Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Сачков, Случайные отображения с неподвижными элементами, *Матем. вопр. криптогр.*, 2011, том 2, выпуск 2, 95–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk33>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:51:47

Случайные отображения с неподвижными элементами

В. Н. Сачков

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 22.IV.2010

Рассматриваются ориентированные графы случайных отображений n -элементного множества в себя, выбираемых случайно и равновероятно из множества всех отображений, имеющих неподвижную точку. Найдены точные и предельные (при $n \rightarrow \infty$) распределения числа вершин в дереве или лесе, которые содержат заданную вершину, и высоты заданной вершины при условии, что она принадлежит лесу. Найдены также точные и предельные распределения высоты заданной вершины в случайном корневом дереве или лесе с n вершинами.

Ключевые слова: случайные отображения с неподвижными элементами, орграфы, корневые деревья, леса, высота заданной вершины, предельные распределения

Random mappings with fixed elements

V. N. Sachkov

Academy of Cryptography of Russian Federation, Moscow

Abstract. We consider orgraphs of random mappings of n -element set having uniform distribution on the set of all mappings with fixed points. Formulas for exact and limit distributions of the number of vertices in a tree or in a forest containing a given vertex are derived along with analogous results for the height of a given vertex conditioned to belong to a forest. Exact and limit distributions of the height of a given vertex in a random rooted tree or forest with n vertices are derived also.

Key words: random mappings with fixed elements, orgraphs, rooted trees, forests, height of a vertex, limit distributions

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2011, vol. 2, no. 2, pp. 95–118 (Russian).

Введение

Пусть X — n -множество и σ_n — совокупность всех отображений $\sigma: X \rightarrow X$. Будем рассматривать множество отображений $F_n = \{\sigma \in \sigma_n: \text{существует } x \in X, \sigma(x) = x\}$. Отображения $\sigma \in F_n$ будем называть отображениями с неподвижными элементами. Множество отображений $\sigma_n \setminus F_n$, не содержащих неподвижных точек, обозначим через G_n . Орграф, соответствующий отображению $\sigma \in \sigma_n$, будем обозначать через $\Gamma(\sigma)$. Отображению $\sigma \in F_n$, имеющему единственный циклический элемент (совпадающий с единственным неподвижным элементом), соответствует орграф $\Gamma(\sigma)$, являющийся корневым деревом, дуги которого ориентированы к корню — неподвижному элементу σ . Такое дерево будем называть *изолированным корневым деревом*. Любому отображению $\sigma \in F_n$ соответствует орграф $\Gamma(\sigma)$, компоненты связности которого являются либо изолированными корневыми деревьями, образующими корневой лес, либо не содержат неподвижных элементов и отвечают связным отображениям из совокупности G_m , $2 \leq m < n$.

Отметим, что отображения из совокупности F_n можно рассматривать с использованием понятия А-отображения, определенного в статье [2] и исследованного в монографиях [3] и [4] с использованием производящих и характеристических функций. В настоящей работе рассматривается другой подход, основанный на использовании классических комбинаторных тождеств. Оказывается, что для изучения некоторых характеристик отображений $\sigma \in F_n$, представляющих интерес для криптографических исследований, применение таких тождеств является более эффективным, чем использование производящих функций.

Кратко изложим содержание работы.

В § 1 приводится совокупность тождеств, являющихся обобщениями биномиального тождества Абеля [7]. К их числу относятся тождества Коши, Риордана и их модификации. Эти тождества неоднократно используются в дальнейшем изложении, что послужило причиной для выделения их в отдельный параграф. Доказательства основных тождеств можно найти в книге [5]. Производные от них тождества, используемые в работе, доказываются в ее тексте.

В § 2 при задании равномерных распределений на множествах σ_n и F_n рассматриваются случайные величины $\eta(\sigma_n)$ и $\eta(F_n)$, равные числу вершин в корневых лесах из изолированных деревьев в орграфах случайных отображений $\sigma \in \sigma_n$ и $\sigma \in F_n$ соответственно. Для этих случайных вели-

чин найдены точные и предельные распределения при $n \rightarrow \infty$, а также точные и асимптотические формулы для средних значений. Для множества $\sigma_n^{(1)}$ таких отображений $\sigma \in \sigma_n$, орграфы которых содержат единственное изолированное дерево, аналогичные результаты получены для случайной величины $\xi^{(1)}$, равной числу вершин в дереве при случайном выборе отображения $\sigma \in \sigma_n^{(1)}$. Для случайного отображения $\sigma \in \sigma_n$ точное распределение числа вершин изолированного дерева в орграфе $\Gamma(\sigma)$ при условии, что $\Gamma(\sigma)$ имеет такое дерево, отличается от точного распределения $\xi^{(1)}$, однако их предельные распределения и асимптотики для средних при $n \rightarrow \infty$ совпадают.

Для случайных величин $\zeta(\sigma_n)$ и $\zeta(F_n)$, равных числу изолированных деревьев в орграфе $\Gamma(\sigma)$ при случайном выборе $\sigma \in \sigma_n$ и $\sigma \in F_n$ соответственно найдены предельные распределения и асимптотики для средних значений при $n \rightarrow \infty$.

В § 3 для случайного отображения $\sigma \in F_n$ найдена формула для вероятности того, что заданная вершина принадлежит лесу из корневых изолированных деревьев, являющихся компонентами $\Gamma(\sigma)$. Для этой вероятности приводится асимптотика при $n \rightarrow \infty$.

