Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Кузьмин, Г. Б. Маршалко, Восстановление линейной рекуррентной функции над простым кольцом вычетов по ее усложнению. II, *Матем. вopr. криптогр.*, 2011, том 2, выпуск 2, 81–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk32>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:10:26

Восстановление линейной рекуррентной последовательности над примарным кольцом вычетов по ее усложнению. II

А. С. Кузьмин¹, Г. Б. Маршалко²

¹Академия криптографии Российской Федерации, Москва

²Лаборатория ТВП, Москва

Получено 22.IV.2010

Пусть v — псевдослучайная последовательность над полем $\mathbb{Z}_p$, $p \geq 3$, которая получается усложнением знаков ЛРП u максимального периода над кольцом $\mathbb{Z}_{p^n}$. В работе исследуются условия на преобразование, задающее усложнение рекуррентной последовательности, при которых происходит сокращение периода последовательности v .

Ключевые слова: Линейная рекуррентная последовательность, кольцо вычетов, примитивный многочлен

Reconstruction of linear recurrent sequence over prime residue ring from its image. II

A. S. Kuzmin¹, G. B. Marshalko²

¹Academy of Cryptography of Russian Federation, Moscow

²TVP Laboratory, Moscow

Abstract. Let v be a pseudorandom sequence over $\mathbb{Z}_p$, $p \geq 3$, obtained from primitive sequence u over the ring $\mathbb{Z}_{p^n}$ by means of some compressing map. We study conditions on the compressing map under which the period of v is less than the period of the initial sequence u .

Key words: Compressing map, integer residue ring, linear recurrent sequence, primitive sequence

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2011, vol. 2, no. 2, pp. 81–93 (Russian).

Введение

Настоящая работа является продолжением исследований возможности восстановления линейной рекурренты (ЛРП) над кольцом вычетов $R = \mathbb{Z}_{p^n}$, $p > 2$, по ее усложнению, начатым в [3].

В работе [3] исследовалась возможность восстановления ЛРП максимального периода над примарным кольцом вычетов по ее усложнению. При этом для некоторых классов функций усложнения были приведены алгоритмы восстановления начального вектора рекурренты и описаны условия, при которых не происходит сокращения периода усложненной последовательности по сравнению с периодом старшей координатной последовательности рекурренты.

В данной работе исследуются условия на преобразование, задающее усложнение рекурренты, при которых происходит сокращение периода усложненной последовательности.

1. Математический аппарат

Пусть p — простое число, $n \in \mathbb{N}$ и $R = (\mathbb{Z}_M, +, \cdot)$ — кольцо вычетов кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел по модулю $M = p^n$ с единицей e . Пусть $F(x) \in R[x]$ — унитарный многочлен степени m вида $F(x) = x^m - \sum_{j=0}^{m-1} f_j \cdot x^j$. Последовательность $u: \mathbb{N}_0 \rightarrow R$ над кольцом R называют *линейной рекуррентной последовательностью порядка m* с характеристическим многочленом $F(x)$, если ее знаки удовлетворяют соотношениям

$$u(i+m) = \sum_{j=0}^{m-1} f_j \cdot u(i+j), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

В этом случае унитарный многочлен $F(x) = x^m - \sum_{j=0}^{m-1} f_j \cdot x^j$ называют *характеристическим многочленом* последовательности u . Множество последовательностей с характеристическим многочленом $F(x)$ обозначим через $L_R(F)$.

Каждый элемент $a \in R$ имеет однозначное p -ичное представление вида

$$a = \sum_{s=0}^{n-1} a_s \cdot p^s, \quad a_s \in \mathbb{Z}_p = \{0, \dots, p-1\}, \quad s \in 0, \dots, n-1.$$

Будем называть коэффициент a_s в последней сумме s -й (p -ичной) координатой элемента a и использовать обозначение $a_s = \delta_s(a)$. В соответствии с этим каждой последовательности $u \in R^\infty$ соответствуют n последовательностей $u_s = \delta_s(u) \in \mathbb{Z}_p^\infty$, $s \in 0, \dots, n-1$, члены которых определяются соотношением

$$u(i) = \sum_{s=0}^{n-1} u_s(i) \cdot p^s, \quad u_s(i) = \delta_s(u(i)), \quad s \in 0, \dots, n-1. \quad (1)$$

Назовем $u_0, \dots, u_{n-1}$ координатными последовательностями последовательности u . Очевидно, каждая из этих последовательностей есть ЛРП над полем $\mathbb{Z}_p$.

