_2}(l_0, t)| < C(n, p)^2 \left(\frac{3p^n l_0}{d} (p^{m-2} + (l_0 - 1)(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (19)$$

Покажем, что при всех

$$l \geq 3C(n, p)^6 p^{\frac{m}{2}+2n-2}$$

будет выполнено соотношение

$$C(n, p)^2 \left(\frac{3p^n l}{d} (p^{m-2} + (l - 1)(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \right)^{\frac{1}{3}} \leq l, \quad (20)$$

которое будет противоречить соотношению (19) при подстановке значения $l = l_0$. Неравенство (20) имеет место, если

$$\frac{3p^n C(n, p)^6}{d} (p^{m-2} + l(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \leq l^2.$$

Так как рассматривается случай $l \geq p^{m/2-1}$, то полученное неравенство заведомо выполнено при условии

$$\frac{3p^n C(n, p)^6}{d} (lp^{\frac{m}{2}-1} + l(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \leq l^2,$$

т. е. при

$$l \geq 3C(n, p)^6 p^{\frac{m}{2}+2n-2}.$$

□

Теорема 4 показывает, что если p, n фиксированы, а $m \rightarrow \infty$, то векторы (9) различаются при длине $l = O(p^{\frac{m}{2}})$.

8. Неабсолютная оценка для больших длин отрезков

Оценка из теоремы 3 справедлива при $l < T(\bar{F})$, в то время как оценка из теоремы 1 имеет место при $l \leq p^n T(\bar{F})$. Предложим подход, позволяющий получить неабсолютные оценки на длине $l \leq p^n (T(\bar{F}) - 1)$.

Теорема 5. Пусть в условиях теоремы 1 дополнительно выполнено соотношение $l \leq p^n(T(\bar{F}) - 1)$, тогда

$$|C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)| < p^n C(n, p)^2 \left(\frac{3l_1}{d} (p^{m-2} - l_1 + (l_1 - 1)(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \right)^{\frac{1}{3}},$$

где $l_1 = \left\lfloor \frac{l-1}{p^n} \right\rfloor + 1$.

Доказательство. Из утверждения 1 следует, что

$$|C_{\omega'_1, \omega'_2}(l, t)| < C(n, p)^2 \max_{\omega \in L_R(H) \setminus L_R(x-1)} \left| \sum_{i=0}^{l-1} \omega(i) \right|. \quad (21)$$

Согласно [10] если ω имеет вид (2), где u — нулевая последовательность, то

$$\left| \sum_{i=0}^{l-1} \omega(i) \right| < p^n,$$

а если u — ненулевая последовательность, то

$$\left| \sum_{i=0}^{l-1} \omega(i) \right| \leq \sum_{j=1}^{p^n} \left| \sum_{k=0}^{l_j-1} v_j(k) \right|,$$

где $l_j = \left\lfloor \frac{l-j}{p^n} \right\rfloor + 1$, а $v_j(k) = u(j-1+kp^n)$, $k \geq 0$. При этом последовательность v_j является ненулевой ЛРП, характеристический многочлен которой — реверсивный многочлен Галуа степени $m-2$ и периода $(p^{m-2}-1)/d$. Из [18, следствие 1] следует, что при $l_j < T(\bar{F})$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=0}^{l_j-1} v_j(k) \right| \leq \left(\frac{3l_j}{d} (p^{m-2} - l_j + (l_j - 1)(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Заметим, что правая часть последнего неравенства возрастает с ростом l_j и всегда больше либо равна 1. Кроме того, по условию

$$l_1 = \left\lfloor \frac{l-1}{p^n} \right\rfloor + 1 = \frac{l-a}{p^n} + 1 < \frac{l}{p^n} + 1 \leq T(\bar{F}),$$

где $a \in \{1, \dots, p^n\}$ выбрано так, что p^n делит $l-a$. Таким образом,

$$\left| \sum_{i=0}^{l-1} \omega(i) \right| \leq p^n \left(\frac{3l_1}{d} (p^{m-2} - l_1 + (l_1 - 1)(dp^{n-1} - 1)p^{\frac{m}{2}-1}) \right)^{\frac{1}{3}},$$