Для случайного отображения $\sigma \in F_n$ найдены точное и предельное распределения случайной величины $\tilde{\eta}_n^{(1)}$, равной числу вершин леса, содержащего заданную вершину. Установлено, что случайная величина $\tilde{\eta}_n^{(1)}/n$ при $n \rightarrow \infty$ имеет предельное распределение, известное как закон арксинуса [6]. Получены точная и асимптотическая формулы для среднего значения $\tilde{\eta}_n^{(1)}$. Аналогичные результаты получены для случайной величины $\tilde{\xi}_n$, равной числу вершин изолированного дерева, содержащего заданную вершину и принадлежащего орграфу $\Gamma(\sigma)$ при случайном выборе $\sigma \in F_n$.

Для случайной величины $\tilde{\xi}_n^{(1)}$, равной числу вершин изолированного дерева, содержащего заданную вершину и принадлежащего случайному корневному лесу с m вершинами, получены точное и предельное распределения, а также точная и асимптотическая формулы для среднего значения при $m \rightarrow \infty$.

В § 4 получены точное и предельное распределения для случайной величины $\chi_j^{(1)}$, равной высоте заданной вершины в случайном корневом дере-

ве с j вершинами. Для случайной величины $\chi_j^{(1)} / j$ предельным является распределение Релея. Найдены точная и асимптотическая формулы для среднего значения $\chi_j^{(1)}$ при $j \rightarrow \infty$.

Для случайного леса с m вершинами найдены точное и предельное распределения случайной величины $\chi_m^{(1)}$, равной высоте заданной вершины в дереве, принадлежащем лесу. Показано, что случайная величина $\chi_m^{(1)} / \sqrt{m}$ имеет при $m \rightarrow \infty$ распределение Релея. Получены точная и асимптотическая формулы для среднего значения случайной величины $\chi_m^{(1)}$ при $m \rightarrow \infty$.

Для случайного отображения $\sigma \in F_n$ получены точное и предельное распределения случайной величины $\tilde{\chi}_n$, равной высоте заданной вершины при условии, что она принадлежит лесу в орграфе $\Gamma(\sigma)$. Для случайной величины $\tilde{\chi}_n / \sqrt{n}$ предельным распределением является так называемое отраженное нормальное распределение [6].

Для среднего и дисперсии случайной величины $\tilde{\chi}_n$ найдены точные и асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$. Дисперсия для $\tilde{\chi}_n$ имеет порядок квадрата от среднего значения.

В заключение отметим, что метод с применением классических тождеств может быть использован для рассматриваемых случайных величин при отыскании дисперсий и моментов более высоких порядков.

§ 1. Основные формулы

Для изучения некоторых характеристик случайных отображений $\sigma \in \sigma_n$ и $\sigma \in F_n$ оказывается эффективным использование тождеств, являющихся обобщениями биномиальной формулы Абеля [7]. Эти тождества связаны с рассмотрением сумм вида

$$A_n(x, y, p, q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x+k)^{k+p} (y+n-k)^{n-k+q}. \quad (1.1)$$

Обобщенная формула Абеля имеет вид

$$A_n(x, y, -1, 0) = x^{-1} (x+y+n)^n, \quad x \neq 0. \quad (1.2)$$

Из равенства (1.1) следует соотношение

$$A_n(x, y, p, q) = x A_n(x, y, p-1, q) + n A_{n-1}(x+1, y, p, q), \quad (1.3)$$

из него вытекает тождество, которое обычно называют формулой Коши:

$$A_n(x, y, 0, 0) = \sum_{k=0}^n (n)_k (x + y + n)^{n-k}. \quad (1.4)$$

Повторное применение соотношения (1.3) приводит к равенству

$$A_n(x, y, p, q) = \sum_{k=0}^n (n)_k (x + k) A_{n-k}(x + k, y, p - 1, q), \quad (1.5)$$

из которого следует тождество Риордана

$$A_n(x, y, 1, 0) = \sum_{k=0}^n (n)_k \left[\binom{k+1}{2} + x(k+1) \right] (x + y + n)^{n-k}. \quad (1.6)$$

Из соотношения

$$A_n(x, y, p, q) = A_{n-1}(x, y + 1, p, q + 1) + A_{n-1}(x + 1, y, p + 1, q) \quad (1.7)$$

вытекает тождество

$$A_n(x, y, -1, -1) = (x^{-1} + y^{-1})(x + y + n)^{n-1}, \quad x \neq 0, y \neq 0. \quad (1.8)$$

Применение тождеств (1.2) и (1.8) позволяет находить простые выражения для точных распределений характеристик случайных отображений $\sigma \in \sigma_n$ и $\sigma \in F_n$.

Тождества (1.4) и (1.6) и производные от них с использованием асимптотической формулы [3], [4]

$$e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

дают возможность получать предельные распределения характеристик и асимптотики для средних значений.

§ 2. Число вершин изолированных деревьев в орграфах отображений

1⁰. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$, σ_n — совокупность всех отображений $\sigma: X \rightarrow X$,

$$F_n = \{\sigma \in \sigma_n : \text{существует } x \in X, \sigma(x) = x\}$$

— множество всех отображений с неподвижными элементами.

Отображению σ , которое содержит единственный циклический элемент (являющийся неподвижным элементом), соответствует ориентированное корневое дерево, корнем которого является неподвижный элемент. Компоненты связности орграфа $\Gamma(\sigma)$, $\sigma \in F_n$, являющиеся деревьями данного вида, будем называть изолированными корневыми деревьями.

