Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Асимптотические свойства числа инверсий в случайном лесе, *Матем. вопр. криптогр.*, 2020, том 11, выпуск 4, 7–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 02:41:47

Асимптотические свойства числа инверсий в случайном лесе

В. А. Ватутин

*Математический институт им В.А. Стеклова
Российской академии наук, Москва*

Получено 15.V.2020

Аннотация. Пусть $\mathcal{F}_{n,N} = \{F_{n,N}\}$ — множество всех лесов, каждый из которых образован N помеченными корневыми деревьями $T_1, T_2, \dots, T_N$, имеющими в совокупности $n + N$ вершин (считая корни), причем вершинам приписаны несовпадающие метки (числа от 1 до $n + N$). Обозначим $\lambda(u)$ метку, приписанную вершине u леса $F_{n,N}$. Будем говорить, что вершина u дерева T_i является предком вершины v того же дерева и писать $u \prec v$, если путь, ведущий по ребрам от корня дерева к вершине v , проходит через вершину u . Числом инверсий $\mathcal{I}(F_{n,N})$ в лесе $F_{n,N}$ называется число таких пар вершин u, v в этом лесе, что $u \prec v$ и $\lambda(u) > \lambda(v)$. При условии, что лес $F_{n,N}$ выбирается случайно и равновероятно из множества $\mathcal{F}_{n,N}$, найдено предельное распределение случайной величины $n^{-3/2}\mathcal{I}(F_{n,N})$ при $n \rightarrow \infty$ и $2Nn^{-1/2} \rightarrow l \in [0, \infty)$.

Ключевые слова: случайный лес, высота случайного леса, инверсия, предельная теорема

Asymptotic properties of the number of inversions in a random forest

V. A. Vatutin

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow

Abstract. Let $\mathcal{F}_{n,N} = \{F_{n,N}\}$ be the set of all forests each of which is generated by N labelled rooted trees $T_1, T_2, \dots, T_N$ having in total $n + N$ vertices (including the roots) with different labels (numbers from 1 to $n + N$). Denote by $\lambda(u)$ the label assigned to the vertex u of the forest $F_{n,N}$. We say that a vertex $u \in T_i$ is an ancestor of a vertex $v \in T_i$ and write $u \prec v$, if the path leading from the root of the tree to the vertex v passes the vertex u . The number of inversions of a forest $F_{n,N}$ is the number of pairs of vertices u, v in this forest such that $u \prec v$ and $\lambda(u) > \lambda(v)$. Assuming that $F_{n,N}$ is a forest selected randomly and equiprobably from

$\mathcal{F}_{n,N}$ we find the limiting distribution of the random variable $n^{-3/2}\downarrow(F_{n,N})$ as $n \rightarrow \infty$ and $2Nn^{-1/2} \rightarrow l \in [0, \infty)$.

Keywords: random forest, the height of a random forest, inversion, limit theorem

1. Введение

В настоящей работе изучаются некоторые характеристики лесов $F_{n,N}$, состоящих из N корневых деревьев, имеющих в совокупности $n+N$ некорневых и корневых вершин, занумерованных несовпадающими метками (числами от 1 до $n+N$). В дальнейшем корневые вершины будем для краткости называть корнями. Предполагаем, что ребра деревьев направлены от корней, и считаем, что два дерева изоморфны (неразличимы), если метки их корней совпадают и между множествами их вершин существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность и нумерацию вершин. Отметим, что множество $F_{n,1}$ является множеством помеченных корневых деревьев с n некорневыми вершинами.

Скажем, что леса $F_{n,N}$ и $F'_{n,N}$ изоморфны (неразличимы), если множества меток корней, входящих в них деревьев совпадают, причем деревья с одинаковыми метками корней изоморфны. Будем считать, что деревья $T_1, T_2, \dots, T_N$, входящие в лес $F_{n,N}$, упорядочены согласно следующему правилу: T_1 — это дерево, содержащее вершину с меткой 1, а T_k , $k \geq 2$, — это дерево, содержащее вершину с минимальной меткой, не использованной при нумерации вершин деревьев $T_1, \dots, T_{k-1}$.