Основным объектом изучения в качестве псевдослучайной последовательности (ПСП) являются последовательность u_{n-1} и последовательности $v \in \mathbb{Z}_p^\infty$ более общего вида

$$v(i) = \Psi(u(i)), \quad (2)$$

где $\Psi: R^n \rightarrow \mathbb{Z}_p$ — некоторая функция. Будем кратко писать в этом случае $v = \Psi(u)$. Заметим, что, пользуясь разложением (1), функцию $\Psi(x)$ над R можно рассматривать как многочлен $\Psi(x) = \psi(x_0, \dots, x_{n-1})$ над полем $\mathbb{Z}_p$ от переменных $x_s = \delta_s(x)$. При этом последовательности $z = u_{n-1}$ соответствует функция $\Psi(x) = \psi(x_{n-1}) = x_{n-1}$.

Для периода $T(F)$ любого многочлена $F(x) \in R[x]$ степени m выполняется неравенство

$$T(F) \leq p^{n-1}(p^m - 1).$$

Если $T(F) = p^{n-1}(p^m - 1)$, то многочлен F называется *многочленом максимального периода* (МП-многочленом) или *примитивным многочленом*.

Любая ЛРП над R ранга m имеет период $T(u) \leq p^{n-1}(p^m - 1)$. Последовательность u над R будем называть *линейной рекуррентой максимального периода* (ЛРП МП), если

$$\text{rk } u = m, \quad T(u) = p^{n-1}(p^m - 1). \quad (3)$$

Назовем поле $\bar{R} = R/pR = \mathbb{Z}_p$ *полем вычетов* кольца R , и для любой последовательности $u \in R^\infty$ и любого многочлена $F(x) \in R[x]$ через $\bar{u}$, $\bar{F}$ обозначим соответствующие образы при естественном эпиморфизме $R \rightarrow \bar{R}$. Для любого унитарного многочлена $F(x) \in R[x]$ положим

$$L_R(F)^* = \{u \in L_R(F) : \bar{u} \neq \bar{0}\}.$$

Тогда (3) равносильно тому, что для некоторого унитарного многочлена $F(x) \in R[x]$ степени m выполняются условия

$$u \in L_R(F)^*, \quad T(F) = p^{n-1}(p^m - 1). \quad (4)$$

Заметим, что условие (4) влечет за собой условие $T(\overline{F}(x)) = p^m - 1$, т. е. $\overline{F}(x)$ — неприводимый и, более того, примитивный многочлен над $\overline{R}$.

В работах [4, 5, 7, 14] показано, что для многочлена максимального периода существуют многочлены $\Phi^{(s+1)}(x)$, $s = 0, \dots, n-2$, такие, что справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x^{\tau_s} - e &\equiv p^{s+1} \Phi^{(s+1)}(x) \pmod{F(x)}, \deg \Phi^{(s+1)}(x) < m, \\ \overline{\Phi}^{(s+1)}(x) &= \overline{\Phi}^{(1)}(x) \neq \overline{0}, \quad s = 0, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tau_s = p^s(p^m - 1)$.

Заметим, что многочлен $\Phi^{(s)}(x)$ определен однозначно только по модулю p^{n-s} .

В работах [23, 25] МП-многочлен $F(x)$ называется *сильнопримитивным*, если $\deg(\Phi^{(1)}(x)) \geq 1$.

Для любой последовательности ЛРП $u \in L_R(F)^*$ назовем последовательность

$$u^{(s)} = \Phi_s(x)u$$

s -й производной (от) последовательности u . Заметим, что в силу (5) справедливы равенства

$$u_0^{(s)} = u_0^{(1)}, \quad s = 2, \dots, n-1.$$

Следующая теорема описывает частоты появления обратимых элементов кольца на цикле рекурренты.