Если $G_n = \{\sigma \in \sigma_n : \sigma(x) \neq x \text{ для каждого } x \in X\}$, то для любого $\sigma \in G_n$ орграф $\Gamma(\sigma)$ не содержит изолированных деревьев. Отображения из множества G_n изучались в статье [1]. Очевидно, что число отображений $\sigma \in G_n$ равно $(n-1)^n$. Поэтому число отображений $\sigma \in F_n$ дается равенством

$$|F_n| = n^n - (n-1)^n. \quad (2.1)$$

Структура любого отображения $\sigma \in F_n$ выглядит следующим образом. Для любого $\sigma \in F_n$ существует такое разбиение $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, что $X_1 \neq \emptyset$ и компоненты связности орграфа $\Gamma(\sigma)$ являются либо изолированными корневыми деревьями с вершинами, принадлежащими X_1 , либо являются орграфами с вершинами из X_2 , не содержащими неподвижных точек. При этом множество X_2 может быть пустым, и в этом случае орграф $\Gamma(\sigma)$ для $\sigma \in F_n$ является лесом, состоящим из корневых изолированных деревьев с общим числом вершин, равным n . В соответствии с известной формулой [4], число лесов с n вершинами равно

$$R_n = (n+1)^{n-1}. \quad (2.2)$$

С учетом структуры компонент орграфа $\Gamma(\sigma)$, $\sigma \in F_n$, для числа таких отображений, орграф которых имеет корневой лес из изолированных деревьев с общим числом вершин, равным m , имеем формулу

$$M_n(m) = \binom{n}{m} (m+1)^{m-1} (n-m-1)^{n-m}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Попутно отметим, что

$$M_n(0) = (n-1)^n, \quad (2.4)$$

так как $M_n(0) = |G_n|$.

На множествах σ_n и F_n зададим равномерные вероятностные распределения и рассмотрим случайные величины $\eta(\sigma_n)$ и $\eta(F_n)$, равные числу вершин в корневых лесах из изолированных деревьев в орграфах отображе-

ний $\sigma \in \sigma_n$ и $\sigma \in F_n$ соответственно. Распределения этих случайных величин имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta(\sigma_n) = m) &= \frac{1}{n^n} M_n(m), \quad m = 0, 1, \dots, n, \\ \mathbf{P}(\eta(F_n) = m) &= \frac{1}{n^n - (n-1)^n} M_n(m), \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При $m = o(n)$ и $n \rightarrow \infty$ для этих распределений имеем асимптотические представления

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta(\sigma_n) = m) &= \frac{(m+1)^{m-1}}{e^{m+1} m!} (1 + o(1)), \quad m = 0, 1, \dots, \\ \mathbf{P}(\eta(F_n) = m) &= \frac{1}{1 - e^{-1}} \frac{(m+1)^{m-1}}{e^{m+1} m!} (1 + o(1)), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Очевидно, что средние значения $\eta(\sigma_n)$ и $\eta(F_n)$ выражаются через одну и ту же величину

$$\tilde{M}_n = \sum_{m=1}^n m \binom{n}{m} (m+1)^{m-1} (n-m-1)^{n-m}, \quad (2.7)$$

а именно:

$$\mathbf{M}\eta(\sigma_n) = \frac{1}{n^n} \tilde{M}_n, \quad \mathbf{M}\eta(F_n) = \frac{1}{n^n - (n-1)^n} \tilde{M}_n. \quad (2.8)$$

Проводя замену переменной, получаем, что

$$\tilde{M}_n = n \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} (m+2)^m (n-1-m-1)^{n-1-m}.$$

Применение тождества Коши (1.4) приводит к равенствам

$$\tilde{M}_n = n A_{n-1}(2, -1, 0, 0) = n \sum_{m=0}^{n-1} (n-1)_m n^{n-m-1},$$

из которых следует, что

$$\tilde{M}_n = n! \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n^m}{m!}. \quad (2.9)$$

Теперь из формул (2.8) и (2.9) при $n \rightarrow \infty$, применяя формулу Стирлинга, получаем асимптотические представления

$$\mathbf{M}\eta(\sigma_n) = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}(1+o(1)), \quad \mathbf{M}\eta(F_n) = \frac{1}{1-e^{-1}} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}(1+o(1)). \quad (2.10)$$

2⁰. Пусть $\sigma_n^{(1)}$ — совокупность всех отображений $\sigma \in \sigma_n$, орграфы которых содержат единственное изолированное дерево. Число рассматриваемых отображений в $\sigma_n^{(1)}$ равно числу отображений $\sigma \in \sigma_n$, имеющих одну неподвижную точку и, следовательно, имеем

$$|\sigma_n^{(1)}| = n(n-1)^{n-1}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим случайную величину $\xi^{(1)}$, равную числу вершин изолированного дерева в орграфе $\Gamma(\sigma)$ случайно выбранного отображения $\sigma \in \sigma_n^{(1)}$. Распределение $\xi^{(1)}$ имеет вид

$$\mathbf{P}(\xi^{(1)} = j) = \frac{1}{n(n-1)^{n-1}} \binom{n}{j} j^{j-1} (n-j-1)^{n-j}, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (2.12)$$

При $j = o(n)$ и $n \rightarrow \infty$ отсюда получаем, что

$$\mathbf{P}(\xi^{(1)} = j) = \frac{j^{j-1}}{e^j j!} (1+o(1)), \quad j=1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Для среднего значения случайной величины $\xi^{(1)}$ из равенства (2.12) следует формула

$$\mathbf{M}\xi^{(1)} = \frac{1}{n(n-1)^{n-1}} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} j^j (n-j-1)^{n-j}, \quad (2.14)$$

из которой следует, что

$$\mathbf{M}\xi^{(1)} = \frac{1}{(n-1)^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (j+1)^j (n-1-j-1)^{n-j-1}.$$

Применяя формулу Коши (1.4), получаем

$$\mathbf{M}\xi^{(1)} = \frac{1}{(n-1)^{n-1}} A_{n-1}(1, -1, 0, 0) = \frac{1}{(n-1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)_k (n-1)^{n-k-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{M}\xi^{(1)} = \frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)^m}{m!}.$$

Используя формулу (1.9) и формулу Стирлинга при $n \rightarrow \infty$, получаем асимптотику

$$M\xi^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}(1 + o(1)). \quad (2.15)$$