Обозначим $\mathcal{F}_{n,N} = \{F_{n,N}\}$ множество всех неизоморфных помеченных лесов $F_{n,N}$.

Леса, принадлежащие множеству $\mathcal{F}_{n,N}$, естественным образом возникают при исследовании свойств случайных отображений (см. [1, 4, 7, 12]). Известно (см., например, [12, раздел 6.2.4]), что мощность $|\mathcal{F}_{n,N}|$ множества $\mathcal{F}_{n,N}$ вычисляется по формуле

$$|\mathcal{F}_{n,N}| = NC_{n+N}^N (n+N)^{n-1}. \quad (1)$$

Напомним некоторые факты и определения, характеризующие такие леса и входящие в них деревья. Пусть T — корневое дерево с ребрами, направленными от корня. В дальнейшем факт принадлежности вершины u дереву T будем записывать, допуская некоторую вольность

в обозначениях, в виде $u \in T$. Кратностью вершины дерева будем называть количество ребер, выходящих из нее и направленных от корня. Высотой $h(u)$ вершины $u \in T$ называется количество ребер, принадлежащих пути, ведущему от корня к вершине u . Корень (по определению) имеет нулевую высоту. Высотой дерева T называется величина

$$h(T) := \max_{u \in T} h(u).$$

Через $|T|$ обозначим число вершин в дереве T (включая корневую).

Будем говорить, что вершина $u \in T$ является предком вершины $v \in T$, а вершина v является потомком вершины u , и писать $u \prec v$, если путь, ведущий по ребрам от корня дерева к вершине v , проходит через вершину u . Соотношение $u \preceq v$ означает, что либо $u \prec v$, либо $u = v$.

Если вершина $u \in T$, то через $T(u)$ будем обозначать корневое дерево $T(u) \subset T$ с корнем u , вершинами, являющимися всеми потомками вершины u , и ребрами, соединяющими эти вершины.

Пусть $T_1, T_2, \dots, T_N$ – помеченные деревья, образующие лес $F_{n,N}$. Высота леса $F_{n,N}$ задается соотношением

$$h(F_{n,N}) := \max_{1 \leq i \leq N} h(T_i).$$

Обозначим $\lambda(u)$ метку, приписанную вершине $u \in F_{n,N}$. Рассмотрим какое-либо дерево $T_i, i = 1, 2, \dots, N$. Скажем, что пара вершин $u \prec v$, принадлежащих дереву T_i , образует инверсию, если $\lambda(u) > \lambda(v)$.

Числом инверсий вершины $u \in T_i$ назовем величину

$$M(u) := \sum_{v \in T_i: u \prec v} \chi\{\lambda(u) > \lambda(v)\},$$

где $\chi\{B\}$ – индикатор события B . Число инверсий $\mathcal{I}(T_i)$ в дереве T_i определяется соотношением

$$\mathcal{I}(T_i) := \sum_{u \in T_i, v \in T_i: u \prec v} \chi\{\lambda(u) > \lambda(v)\} = \sum_{u \in T_i} M(u).$$

Числом инверсий в лесе $F_{n,N}$ назовем величину

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(F_{n,N}) &:= \sum_{i=1}^N \mathcal{I}(T_i) \\ &= \sum_{T_i \in F_{n,N}} \sum_{u \in T_i, v \in T_i: u \prec v} \chi\{\lambda(u) > \lambda(v)\} = \sum_{i=1}^N \sum_{u \in T_i} M(u). \end{aligned}$$

Цель данной работы — исследовать распределение случайной величины $\mathcal{I}(F_{n,N})$, вычисленной для леса $F_{n,N}$, выбранного случайно и равновероятно из множества $\mathcal{F}_{n,N}$. Параметры распределения случайной величины $\mathcal{I}(F_{n,N})$ могут использоваться при анализе свойств алгоритмов поиска данных и процедур линейного хеширования (см., например, [9]).