Теорема 1 ([14]). Пусть $F(x)$ — многочлен максимального периода степени m , $m \geq 2$, над примарным кольцом $R = \mathbb{Z}_{p^n}$, $p \geq 3$, $n \geq 2$. Тогда для частот $\nu_u(\alpha)$ появления элементов кольца R на цикле ЛРП МП $u \in L_R(F)$ справедливы следующие оценки:

если $F(x)$ не является сильнопримитивным, $m \geq 2$ и α — обратимый элемент кольца R , то

$$\begin{aligned} \nu_u(\alpha) &= p^{m-1}, \quad \text{для } p \geq 3, \\ \nu_u(\alpha) &= 2^{m-2}, \quad \text{для } p = 2, \quad n \geq 3 \end{aligned} \quad (6)$$

если $F(x)$ — сильнопримитивный, $m \geq 3$, то

$$\begin{aligned} \nu_u(\alpha) &\geq (p-1)p^{m-2}, \text{ для } p \geq 3, \\ \nu_u(\alpha) &\geq 2^{m-3}, \text{ для } p = 2, n \geq 3. \end{aligned} \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частности, из теоремы 1 следует, что в любой ЛРП МП порядка $m \geq 3$ встречаются все обратимые элементы кольца R .

Теорема 2 ([2]). Пусть u — ЛРП МП над кольцом $R = \mathbb{Z}_{p^n}$, $n \geq 2$, с характеристическим многочленом $F(x)$ степени $m \geq 4n - 2$, тогда в ЛРП u встречаются все элементы кольца R .

Далее там, где возможно двусмысленное толкование, операции сложения, вычитания и умножения по модулю p на координатном множестве $\mathbb{Z}_p$ обозначаются символами $\oplus, \ominus, \otimes$. В соответствии с этим произведение многочлена $\bar{A}(x) \in \bar{R}[x]$ и многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ на последовательность $u \in \mathbb{Z}_p^\infty$ обозначается, соответственно, $\bar{A}(x) \otimes u$ и $f(x) \otimes u$. Заметим, что $\bar{A}(x) \otimes u = \overline{A(x)u}$.

В работе [3] доказаны следующие две леммы о соотношениях между элементами координатных последовательностей ЛРП МП над примарными кольцами вычетов.

Лемма 1 ([3]). Для координатных последовательностей ЛРП МП u над кольцом $\mathbb{Z}_{p^n}$, $p \geq 3$, справедливы следующие соотношения:

а) при $s \in \{1, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, \dots, p-1\}$

$$(x^{j\tau_{s-1}} - e) \otimes u_s = ju_0^{(1)}, \quad (8)$$

б) при $s \in \{2, \dots, n-1\}$ и $\Delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x + y < p, \\ 1, & \text{если } x + y \geq p, \end{cases}$

$$(x^{\tau_{s-2}} - e) \otimes u_s = u_1^{(s-1)} \oplus \Delta(u_{s-1}; u_0^{(1)}); \quad (9)$$

с) при $0 \leq t < s-1$

$$v_{s,t} = (u_0^{(1)})^{p-1} \otimes u_{t+1} \oplus \frac{(u_0^{(1)})^{p-1} \ominus u_0^{(1)}}{2} \oplus \xi(p, s, t), \quad (10)$$

где

$$\xi(p, s, t) = \begin{cases} (u_0^{(1)})^{p-1} \otimes (\bar{\Phi}^{(1)}(x)^2 \otimes u_0), & \text{если } p = 3, t = 0, s > 2; \\ \bar{\Phi}^{(1)}(x)^2 \otimes u_0, & \text{если } p = 3, t = 0, s = 2; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

d) при $s \in \{1, \dots, n-1\}$

$$(x^{\tau_{s-1}} - e)^k \otimes u_s^k = k! \left(u_0^{(1)}\right)^k; \quad (11)$$

e) при $s \in \{2, \dots, n-1\}$

$$(x^{\tau_{s-1}} - e)^{k-1} \otimes u_s^k = k! \left(u_0^{(1)}\right)^{k-1} u_s \oplus \frac{k-1}{2} k! \left(u_0^{(1)}\right)^k. \quad (12)$$

Лемма 2 ([3]). Для координатных последовательностей ЛРП максимального периода справедливо следующее соотношение:

$$u_s \left(i + \frac{\tau_s}{2}\right) = \begin{cases} -u_s(i), & \text{если } u(i) \equiv 0 \pmod{p^s}, \\ -e - u_s(i), & \text{если } u(i) \not\equiv 0 \pmod{p^s}, \end{cases} \quad (13)$$

где $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $s \in \{1, \dots, n-1\}$.