3⁰. Известно [4], что если $\zeta_n^{(1)}$ — число деревьев в случайном корневом лесе с m помеченными вершинами, то

$$P(\zeta_m^{(1)} = k) = \binom{m-1}{k-1} \frac{m^{m-k}}{(m+1)^{m-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (2.16)$$

и при $m \rightarrow \infty$ случайная величина $\zeta_m^{(1)} - 1$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1$, т. е.

$$P(\zeta_m^{(1)} - 1 = r) \rightarrow \frac{e^{-1}}{r!}, \quad r = 0, 1, \dots \quad (2.17)$$

Сравним теперь с этими результатами асимптотические распределения случайных величин $\zeta(\sigma_n)$ и $\zeta(F_n)$, равных числам изолированных корневых деревьев в орграфе $\Gamma(\sigma)$ для случайно выбранных отображений $\sigma \in \sigma_n$ и $\sigma \in F_n$ соответственно.

Случайные величины $\zeta(\sigma_n)$ и $\zeta(F_n)$ имеют, соответственно, биномиальное распределение

$$P(\zeta(\sigma_n) = k) = \frac{1}{n^n} \binom{n}{k} (n-1)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (2.18)$$

и усеченное биномиальное распределение

$$P(\zeta(F_n) = k) = \frac{1}{n^n - (n-1)^n} \binom{n}{k} (n-1)^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.19)$$

Производящие функции этих распределений имеют, соответственно, вид

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n^n} (n+t-1)^n, \quad \tilde{\psi}_n(t) = \frac{(n+t-1)^n - (n-1)^n}{n^n - (n-1)^n}.$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$ для любого t имеем

$$\psi_n(t) \rightarrow e^{t-1}, \quad \tilde{\psi}_n(t) \rightarrow \frac{e^t - 1}{e - 1}.$$

Следовательно,

$$P(\zeta(\sigma_n) = k) \rightarrow \frac{1}{e} \frac{1}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$P(\zeta(F_n) = k) \rightarrow \frac{1}{e-1} \frac{1}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отметим, что при $n \rightarrow \infty$ асимптотические формулы для математических ожиданий $\zeta(\sigma_n)$ и $\zeta(F_n)$ имеют вид

$$\mathbf{M}\zeta(\sigma_n) \rightarrow 1,$$

$$\mathbf{M}\zeta(F_n) \rightarrow \frac{e}{e-1},$$

тогда как в соответствии с (2.17) при $m \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}\zeta_m^{(1)} \rightarrow 2.$$

§ 3. Леса и деревья с заданной вершиной в орграфах отображений

1⁰. Обозначим через V_n число преобразований $\sigma \in F_n$, для которых орграф $\Gamma(\sigma)$ имеет лес из корневых изолированных деревьев, содержащий заданную вершину $x \in X$. Число способов выбора таких лесов с m вершинами в силу (2.2) равно $\binom{n-1}{m-1} (m+1)^{m-1}$. Остальные компоненты связности $\Gamma(\sigma)$ соответствуют некоторому отображению из G_{n-m} , и число способов построения отвечающей ему части орграфа $\Gamma(\sigma)$ равно $(n-m-1)^{n-m}$. Следовательно,

$$V_n = \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} (m+1)^{m-1} (n-m-1)^{n-m} = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} (m+2)^m (n-m-2)^{n-m-1}. \quad (3.1)$$

Используя тождество Коши (1.4), получаем

$$V_n = A_{n-1}(2, -1, 0, 0) = (n-1)! \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n^m}{m!}. \quad (3.2)$$

При $n \rightarrow \infty$, применяя формулу (1.9), имеем

$$V_n = n^n \sqrt{\frac{\pi}{2n}} (1 + o(1)). \quad (3.3)$$

Для случайно равномерно выбранного отображения $\sigma \in F_n$ обозначим через P_n вероятность того, что лес из изолированных корневых деревьев в орграфе $\Gamma(\sigma)$ содержит заданную вершину $x \in X$. Эта вероятность совпадает с вероятностью того, что случайно выбранная вершина из множества X в орграфе $\Gamma(\sigma)$, $\sigma \in F_n$, окажется принадлежащей лесу.

Из определения вероятности P_n следует, что

$$P_n = \frac{V_n}{n^n - (n-1)^n}, \quad (3.4)$$

и, следовательно, из равенства (3.1) получаем формулу

$$P_n = \frac{1}{n^n - (n-1)^n} \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} (m+1)^{m-1} (n-m-1)^{n-m}.$$

При $n \rightarrow \infty$ из равенств (3.3) и (3.4) следует асимптотическая формула

$$P_n = \frac{e}{e-1} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} (1 + o(1)). \quad (3.5)$$

2.⁰. Рассмотрим подмножество отображений $F'_n \subseteq F_n$ такое, что лес орграфа $\Gamma(\sigma)$ при $\sigma \in F'_n$ содержит заданную вершину $x \in X$. Для случайного отображения $\sigma \in F'_n$ обозначим через $\tilde{\eta}_n^{(1)}$ случайную величину, равную числу вершин леса в $\Gamma(\sigma)$, содержащего вершину $x \in X$. Вероятностное распределение $\tilde{\eta}_n^{(1)}$ имеет вид

$$\mathbf{P}(\tilde{\eta}_n^{(1)} = m) = \frac{1}{V_n} \binom{n-1}{m-1} (m+1)^{m-1} (n-m-1)^{n-m}, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

где V_n определяется равенством (3.1).

Из формул (3.3) и (3.6) с использованием формулы Стирлинга получаем предельную теорему.