Пусть $m_v = |T(v)|$ обозначает число вершин поддерева с корнем v . Доказательство основного результата настоящей работы существенно использует следующую лемму.

Лемма 1 (см. [8]). *Если T — фиксированное корневое дерево, вершины которого помечены случайным равновероятным образом числами $1, 2, \dots, |T|$ без повторений, то*

$$\mathcal{I}(T) \stackrel{d}{=} \sum_{v \in T} M(v),$$

где случайные величины $\{M(v), v \in T\}$ независимы в совокупности, причем для каждого $v \in T$ случайная величина $M(v)$ имеет равновероятное распределение на множестве $0, 1, \dots, m_v - 1$.

Повторяя практически дословно доказательство этой леммы, приведенное в [8], можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2. *Если $F_{n,N}$ — фиксированный лес, образованный N корневыми деревьями $T_1, \dots, T_N$, имеющими в совокупности $n + N$ вершин, помеченных случайным равновероятным образом числами от 1 до $n + N$ (без повторений), то*

$$\mathcal{I}(F_{n,N}) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^N \mathcal{I}(T_i),$$

где случайные величины $\{\mathcal{I}(T_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ независимы в совокупности и имеют представления

$$\mathcal{I}(T_i) \stackrel{d}{=} \sum_{u \in T_i} M(u),$$

в которых случайные величины $\{M(u), u \in T_i\}$ независимы в совокупности, причем для каждого $u \in T_i$ случайная величина $M(u)$ имеет равновероятное распределение на множестве $0, 1, \dots, m_u - 1$.

Пусть

$$\Upsilon(T) = \sum_{v \in T} h(v)$$

— совокупная длина всех путей от корня к вершинам дерева T , а $\Upsilon(F_{n,N})$ — совокупная длина всех путей от корней к вершинам леса $F_{n,N}$. Нетрудно проверить, что

$$\Upsilon(F_{n,N}) = \sum_{i=1}^N \sum_{v \in T_i} h(v) = \sum_{i=1}^N \Upsilon(T_i) = \sum_{k=0}^n k H_{n,N}(k), \quad (2)$$

где $H_{n,N}(k)$ — число вершин высоты k в лесе $F_{n,N}$.

Легко понять, что $\mathbf{P}(\lambda(u) > \lambda(v)) = 1/2$ для любых вершин $u \prec v$, принадлежащих одному и тому же дереву. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathcal{I}(F_{n,N})|T_1, \dots, T_N] &= \sum_{i=1}^N \mathbf{E}[\mathcal{I}(T_i)|T_i] = \sum_{i=1}^N \sum_{u \in T_i} \mathbf{E}[M(u)] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{u \in T_i} \sum_{v \in T_i: u \prec v} \mathbf{E}[\chi\{\lambda(u) > \lambda(v)\}] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{v \in T_i} \sum_{u \in T_i: u \prec v} 1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{v \in T_i} h(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Upsilon(T_i) = \frac{1}{2} \Upsilon(F_{n,N}). \end{aligned} \quad (3)$$

Эта формула будет использована в доказательстве основной теоремы.

Обозначим через $\mathcal{B} := \{B_r, r \geq 0\}$ стандартное броуновское движение с нулевым сносом, тогда $\mathbf{E}[B_r B_t] = \min(r, t)$. Пусть, далее, $\mathcal{B}^{\text{br}, t} := \{B_s^{\text{br}, t}, 0 \leq s \leq t\}$ — броуновский мост длины t , построенный по $\mathcal{B}$, а

$$\mathcal{B}^{|\text{br}|, t} := \{|B_s^{\text{br}, t}|, 0 \leq s \leq t\}$$

— отраженный броуновский мост длины t . Пусть

$$L_{t,r}^{|\text{br}|} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \chi\{r \leq |B_s^{\text{br}, t}| \leq r + \varepsilon\} ds$$

— локальное время на уровне $r \geq 0$ отраженного броуновского моста длины t , и, наконец,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{|\text{br}|, t}(l) &:= \{|B_s^{\text{br}, t}(l)|, 0 \leq s \leq t\} \\ &= \{|B_s^{\text{br}, t}|, 0 \leq s \leq t \mid 2L_{t,0}^{|\text{br}|} = l\} \end{aligned}$$

— отраженный броуновский мост длины t , локальное время в нуле которого равно $l/2$. Описание свойств отраженного броуновского моста имеется, например, в [10] и [11].