2. Период усложненной рекурренты

Теорема 3. Пусть $F(x)$ — многочлен максимального периода степени m , $m \geq 2$, над примарным кольцом $R = \mathbb{Z}_{p^n}$, $p \geq 3$, $n \geq 2$, u — ЛРП МП из $L_R(F)$, v — последовательность, полученная усложнением последовательности u , такая, что $v(i) = \psi(u_{n-1}(i))$, $i \geq 0$, где ψ — отличная от константы функция. Тогда период $T(v)$ последовательности v удовлетворяет неравенству $T(v) \geq \frac{1}{2}T(u_{n-1})$, и для выполнения равенства $T(v) = \frac{1}{2}T(u_{n-1})$ необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

- (a) многочлен $F(x)$ не является сильнопримитивным;
- (b) $\psi(x \ominus e) = \psi(-x)$;
- (c) в ЛРП u отсутствуют элементы вида $p^{n-1}\varepsilon$, $\varepsilon \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Доказательство. Пусть $t = T(v)$ — период последовательности $v = \psi(u_{n-1})$. При этом очевидно, что $t | \tau_{n-1}$. Будем считать далее, что функция $\psi(x)$ имеет вид

$$\psi(x_{n-1}) = \sum_{j=0}^k c_j x_{n-1}^j, \quad 0 < k < p, \quad c_k \neq 0.$$

Тогда с учетом леммы 2 имеем

$$(x^{\tau_{n-2}} \ominus e)^k \otimes \psi(u_{n-1}) = c_k k! \left(u_0^{(1)}\right)^k. \quad (14)$$

Так как период последовательности $(x^{\tau_{n-2}} \ominus e)^k \otimes \psi(u_{n-1})$ делит t , а период последовательности $\left(u_0^{(1)}\right)^k$ делится на $\frac{p^m-1}{p-1}$, то

$$\frac{p^m-1}{p-1} \mid t.$$

С другой стороны, из (14) следует, что $p^{n-1} \mid t$. Таким образом, получаем, что период t последовательности v представляется в виде

$$t = \frac{p^m-1}{p-1} p^{n-1} l, \text{ где } l \mid p-1.$$

Рассмотрим, при каких условиях может выполняться неравенство $l < p-1$. Из п. d) и e) леммы 1 вытекает равенство

$$\begin{aligned} (x^{\tau_{n-2}} \ominus e)^{k-1} \otimes \psi(u_{n-1}) &= c_k k! \left(u_0^{(1)}\right)^{k-1} u_{n-1} \oplus \\ &\oplus c_k \frac{k-1}{2} k! \left(u_0^{(1)}\right)^k \oplus c_{k-1} (k-1)! \left(u_0^{(1)}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что период последовательности $(x^{\tau_{n-2}} \ominus e)^{k-1} \otimes \psi(u_{n-1})$ делит t , для $i \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} c_k k! \left(u_0^{(1)}(i+t)\right)^{k-1} u_{n-1}(i+t) &\oplus c_k \frac{k-1}{2} k! \left(u_0^{(1)}(i+t)\right)^k \oplus \\ \oplus c_{k-1} (k-1)! \left(u_0^{(1)}(i+t)\right)^{k-1} &= c_k k! \left(u_0^{(1)}(i)\right)^{k-1} u_{n-1}(i) \oplus \\ \oplus c_k \frac{k-1}{2} k! \left(u_0^{(1)}(i)\right)^k &\oplus c_{k-1} (k-1)! \left(u_0^{(1)}(i)\right)^{k-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу свойств мультипликаторов ЛРП МП над конечными полями [18] существует примитивный элемент $\alpha \in GF(p)$ такой, что

$$u_0^{(1)} \left(i + \frac{p^m-1}{p-1} p^{n-1} l \right) = \alpha^l u_0^{(1)}(i), \quad i \geq 0. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получаем

$$\begin{aligned} c_k k! \left(u_0^{(1)}(i)\right)^{k-1} (u_{n-1}(i+t) \alpha^{(k-1)l} \ominus u_{n-1}(i)) &= \\ = c_k \frac{k-1}{2} k! \left(u_0^{(1)}(i)\right)^k (e \ominus \alpha^{kl}) &\oplus c_{k-1} (k-1)! \left(u_0^{(1)}(i)\right)^{k-1} (e \ominus \alpha^{(k-1)l}). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (14) следует, что t делится на период последовательности $\left(u_0^{(1)}\right)^k$. С другой стороны, справедливо равенство

$$\left(u_0^{(1)}(i+t)\right)^k = \alpha^{kl} \left(u_0^{(1)}(i)\right)^k, \quad i \geq 0.$$