Теорема 1. *Предельные распределения $\tilde{\eta}_n^{(1)}$ имеют следующий вид:*

1) если $n \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}(\tilde{\eta}_n^{(1)} = m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(m+1)^{m-1}}{e^{m+1} (m-1)!} \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + o(1)), \quad m = 1, 2, \dots; \quad (3.7)$$

2) если $n, m, n-m \rightarrow \infty$, то

а) для любых $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ равномерно для всех $x = \frac{n}{m} \in [\delta_1, \delta_2]$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tilde{\eta}_n^{(1)}}{n} = x\right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \frac{1}{n} (1 + o(1)); \quad (3.8)$$

б) равномерно для всех $0 < \alpha < \beta < 1$

$$\mathbf{P}\left(\alpha \leq \frac{\tilde{\eta}_n^{(1)}}{n} \leq \beta\right) = \frac{1}{\pi} [\arcsin(2\beta-1) - \arcsin(2\alpha-1)] (1 + o(1)).$$

Пункт б) теоремы вытекает из пункта а) и равенства

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{\alpha^{-\frac{1}{2}}}^{\beta^{-\frac{1}{2}}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{4} - z^2}}.$$

Предельное распределение для $\frac{\tilde{\eta}_n^{(1)}}{n}$ в теореме 1 является известным законом арксинуса [6]. Из вида распределения (3.8) следует, что наиболее вероятными являются значения m — числа вершин леса, содержащего фиксированную вершину, когда с ростом n величина $x = m/n$ приближается либо к 0, либо к 1.

В соответствии с формулой (3.6) среднее значение случайной величины $\tilde{\eta}_n^{(1)}$ определяется равенством

$$\mathbf{M}\tilde{\eta}_n^{(1)} = M_n^{(1)} / V_n, \quad (3.9)$$

где V_n определяется равенством (3.2) и

$$M_n^{(1)} = \sum_{m=1}^n m \binom{n-1}{m-1} (m+1)^{m-1} (n-m-1)^{n-m}. \quad (3.10)$$

Представим $M_n^{(1)}$ в виде разности

$$M_n^{(1)} = A - B, \quad (3.11)$$

$$A = \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} (m+1)^m (n-m-1)^{n-m}, \quad B = \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} (m+1)^{m-1} (n-m-1)^{n-m}.$$

Преобразуем сумму A :

$$A = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} (m+2)^{m+1} (n-m-2)^{n-m-1} = A_{n-1}(2, -1, 1, 0). \quad (3.12)$$

Применяя тождество Риордана (1.6), получаем

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{k+1}{2} + 2(k+1) \right] (n-1)_k n^{n-k-1} = \frac{(n-1)!}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} (n-k)(n-k+3). \quad (3.13)$$

Аналогичными преобразованиями сумму B приводим к виду

$$B = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} (m+2)^m (n-m-2)^{n-m-1} = A_{n-1}(2, -1, 0, 0).$$

Применяя тождество Коши (1.4), имеем

$$B = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}. \quad (3.14)$$

Теперь из равенств (3.11), (3.13) и (3.14) получаем

$$M_n^{(1)} = \frac{(n-1)!}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} \left[(n^2 + 3n - 2) - 2(n+1)k + k(k-1) \right]. \quad (3.15)$$

Это равенство позволяет получить следующее представление для $M_n^{(1)}$:

$$M_n^{(1)} = \frac{(n-1)!}{2} (n^2 + 3n - 2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} - (n+1)n! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n^k}{k!} + \frac{nn!}{2} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{n^k}{k!}. \quad (3.16)$$

Отсюда следует, что

$$M_n^{(1)} = \left[\frac{n!}{2} - (n-1)! \right] \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} + \frac{3}{2} n^n. \quad (3.17)$$

Из равенств (3.2), (3.9) и (3.17) имеем

$$\mathbf{M} \tilde{\eta}_n^{(1)} = \frac{n}{2} - 1 + \frac{3}{2} \frac{n^n}{V_n}. \quad (3.18)$$

При $n \rightarrow \infty$, учитывая (3.3), получаем асимптотическую формулу для среднего значения случайной величины $\tilde{\eta}_n^{(1)}$:

$$\mathbf{M} \tilde{\eta}_n^{(1)} = \frac{n}{2} + 3 \sqrt{\frac{n}{2\pi}} (1 + o(1)). \quad (3.19)$$

3⁰. Пусть F'_n — множество отображений $\sigma \in F_n$, для которых заданная вершина $x \in X$ принадлежит корневому лесу орграфа $\Gamma(\sigma)$. Для случайного

отображения $\sigma \in F'_n$ обозначим через $\tilde{\xi}_n$ случайную величину, равную числу вершин изолированного корневого дерева, содержащего вершину $x \in X$.

Так как число способов построения корневого дерева, содержащего j вершин, включая вершину x , равно $\binom{n-1}{j-1} j^{j-1}$, а отображение множества остальных $n-j$ элементов на себя произвольно, то распределение $\tilde{\xi}_n$ имеет вид

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}_n = j) = \frac{1}{V_n} \binom{n-1}{j-1} j^{j-1} (n-j)^{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.20)$$

где V_n определяется формулой (3.1). Из формул (3.3) и (3.20) следует предельная теорема, аналогичная Теореме 1.

Теорема 2. *Предельные распределения $\tilde{\xi}_n$ имеют следующий вид:*

1) если $n \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}_n = j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{j^{j-1}}{e^j (j-1)!} \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots; \quad (3.21)$$

2) если $n, j, n-j \rightarrow \infty$, то

а) для любых $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ равномерно для всех $x = \frac{j}{n} \in [\delta_1, \delta_2]$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tilde{\xi}_n}{n} = x\right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \frac{1}{n} (1 + o(1)), \quad (3.22)$$

б) равномерно для всех $0 < \alpha, \beta < 1$

$$\mathbf{P}\left(\alpha \leq \frac{\tilde{\xi}_n}{n} \leq \beta\right) = \frac{1}{\pi} [\arcsin(2\beta - 1) - \arcsin(2\alpha - 1)] (1 + o(1)).$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Поэтому оно не приводится.