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема. Если параметры n и $N = N(n)$ меняются так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2N}{\sqrt{n}} = l \in [0, \infty), \quad (4)$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{2}{n^{3/2}} \mathcal{I}(F_{n,N}) \xrightarrow{d} \int_0^1 |B_s^{\text{br},1}(l)| ds =: \xi(l).$$

Замечание 1. Распределение случайной величины $\xi(l)$ является обобщенным распределением Эйри (см. [10]). Из работы Ю.Л. Павлова [5, теорема 2] следует, что если выполнено условие (4), то для любых $x > 0, l > 0$

$$\mathbf{P}(\xi(l) > x) = \frac{e^{l^2/8}}{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy} \left(e^{-l\sqrt{-iy/2}} - e^{-ld(x;y)/2} \right) dy,$$

где

$$d(x; y) := \frac{\sqrt{-2iy} (1 + e^{-x\sqrt{-2iy}})}{1 - e^{-x\sqrt{-2iy}}}.$$

Формулы для вычисления моментов любого порядка случайной величины $\xi(l)$ имеются в [11]. В частности,

$$\mathbf{E}\xi(l) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{l^2/8} \int_{l/\sqrt{8}}^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

что при $l = 0$ дает

$$\mathbf{E}\xi(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Замечание 2. Данную заметку можно рассматривать как дополнение к статье [8], в которой при $n \rightarrow \infty$ было найдено предельное распределение числа инверсий в случайном дереве, имеющем равновероятное распределение на множестве всех помеченных корневых деревьев с n вершинами.

Отметим, что задача, близкая по смыслу (но не по результатам) к задаче, анализируемой в настоящей работе, рассматривалась [2]. В указанной статье каждая вершина u корневого b -арного дерева T раскрашивалась независимо от остальных вершин случайно и равновероятно в один из m цветов, занумерованных буквами алфавита $\mathcal{A} = \{A_1 < A_2 < \dots < A_m\}$. При этом считалось, что пара вершин $u \prec v$ дерева T образует инверсию, если цвет $A(u)$ вершины u был больше, чем цвет $A(v)$ вершины v , и исследовалось предельное распределение числа инверсий b -арного дерева T при такой раскраске, когда параметры m и b изменяются согласованным образом.

2. Вспомогательные результаты

При доказательстве теоремы нам будет нужно оценить сверху математическое ожидание случайной величины $h(F_{n,N})$. Для вывода желаемой оценки понадобится вспомогательный ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона $\{Z(n), n \geq 0\}$ с производящей функцией $f(s) = \mathbf{E}s^\eta$ чисел потомков частиц.

Обозначим T (случайное) дерево, получившееся в результате эволюции такого процесса. Будем интерпретировать T как *плоское корневое* дерево, т. е. корневое дерево, вложенное в плоскость, в котором между вершинами, лежащими на одном и том же расстоянии от корня, существует линейная упорядоченность. В таком дереве частицам соответствуют вершины, причем первоначальной частице соответствует корень, а ребра дерева направлены от корня и соединяют частицы-предки с частицами-потомками.

Для задания линейной упорядоченности вершин дерева T необходимо сначала присоединить к корню такого дерева фиктивную вершину ребром, направленным к корню, а затем воспользоваться следующей стандартной для теории ветвящихся процессов процедурой присваивания меток частицам-вершинам (см., например, [3], §2). Первоначальной частице присваивается метка (0) , а остальным частицам-вершинам — метки вида $(0, l_1, \dots, l_k)$, $l_i \in \{1, 2, \dots\}$, где вершина-частица $(0, l_1, \dots, l_{k-1})$ является предком частицы $(0, l_1, \dots, l_{k-1}, l_k)$, а частицы $(0, l_1, \dots, l_k, i)$, $i = 1, 2, \dots$, — ее потомками. Будем считать, что если вершины $(0, l_1, \dots, l_{k-1}, i)$ и $(0, l_1, \dots, l_{k-1}, i + 1)$ принадлежат такому дереву, то первая из них располагается на плоскости левее второй. При этом предполагается, что фиктивная вершина расположена левее всех остальных вершин дерева T . Обозначим $\mathcal{T}_q = \{T\}$ множество всех различных реализаций ветвящегося процесса, каждая из которых

имеет q вершин.