Следовательно, $\alpha^{kl} = e$, и соотношение (17) приобретает вид

$$\begin{aligned} c_k k! \left(u_0^{(1)}(i)\right)^{k-1} (u_{n-1}(i+t) \alpha^{-l} \ominus u_{n-1}(i)) = \\ = c_{k-1} (k-1)! \left(u_0^{(1)}(i)\right)^{k-1} (e \ominus \alpha^{-l}). \end{aligned} \quad (18)$$

Выберем i таким, что $u_0^{(1)}(i) \neq 0$, тогда

$$u_{n-1}(i+t) = \alpha^l \left(u_{n-1}(i) \oplus \frac{c_{k-1}}{c_k k} (e \ominus \alpha^{-l}) \right). \quad (19)$$

Из представления ЛРП МП над примарными кольцами вычетов через функцию след (см. [6, 11, 14]) и из (16) вытекает, что существует элемент $\tilde{\alpha} \in R$ со свойствами

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &\equiv \alpha \pmod{p}, \quad \tilde{\alpha}^{p-1} = e, \\ u\left(i + \frac{\tau_{n-1}}{p-1}\right) &= \tilde{\alpha} u(i), \quad i \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что для $i \geq 0$ имеют место равенства

$$u_{n-1}(i+t) \ominus \alpha^l u_{n-1}(i) = \eta(\tilde{\alpha}, u_0(i), \dots, u_{n-2}(i)),$$

где $\eta(\tilde{\alpha}, u_0(i), \dots, u_{n-2}(i))$ — функция, равная $(n-1)$ -му разряду p -ичного разложения элемента $\tilde{\alpha}^l \sum_{j=0}^{n-2} u_j(i) p^j$. Согласно (19), во всех тактах i , когда $u_0^{(1)}(i) \neq 0$, должно выполняться равенство

$$\eta(\tilde{\alpha}, u_0(i), \dots, u_{n-2}(i)) = \alpha^l \frac{c_{k-1}}{c_k k} (e \ominus \alpha^{-l}). \quad (20)$$

Если многочлен $F(x)$ сильнопримитивный, то в тех тактах, когда $u_0^{(1)}(i) \neq 0$, на цикле ЛРП МП u встречаются все элементы кольца R (см. теорему 1). В частности, для некоторых j_0 и j_1 будут выполнены условия

$$\begin{aligned} u_0^{(1)}(j_0) &\neq 0, \quad u_0^{(1)}(j_1) \neq 0, \\ u(j_0) &\equiv 0 \pmod{p^{n-1}}, \\ u(j_1) &\equiv \beta \pmod{p^{n-1}}, \end{aligned}$$

где β — наименьшее число из $1, 2, \dots, p^{n-1} - 1$ со свойством $\eta(\bar{\alpha}, u_0(i), \dots, u_{n-2}(i)) \neq 0$. Такое β существует, так как $\bar{\alpha}^l \neq e$. Для этих j_0 и j_1

$$\begin{aligned}\eta(\bar{\alpha}, u_0(j_0), \dots, u_{n-2}(j_0)) &= 0, \\ \eta(\bar{\alpha}, u_0(j_1), \dots, u_{n-2}(j_1)) &\neq 0.\end{aligned}$$

В результате мы пришли к противоречию с (19). Следовательно, если $F(x)$ является сильнопримитивным, то период последовательности v равен периоду ЛРП u_{n-1} .