Из (3.20) следует, что среднее значение случайной величины $\tilde{\xi}_n$ имеет вид

$$\mathbf{M}\tilde{\xi}_n = \frac{W_n}{V_n}, \quad (3.23)$$

где

$$W_n = \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} j^j (n-j)^{n-j}.$$

Так как

$$W_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (j+1)^{j+1} (n-j-1)^{n-j-1} = A_{n-1}(1, 0, 1, 0),$$

то, применяя тождество Риордана (1.6), получаем

$$W_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)_k \left[\binom{k+1}{2} + k + 1 \right] n^{n-k-1} = \frac{(n-1)!}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^j}{j!} (n-j)(n-j+1). \quad (3.24)$$

Представим W_n в виде

$$W_n = Q - R + S, \quad (3.35)$$

где

$$Q_n = \frac{(n+1)!}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^j}{j!}, \quad R_n = n! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^j}{j!} j, \quad S_n = \frac{(n-1)!}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^j}{j!} j(j-1).$$

После проведения преобразований сумм Q, R и S с использованием равенства (3.25) получаем

$$W_n = \frac{n!}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n^j}{j!} + \frac{n^n}{2}. \quad (3.26)$$

Из равенств (3.2), (3.23) и (3.26) следует, что

$$\mathbf{M}\tilde{\xi}_n = \frac{n}{2} + \frac{n^n}{2(n-1)! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^j}{j!}}. \quad (3.27)$$

При $n \rightarrow \infty$ с учетом формулы (3.3) из равенства (3.27) получаем асимптотику

$$\mathbf{M}\tilde{\xi}_n = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{2\pi}}(1 + o(1)). \quad (3.28)$$

4⁰. Для случайно выбранного корневого леса с m вершинами обозначим через $\tilde{\xi}_m^{(1)}$ случайную величину, равную числу вершин дерева, содержащего заданную вершину. Число способов выбора дерева с j вершинами, содержащего заданную вершину, равно $\binom{m-1}{j-1} j^{j-1}$, поэтому распределение $\tilde{\xi}_m^{(1)}$ с учетом (2.2) имеет вид

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}_m^{(1)} = j) = \frac{1}{(m+1)^{m-1}} \binom{m-1}{j-1} j^{j-1} (m-j+1)^{m-j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.29)$$

Среднее значение случайной величины $\tilde{\xi}_m^{(1)}$ определяется формулой

$$\mathbf{M}\tilde{\xi}_m^{(1)} = \frac{1}{(m+1)^{m-1}} Q_m, \quad (3.30)$$

где

$$Q_m = \sum_{j=1}^m \binom{m-1}{j-1} j^j (m-j+1)^{m-j-1} = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} (j+1)^{j+1} (m-j)^{m-j-2}.$$

Представим Q_m в виде разности

$$Q_m = Q_m^{(1)} - Q_m^{(2)}, \quad (3.31)$$

где

$$Q_m^{(1)} = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} (j+1)^{j+1} (m-j)^{m-j-1},$$

$$Q_m^{(2)} = (m-1) \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} (j+1)^{j+1} (m-j)^{m-j-2}.$$

Отсюда следуют очевидные равенства

$$Q_m^{(1)} = A_{m-1}(1, 1, 1, 0), \quad Q_m^{(2)} = (m-1)A_{m-2}(1, 2, 1, 0).$$

Применяя тождества Риордана (1.6), получаем

$$Q_m^{(1)} = \sum_{k=0}^{m-1} (m-1)_k \left[\binom{k+1}{2} + (k+1) \right] (m+1)^{m-k-1},$$

$$Q_m^{(2)} = (m-1) \sum_{k=0}^{m-2} (m-2)_k \left[\binom{k+1}{2} + (k+1) \right] (m+1)^{m-k-2}.$$

После замены переменных суммирования имеем

$$Q_m^{(1)} = \frac{(m-1)!}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+1)^k}{k!} (m-k)(m-k+1), \quad (3.32)$$

$$Q_m^{(2)} = \frac{(m-1)!}{2} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(m+1)^k}{k!} (m-k)(m-k-1). \quad (3.33)$$

Теперь из равенств (3.31), (3.32) и (3.33) получаем

$$Q_m = (m+1)^{m-1} + (m-1)! \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(m+1)^k}{k!} (m-k).$$

Из этого равенства следует, что

$$Q_m = (m+1)^{m-1} + m(m-1)(m+1)^{m-2} - (m-1)! \sum_{k=0}^{m-3} \frac{(m+1)^k}{k!}.$$

Отсюда получаем представление Q_m , удобное для асимптотических оценок:

$$Q_m = (m+1)^m \left(1 + \frac{2}{m} \right) - (m-1)! \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(m+1)^k}{k!}. \quad (3.34)$$

При $m \rightarrow \infty$ из равенств (3.30), (3.34), формулы (1.9) и формулы Стирлинга следует соотношение

$$M\tilde{\xi}_m^{(1)} = m - \sqrt{\frac{\pi m}{2}} (1 + o(1)). \quad (3.35)$$

§ 4. Высота заданной вершины

¹₀. Пусть в корневом дереве все дуги ориентированы по направлению к корню. Тогда высота заданной вершины дерева определяется как число

дуг в ориентированном пути от этой вершины до корня. На множестве из j^{j-1} корневых деревьев с j вершинами зададим равномерное вероятностное распределение и рассмотрим случайную величину $\chi_j^{(1)}$, равную высоте заданной вершины в случайно выбранном дереве.