В [6] (теорема 1.2) показано, что если $Z(0) = 1$, $\mathbf{E}\eta = 1$ и $\mathbf{D}\eta \in (0, \infty)$, а генеалогические деревья соответствующего процесса Гальтона – Ватсона интерпретируются как плоские корневые деревья, то существуют такие константы C_1 и C_2 , что для всех $x > 0$ и $q = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}(h(T) > x | T \in \mathcal{T}_q) \leq C_1 e^{-C_2 x^2/q}. \quad (5)$$

Нам понадобится аналогичная оценка для высоты леса, выбранного случайно и равновероятно из множества $\mathcal{F}_{n,N}$.

Рассмотрим сначала множество $\mathcal{F}_{q,1}$ всех неизоморфных помеченных корневых деревьев с q некорневыми вершинами. Из (1) следует, что мощность этого множества равна $(q+1)^q$. Пусть $F_{q,1}$ — дерево, выбранное случайно и равновероятно из множества $\mathcal{F}_{q,1}$. Обозначим $\mu_r(t, F_{q,1})$, $r, t = 0, 1, \dots, q$, число вершин высоты t в $F_{q,1}$, имеющих кратность r , и пусть $\mu_r(t, T)$ — соответствующие характеристики дерева $T \in \mathcal{T}_q$, полученного в качестве реализации ветвящегося процесса Гальтона – Ватсона с производящей функцией числа потомков частиц

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\eta = k) s^k = e^{s-1}.$$

Введем матрицы $\|\mu_r(t, F_{q,1})\|$ и $\|\mu_r(t, T)\|$ размера $(q+1) \times (q+1)$, и пусть $\mathbf{M} = \|m_r(t)\|$ — матрица такого же размера, элементами которой являются неотрицательные целые числа.

Следующее утверждение является естественной модификацией леммы 1 главы II монографии [4].

Лемма 3. *При всех $q = 1, 2, \dots$ справедливо равенство*

$$\mathbf{P}(\|\mu_r(t, F_{q,1})\| = \mathbf{M}) = \mathbf{P}(\|\mu_r(t, T)\| = \mathbf{M} | T \in \mathcal{T}_q).$$

Из этой леммы и неравенства (5) вытекает, что существуют такие константы C_1 и C_2 , что для всех $x > 0$ и $q = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(h(F_{q,1}) > x) \leq C_1 e^{-C_2 x^2/q}. \quad (6)$$

Приведенные соотношения позволяют доказать следующее важное утверждение для лесов, состоящих из помеченных корневых деревьев.

Лемма 4. *Существует такая константа $C \in (0, \infty)$, что при всех n и N для математического ожидания высоты $h(F_{n,N})$ леса $F_{n,N}$, выбранного случайно и равновероятно из множества $\mathcal{F}_{n,N}$, справедливо неравенство*

$$\mathbf{E}h(F_{n,N}) \leq C \sqrt{N(n+N)}. \quad (7)$$

Доказательство. Из (6) следует, что найдется такая константа C , что

$$\mathbf{E}h(F_{q,1}) = \int_0^\infty \mathbf{P}(h(F_{q,1}) > x) dx \leq C_1 \int_0^q e^{-C_2 x^2/q} dx \leq C\sqrt{q} \quad (8)$$