Если многочлен $F(x)$ не является сильнопримитивным, то в тех тактах, когда $u_0^{(1)}(i) \neq 0$, на цикле ЛРП МП u встречаются все обратимые элементы кольца R (теорема 1). Из (20) следует, что

$$\eta(\bar{\alpha}, e, 0, \dots, 0) = \eta(\bar{\alpha}, 2e, 0, \dots, 0).$$

С другой стороны, по определению функции $\eta(\bar{\alpha}, \beta_0, \dots, \beta_{n-2})$ получаем

$$\eta(\bar{\alpha}, 2e, 0, \dots, 0) = 2\eta(\bar{\alpha}, e, 0, \dots, 0) \oplus \Delta_{n-1}(\bar{\alpha}^l, \bar{\alpha}^l),$$

где $\Delta_{n-1}(x, y)$ — функция переноса в $(n-1)$ -й разряд от сложения чисел x и y в p -ичной системе счисления. Поэтому $\eta(\bar{\alpha}, e, 0, \dots, 0) \in \{0, p-1\}$. Если $\eta(\bar{\alpha}, e, 0, \dots, 0) = 0$, то находим наименьшее β со свойством $\eta(\bar{\alpha}, \beta_0, \dots, \beta_{n-2}) \neq 0$. Очевидно, что $\eta(\bar{\alpha}, \beta_0, \dots, \beta_{n-2}) = e$. Тогда $\eta(\bar{\alpha}, \beta_0 + e, \dots, \beta_{n-2}) \in \{1, 2\}$, и в силу условия $p \geq 3$ значение $\eta(\bar{\alpha}, \beta_0 + e, \dots, \beta_{n-2})$ отлично от нуля. При этом хотя бы один из элементов β или $\beta + e$ обратим в R , поэтому существует номер i , когда $u_0^{(1)}(i) \neq 0$ и $u(i)$ является обратимым элементом. Получаем противоречие с (20) и, следовательно, $\eta(\bar{\alpha}, e, 0, \dots, 0) = p-1$.

Пусть элементы x и $x + e$ обратимы в кольце R , тогда

$$\begin{aligned}\eta(\bar{\alpha}, x_0 + e, x_1, \dots, x_{n-2}) &= \Delta_{n-1}(\bar{\alpha}^l x, \bar{\alpha}^l) \oplus \\ &\oplus \eta(\bar{\alpha}, e, 0, \dots, 0) \oplus \eta(\bar{\alpha}, x_0, x_1, \dots, x_{n-2}).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_{n-1}(\bar{\alpha}^l x, \bar{\alpha}^l) = e \tag{21}$$

для любого такого $x \in R$, что x и $x + e$ обратимы в кольце R .

Пусть $\bar{\alpha}^l \neq -e$, тогда $\Delta_{n-1}(\bar{\alpha}^l, e) = 0$, и, поскольку $\bar{\alpha}^{-l}$ — корень уравнения $x^p = x$, элементы $\bar{\alpha}^{-l}$ и $\bar{\alpha}^{-l} + e$ обратимы в R . Приходим к противоречию с (21).

Таким образом, неравенство $t < p^{n-1}(p^m - 1)$ возможно только в случае

$$\tilde{\alpha}^l \equiv -e \pmod{p^{n-1}}, \quad \eta(\tilde{\alpha}, e, 0, \dots, 0) = p - 1,$$

т. е. в случае $\tilde{\alpha}^l = p^n - 1$. При этом для любого обратимого элемента кольца R имеет место соотношение

$$\Delta_{n-1}(p^n - 1, x) = e.$$

В силу свойств элемента $\tilde{\alpha}$ равенство $\tilde{\alpha}^l = p^n - 1$ эквивалентно условию $l = \frac{p-1}{2}$. Откуда следует, что период последовательности v равен $t = \frac{\tau_{n-1}}{2}$.

Если $F(x)$ не является сильнопримитивным и $u_0^{(1)}(i) \neq 0$, то $u(i) \not\equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$, тогда, используя лемму 2, получаем

$$u_{n-1}\left(i + \frac{\tau_{n-1}}{2}\right) = -u_{n-1}(i) \ominus e, \quad i \geq 0.$$

Так как $t = \frac{\tau_{n-1}}{2}$ — период последовательности $v = \psi(x)$, то

$$\psi\left(u_{n-1}\left(i + \frac{\tau_{n-1}}{2}\right)\right) = \psi(-u_{n-1}(i) \ominus e) = \psi(u_{n-1}(i)). \quad (22)$$