Покажем, что вероятностное распределение случайной величины $\chi_j^{(1)}$ имеет вид

$$\mathbf{P}(\chi_j^{(1)} = k) = \frac{(k+1)(j-1)_k}{j^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, j-1. \quad (4.1)$$

Действительно, имеется $(j-1)_k$ способов выбора вершин, входящих в путь длины k , включая корневую вершину. Для построения соответствующего дерева выбирается корневой лес, корнями которого являются выбранные $k+1$ вершин, остальные $j-k-1$ вершин являются некорневыми. Число способов выбора такого леса равно

$$W(j, k) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_{k+1} = j-k-1 \\ i_j \geq 0}} \frac{(j-k-1)!}{i_1! i_2! \dots i_{k+1}!} (i_1+1)^{i_1-1} \dots (i_{k+1}+1)^{i_{k+1}-1}.$$

После замены переменных суммирования отсюда получаем

$$W(j, k) = (j-k-1)! \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_{k+1} = j \\ i_s > 0}} \frac{i_1^{i_1-1} \dots i_{k+1}^{i_{k+1}-1}}{i_1! \dots i_{k+1}!}.$$

Используя известное тождество из книги [4]

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = j \\ i_s > 0}} \frac{i_1^{i_1-1} \dots i_k^{i_k-1}}{i_1! \dots i_k!} = \frac{(k+1)j^{j-k-2}}{(j-k-1)!},$$

находим, что

$$W(j, k) = (k+1)j^{j-k-2}.$$

Таким образом, число корневых деревьев с j вершинами, у которых заданная вершина имеет высоту k , равно

$$R(j, k) = (k+1)j^{j-k-2}(j-1)_k, \quad k = 0, \dots, j-1.$$

Теперь формула (4.1) следует из равенства

$$\mathbf{P}(\chi_j^{(1)} = k) = \frac{R(j, k)}{j^{j-1}}.$$

Из формулы (4.1) вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Если $j \rightarrow \infty$, то случайная величина $\chi_j^{(1)} / \sqrt{j}$ в качестве предельного имеет распределение Релея, а именно:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\chi_j^{(1)}}{\sqrt{j}} = x\right) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{j}} (1 + o(1)) \text{ равномерно по } x = \frac{k}{\sqrt{j}} = o(j^{1/6}), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{P}\left(\alpha \leq \frac{\chi_j^{(1)}}{\sqrt{j}} \leq \beta\right) = \left[e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - e^{-\frac{\beta^2}{2}}\right] (1 + o(1)) \text{ равномерно по } 0 < \alpha < \beta = o(j^{1/6}). \quad (4.3)$$

Формула (4.2) получается из (4.1) с помощью формулы Стирлинга, а формула (4.3) выводится из (4.2) интегрированием.

Среднее значение случайной величины $\chi_j^{(1)}$ определяется формулой

$$\mathbf{M}\chi_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{k(k+1)(j-1)_k}{j^{k+1}},$$

из которой следует, что

$$\mathbf{M}\chi_j^{(1)} = \frac{(j-1)!}{j^j} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{j^k}{k!} [j(j-1) - 2(j-1)k + k(k-1)].$$

Проводя преобразования, аналогичные использованным при выводе из равенства (3.15) соотношения (3.17), получаем

$$\mathbf{M}\chi_j^{(1)} = \frac{j!}{j^j} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{j^k}{k!}. \quad (4.4)$$

Отсюда при $j \rightarrow \infty$ имеем асимптотику

$$\mathbf{M}\chi_j^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi j}{2}} (1 + o(1)). \quad (4.5)$$

2⁰. Рассмотрим теперь случайную величину χ_m , равную высоте заданной вершины, принадлежащей случайному лесу из m вершин. Распределение χ_m имеет вид

$$\mathbf{P}(\chi_m = k) = \frac{k+1}{(m+1)^{m-1}} \sum_{j=k+1}^m \binom{m-1}{j-1} (m-j+1)^{m-j-1} (j-1)_k j^{j-k-2}, \quad k=0, \dots, m-1. \quad (4.6)$$

Действительно, вероятность того, что заданная вершина принадлежит корневому дереву с j вершинами в лесу, имеющем m вершин, равна

$$\frac{1}{(m+1)^{m-1}} \binom{m-1}{j-1} j^{j-1} (m-j+1)^{m-j-1}.$$

Умножив эту вероятность на вероятность того, что заданная вершина имеет высоту k в дереве с j вершинами, с учетом формулы (4.1), после суммирования полученных произведений придем к (4.6).

Из равенства (4.6) получаем следующее выражение для распределения χ_m :

$$\mathbf{P}(\chi_m = k) = \frac{(k+1)(m-1)_k}{(m+1)^{m-1}} E(m, k), \quad (4.7)$$

где

$$E(m, k) = \sum_{j=0}^{m-k-1} \binom{m-k-1}{j} (j+k+1)^{j-1} (m-j-k)^{m-j-k-2}.$$

К сумме $E(m, k)$ применим тождество (1.8), выведенное в § 1. В результате получаем

$$E(m, k) = A_{m-k-1}(k+1, 1, -1, -1) = \frac{(k+1)}{(k+1)} (m+1)^{m-k-2}. \quad (4.8)$$

Теперь из формул (4.7) и (4.8) вытекает окончательный вид распределения χ_m :

$$\mathbf{P}(\chi_m = k) = \frac{(k+2)(m-1)_k}{(m+1)^{k+1}}, \quad k=0, 1, \dots, m-1. \quad (4.9)$$

Действительно, из формулы (4.9) следует, что при $m \rightarrow \infty$ и $x = o(m^{1/6})$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\chi_m}{\sqrt{m}} = x\right) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{m}} (1 + o(1)). \quad (4.10)$$

Это означает, что случайная величина $\chi_m / \sqrt{m}$ в пределе имеет распределение Релея и что для этой случайной величины справедлива теорема, аналогичная теореме 3, если заменить в ней $\chi_j^{(1)} / \sqrt{j}$ на $\chi_m / \sqrt{m}$ и j на m .