и остается воспользоваться неравенством (21). $\square$

Оценка из теоремы 5 оказывается несколько менее точной, чем оценка из теоремы 3, однако она представляет интерес, если длина отрезков $l \geq T(\bar{F})$, так как в этом случае теорема 3 неприменима. По аналогии с вышеприведенными рассуждениями можно показать, что оценка теоремы 5 заведомо точнее абсолютной оценки из теоремы 1, если

$$p^{\frac{m}{2}-1} \leq l_1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}} C(F)^{\frac{3}{2}} p^{\frac{m}{2}+2n-2}.$$

Результаты работы показывают, что разрядные последовательности равномерных ЛРП являются усложнениями исходных ЛРП и могут быть использованы при построении псевдослучайных чисел.

Список литературы

- [1] Kurakin V. L., Kuzmin A. S., Mikhalev A. V., Nechaev A. A., “Linear recurring sequences over rings and modules”, *J. Math. Sci.*, **76**:6 (1995), 2793–2915.
- [2] Кузьмин А.С., Куракин В.Л., Нечаев А.А., “Псевдослучайные и полилинейные последовательности”, *Труды по дискретной математике*, **1** (1997), 139–202.
- [3] Кейперс Л., Нидеррайтер Г., *Равномерное распределение последовательностей*, М.: Наука, 1985, 408 с.
- [4] Ларин М.В., “Транзитивные полиномиальные преобразования колец вычетов”, *Дискретная математика*, **14**:2 (2002), 20–32.
- [5] Анашин В.С., “Равномерно распределенные последовательности целых p -адических чисел”, *Дискретная математика*, **14**:4 (2002), 3–64.
- [6] Herendi T., “Uniform distribution of linear recurring sequences modulo prime powers”, *Finite Fields and Appl.*, **10**:1 (2004), 1–23.
- [7] Knight M.J., Webb W.A., “Uniform distribution of third order linear recurrence sequences”, *Acta Arith.*, **36** (1980), 7–20.
- [8] Narkiewicz W., “Uniform distribution of sequences of integers in residue classes”, *Lect. Notes Math.*, **1087**, 1984, 140 pp.
- [9] Turnwald G., “Uniform distribution of second-order linear recurring sequences”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **96** (1986), 189–198.
- [10] Камловский О.В., “Распределение r -грамм в одном классе равномерных последовательностей над кольцами вычетов”, *Проблемы передачи информации*, **50**:1 (2014), 98–115.
- [11] Камловский О.В., “Равномерные последовательности над простыми полями, построенные из одного класса линейных рекуррент над кольцами вычетов”, *Проблемы передачи информации*, **50**:2 (2014), 60–76.
- [12] Камловский О.В., “Частотные характеристики разрядных последовательностей линейных рекуррент над кольцами Галуа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:6 (2013), 71–96.

- [13] Sole P., Zinoviev D., “Distribution of r -patterns in the most significant bit of a maximum length sequence over $\mathbb{Z}_{2^t}$ ”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **3486** (2005), 275–281.
- [14] Sole P., Zinoviev D., “The most significant bit of maximum-length sequences over $\mathbb{Z}_{2^t}$: autocorrelation and imbalance”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **50**:8 (2006), 1844–1846.
- [15] Qi W., Zhou J., “Distribution of 0 and 1 in the highest level of primitive sequences over $\mathbb{Z}_{2^e}$ ”, *Science in China (Ser. A)*, **40**:6 (1997), 606–611.
- [16] Hu H., Feng D., Wu W., “Incomplete exponential sums over Galois rings with applications to some binary sequences derived from $\mathbb{Z}_{2^t}$ ”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **52**:5 (2006), 2260–2265.
- [17] Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*, **1, 2**, М.: Мир, 1988, 822 с.
- [18] Камловский О.В., “Метод В.М. Сидельникова для оценки числа знаков на отрезках линейных рекуррентных последовательностей над кольцами Галуа”, *Матем. заметки*, **91**:3 (2012), 371–382.
- [19] Камловский О.В., Кузьмин А.С., “Оценки частот появления элементов в линейных рекуррентных последовательностях над кольцами Галуа”, *Фундам. и прикл. математика*, **6**:4 (2000), 1083–1094.