В тактах с $u_0^{(1)} \neq 0$ в ЛРП u_{n-1} встречаются все элементы поля $GF(p)$ (см. теорему 1), поэтому (22) эквивалентно равенству

$$\psi(x \ominus e) = \psi(-x). \quad (23)$$

Предположим, что в ЛРП u есть элементы вида $p^{n-1}\epsilon$, $\epsilon \not\equiv 0 \pmod{p}$, т. е. для некоторого i выполняется равенство $u(i) = p^{n-1}\epsilon$. Тогда в силу леммы 2 имеем

$$u_{n-1}\left(i + \frac{\tau_{n-1}}{2}\right) = -u_{n-1}(i), \quad i \geq 0,$$

и, учитывая, что $t = \frac{\tau_{n-1}}{2}$ — период последовательности v , получаем $\psi(\epsilon) = \psi(-\epsilon)$. При этом в силу свойств элемента $\tilde{\alpha}$ справедливо равенство

$$u_{n-1}\left(i + j\frac{\tau_{n-1}}{p-1}\right) = \tilde{\alpha}^j p^{n-1}\epsilon, \quad j = 1, \dots, p-1,$$

и из примитивности элемента α в поле $GF(p)$ вытекает, что в ЛРП u_{n-1} встречаются все элементы вида $p^{n-1}\epsilon$, $\epsilon \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Следовательно, равенство $\psi(x) = \psi(-x)$ выполняется для всех ненулевых элементов из $GF(p)$. Отсюда с учетом (23) следует, что

$$\psi(x) = \text{const},$$

а это противоречит условию теоремы.

Таким образом, сокращение периода ЛРП u_{n-1} при применении функции усложнения $\psi(x)$ возможно только при одновременном выполнении условий:

$$\deg \overline{\Phi_1}(x) = 0,$$

$$\psi(x \ominus e) = \psi(-x),$$

в ЛРП u отсутствуют элементы вида $p^{n-1}\varepsilon, \varepsilon \not\equiv 0 \pmod{p}$.

При этом сокращение периода по сравнению с периодом ЛРП u_{n-1} будет не более чем в 2 раза.

Следствие 1. Если в условиях теоремы 3 многочлен $F(x)$ является сильнопримитивным, то при любой отличной от константы функции усложнения период $T(v)$ последовательности v равен $p^{n-1}(p^m - 1)$.

Следствие 2. Если в условиях теоремы 3 функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию $\psi(x \ominus e) \neq \psi(-x)$, то период $T(v)$ последовательности v равен $p^{n-1}(p^m - 1)$.

Следствие 3. Если в условиях теоремы 3 степень многочлена $F(x)$ удовлетворяет неравенству $m \geq 4n - 2$, то при любой отличной от константы функции усложнения и любом многочлене $F(x)$ период $T(v)$ последовательности v равен $p^{n-1}(p^m - 1)$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что при $m \geq 4n - 2$ в ЛРП МП $u \in L_R(F)$ встречаются все ненулевые элементы кольца R , далее, пользуясь теоремой 3, получаем требуемое утверждение.

Список литературы

1. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1979.
2. Камловский О. В., Кузьмин А. С. Оценки частот появления элементов в линейных рекуррентных последовательностях над кольцами Галуа. — Фундам. и прикл. матем., 2000, т. 6, вып. 4, с. 1083–1094.
3. Кузьмин А. С., Маршалко Г. Б., Нечаев А. А. Восстановление линейной рекурренты над примарным кольцом вычетов по ее усложнению. — Математические вопросы криптографии, 2010, т. 1, вып. 2, с. 31–56.
4. Кузьмин А. С., Нечаев А. А. Построение помехоустойчивых кодов с использованием линейных рекуррент над кольцами Галуа. — Успехи матем. наук, 1992, т. 47, вып. 5, с. 183–184.
5. Kuzmin A. S., Nechaev A. A. Linear recurrent sequences over Galois rings. — In: Proc. 2nd Int. Conf. Algebra, Barnaul, 1991.