Для среднего значения случайной величины χ_m в соответствии с равенством (4.9) имеем формулу

$$\mathbf{M}\chi_m = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k(k+2)(m-1)_k}{(m+1)^{k+1}}. \quad (4.11)$$

Эту формулу можно привести к виду

$$\mathbf{M}\chi_m = \frac{(m-1)!}{(m+1)^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+1)^k}{k!} (m^2 - 1 - (2m-1)k + k(k-1)).$$

Используя преобразования, аналогичные примененным к равенству (3.15), отсюда получаем

$$\mathbf{M}\chi_m = \frac{(m-1)!}{(m+1)^{m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+1)^k}{k!}. \quad (4.11)$$

При $m \rightarrow \infty$ из равенства (4.11) с использованием формулы (1.9) получаем асимптотику

$$\mathbf{M}\chi_m = \sqrt{\frac{\pi m}{2}} (1 + o(1)). \quad (4.12)$$

3⁰. Рассмотрим случайное отображение $\sigma \in F_n$, лес орграфа которого содержит заданную вершину. Обозначим через $\tilde{\chi}_n$ случайную величину, равную высоте заданной вершины. Распределение $\tilde{\chi}_n$ записывается в следующем виде:

$$\mathbf{P}(\tilde{\chi}_n = k) = \frac{k+2}{V_n} \sum_{m=k+1}^n \binom{n-1}{m-1} (n-m-1)^{n-m} (m-1)_k (m+1)^{m-k-2}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.13)$$

где V_n определяется формулой (3.2).

Действительно, вероятность того, что оргграф $\Gamma(\sigma)$ случайного отображения $\sigma \in F_n$ имеет лес с m вершинами, среди которых находится заданная вершина, равна

$$\frac{1}{V_n} \binom{n-1}{m-1} (m+1)^{m-1} (n-m-1)^{n-m}.$$

Согласно (4.9) вероятность того, что заданная вершина в лесе с m вершинами имеет высоту k , равна

$$\frac{(k+2)(m-1)_k}{(m+1)^{k+1}}, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Суммируя произведения этих вероятностей, приходим к формуле (4.13). Распределение вида (4.13) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{P}(\tilde{\chi}_n = k) = \frac{(k+2)(n-1)_k}{V_n} \mathcal{H}(n, k),$$

где

$$\mathcal{H}(n, k) = \sum_{m=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{m} (m+k+2)^{m-1} (n-k-m-2)^{n-k-m-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Применяя тождество Абеля (1.2), получаем

$$\mathcal{H}(n, k) = A_{n-k-1}(k+2, -1, -1, 0) = \frac{1}{k+2} n^{n-k-1}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\tilde{\chi}_n = k) = \frac{(n-1)_k n^{n-k-1}}{V_n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.14)$$

При $n \rightarrow \infty$ для всех $k = o(n^{2/3})$ из формул (4.14) и (3.3) имеем

$$\mathbf{P}(\tilde{\chi}_n = k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{2n}} \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + o(1)). \quad (4.15)$$

Из этой формулы вытекает предельная теорема.

Теорема 4. Пусть $u = \frac{k}{\sqrt{n}}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{\tilde{\chi}_n}{\sqrt{n}} = u\right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + o(1)) \text{ равномерно по } u = o(n^{1/6}), \\ \mathbf{P}\left(\frac{\tilde{\chi}_n}{\sqrt{n}} \leq \alpha\right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{x^2}{2}} dx (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Предельное вероятностное распределение в (4.16) обычно называется отраженным нормальным распределением [6]. Для среднего значения случайной величины $\tilde{\chi}_n$ имеем формулу

$$\mathbf{M}\tilde{\chi}_n = \frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n-1} k(n-1)_k n^{n-k-1},$$

из которой, используя формулу (3.2), находим, что

$$\mathbf{M}\tilde{\chi}_n = \frac{n^n}{V_n} - 1.$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ с учетом формулы (3.3) получаем

$$\mathbf{M}\tilde{\chi}_n = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} (1 + o(1)). \quad (4.17)$$

Для дисперсии случайной величины $\tilde{\chi}_n$ имеем следующее выражение:

$$\mathbf{D}\tilde{\chi}_n = \frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 (n-1)_k n^{n-k-1} - \left(\frac{n^n}{V_n} - 1 \right)^2. \quad (4.18)$$

После преобразования суммы в выражении (4.18) и использования формулы (3.2) получаем

$$\mathbf{D}\tilde{\chi}_n = n + 1 - \frac{2n^n}{V_n} - \left(\frac{n^n}{V_n} - 1 \right)^2.$$

Отсюда следует формула для дисперсии $\tilde{\chi}_n$

$$\mathbf{D}\tilde{\chi}_n = n - \left(\frac{n^n}{V_n} \right)^2, \quad (4.19)$$

где V_n определяется равенством (3.2).

При $n \rightarrow \infty$ из равенства (4.19) с учетом формулы (3.3) получаем асимптотику для дисперсии случайной величины $\tilde{\chi}_n$

$$\mathbf{D}\tilde{\chi}_n = n \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) (1 + o(1)). \quad (4.20)$$

Таким образом, дисперсия имеет порядок квадрата от среднего значения $\tilde{\chi}_n$.

Список литературы

1. *Harris B.* Probability distributions related to random mappings. — *Ann. Math. Statist.*, 1960. V. 31. № 4. P. 1045–1062.
2. *Сачков В. Н.* Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1972. Т. 17. Вып. 4. С. 679–694.
3. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977.
4. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978.
5. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967.
7. *Abel H.* *Oeuvres Completes.* — Christiania C. Groendahe, 1839.
8. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. — М.: Наука, 1984.