6. Нечаев А. А. Код Кердока в циклической форме. — Дискрет. матем., 1989, т. 1, № 4, с. 123–139.
7. Кузьмин А. С., Нечаев А. А. Линейные рекуррентные последовательности над кольцами Галуа. — Алгебра и логика, 1995, т. 3, № 2, с. 169–189.
8. Кузьмин А. С., Куракин В. Л., Нечаев А. А. Псевдослучайные и полилинейные последовательности. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 1. — М.: ТВП, 1997, с. 139–202.
9. Кузьмин А. С., Куракин В. Л., Нечаев А. А. Свойства линейных и полилинейных рекуррент над кольцами Галуа. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 2. — М.: ТВП, 1997, с. 191–222.
10. Кузьмин А. С., Куракин В. Л., Нечаев А. А. Свойства линейных и полилинейных рекуррент над кольцами Галуа (II). — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2000, т. 7, вып. 1, с. 5–59.
11. Кузьмин А. С., Куракин В. Л., Нечаев А. А. Структурные аналитические и статистические свойства линейных и полилинейных рекуррент. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 3. — М.: ТВП, 2000, с. 155–194.
12. Кузьмин А. С., Куракин В. Л., Нечаев А. А. Вполне равномерные линейные рекурренты. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 5. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, с. 103–158.
13. Нечаев А. А. Линейные рекуррентные последовательности над коммутативными кольцами. — Дискрет. матем., 1991, т. 3, № 4, с. 107–121.
14. Kurakin V. L., Kuzmin A. S., Mikhalev A. V., Nechaev A. A. Linear recurring sequences over rings and modules. — J. Math. Sci., 1995, v. 76, № 6, p. 2793–2915.
15. Кузьмин А. С., Нечаев А. А. Линейные рекуррентные последовательности над кольцами Галуа. — Успехи матем. наук, 1993, т. 48, вып. 1, с. 167–168.
16. Кузьмин А. С. Нижние оценки рангов координатных последовательностей линейных рекуррентных последовательностей над примарными кольцами вычетов. — Успехи матем. наук, 1993, т. 48, вып. 3, с. 193–194.
17. Кузьмин А. С. Распределение элементов на циклах линейных рекуррент над кольцами вычетов — Успехи матем. наук, 1992, т. 47, вып. 6, с. 213–214.
18. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля, тт. 1, 2. — М.: Мир., 1988, 824 с.
19. Laxton R. R., Anderson J. A. Linear recurrences and maximal length sequences. — Math. Gazette, 1972, v. 56, p. 299–309.
20. Min-Qiang Huang, Zong-Duo Dai. Projective maps of linear recurring sequences with maximal p -adic periods. — Fibonacci Quart., 1992, v. 30, № 2, p. 139–143.

21. *Min-Qiang Huang*. Analysis and cryptologic evaluation for primitive sequences over an integer residue ring. — Ph.D. diss., Graduate School of USTC, Acad. Sinica, Beijing, China, 1988.
22. *Xuan-Yong Zhu, Weng-Feng Qi*. Uniqueness of the distribution of zeros of primitive level sequences over Z_{p^n} . — *Finite Fields Appl.*, 2005, v. 11(1), p. 30–44.
23. *Xuan-Yong Zhu, Weng-Feng Qi*. Compression mappings on primitive sequences over Z_{p^n} . — *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2004, v. 50, № 10, p. 2442–2448.
24. *Xuan-Yong Zhu, Wen-Feng Qi*. Further result of compressing maps on primitive sequences modulo odd prime powers. — *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2007, v. 53, № 8, p. 2985–2990.
25. *Tian Tian, Wen-Feng Qi*. Injectivity of compressing maps on primitive sequences over $\mathbb{Z}/(p^e)$. — *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2007, v. 53, № 8, p. 2960–2966.
26. *Zong-Duo Dai*. Binary sequences derived from ML-sequences over rings. I: periods and minimal polynomials. — *J. Cryptology*, 1992, v. 5, № 4, p. 193–207.
27. *Weng-Feng Qi, Xuan-Yong Zhu*. Compressing maps on primitive sequences over Z_{2^n} and its Galois extension. — *Finite Fields Appl.*, 2002, v. 8, № 4, p. 570–588.
28. *Weng-Feng Qi*. Compressing maps on primitive sequences over Z_{2^n} and analysis of their derivate sequences. — Ph. D. diss., Zhengzhou Inform. Eng. Univ., 1997, Zhengzhou, China.
29. *Weng-Feng Qi, Jun-Hui Yang, Jin-Jun Zhou*. ML-sequences over rings Z_{2^n} . — *ASIACRYPT'98, Lect. Notes Comput. Sci.*, 1998, v. 1514, p. 315–325.