при всех $q = 1, 2, \dots$

Очевидно, что если лес $F_{n,N} = (T_1, T_2, \dots, T_N)$ имеет равновероятное распределение на множестве $\mathcal{F}_{n,N}$, то на любом подмножестве $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_{n,N}$ условное распределение леса $F_{n,N}$ (при условии $F_{n,N} \in \mathcal{A}$) также равновероятно. Пусть $F_{n,N} = (T_1, T_2, \dots, T_N)$ – лес, выбранный случайно и равновероятно из подмножества всех таких лесов, принадлежащих $\mathcal{F}_{n,N}$, которые образованы деревьями $t_1, t_2, \dots, t_N$, имеющими $q_1, q_2, \dots, q_N$ вершин соответственно. Легко понять, что при таком случайном выборе леса для каждого $i = 1, 2, \dots, N$ распределение высоты дерева T_i совпадает с распределением высоты дерева, выбранного случайно и равновероятно из множества $\mathcal{F}_{q_i-1,1}$ корневых помеченных деревьев с q_i вершинами. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(h(F_{n,N}) > x) \\ &= \sum_{q_1 + \dots + q_N = n+N} \mathbf{P}(h(F_{n,N}) > x \mid |T_i| = q_i, 1 \leq i \leq N) \\ & \quad \times \mathbf{P}(|T_i| = q_i, 1 \leq i \leq N) \\ &= \sum_{q_1 + \dots + q_N = n+N} \left[1 - \prod_{k=1}^N \mathbf{P}(h(T_k) \leq x \mid |T_k| = q_k) \right] \\ & \quad \times \mathbf{P}(|T_i| = q_i, 1 \leq i \leq N) \\ &\leq \sum_{q_1 + \dots + q_N = n+N} \left(\sum_{k=1}^N \mathbf{P}(h(F_{q_k-1,1}) > x) \right) \\ & \quad \times \mathbf{P}(|T_i| = q_i, 1 \leq i \leq N), \end{aligned}$$

где при выводе последнего неравенства мы воспользовались тем, что при условии $|T_k| = q_k$ высота дерева T_k имеет такое же распределение, как и распределение высоты дерева, выбранного случайно и равновероятно из множества $\mathcal{F}_{q_k-1,1}$. Используя (8), видим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}h(F_{n,N}) &\leq \sum_{q_1 + \dots + q_N = n+N} \left(\sum_{k=1}^N \int_0^n \mathbf{P}(h(F_{q_k-1,1}) > x) dx \right) \\ & \quad \times \mathbf{P}(|T_i| = q_i, 1 \leq i \leq N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q_1+\dots+q_N=n+N} \sum_{k=1}^N \mathbf{E} [h(F_{q_k-1,1})] \mathbf{P} (|T_i| = q_i, 1 \leq i \leq N) \\
&\leq C \sum_{q_1+\dots+q_N=n+N} \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{q_k} \right) \mathbf{P} (|T_i| = q_i, 1 \leq i \leq N). \quad (9)
\end{aligned}$$

Так как $q_1 + \dots + q_N = n + N$, то

$$\sum_{k=1}^N \sqrt{q_k} \leq N \sqrt{\frac{n+N}{N}} = \sqrt{N(n+N)},$$

что в сочетании с (9) доказывает (7). Лемма доказана. $\square$

Далее будем считать, что $H_{n,N}(k) = 0$, если $k \notin [0, n]$. С учетом этого соглашения введем непрерывную функцию $\hat{H}_{n,N}(x)$, $x \in [0, \infty)$, полагая

$$\hat{H}_{n,N}(x) := H_{n,N}(k) + (H_{n,N}(k+1) - H_{n,N}(k))(x - k)$$

при всех $k = 0, 1, \dots$ и $x \in [k, k+1)$. Поскольку

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} x \hat{H}_{n,N}(x) dx &= \frac{1}{2} (k H_{n,N}(k) + (k+1) H_{n,N}(k+1)) \\
&\quad + \frac{1}{6} (H_{n,N}(k) - H_{n,N}(k+1))
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (k H_{n,N}(k) + (k+1) H_{n,N}(k+1)) &= 2 \sum_{k=0}^n k H_{n,N}(k), \\
\sum_{k=0}^n (H_{n,N}(k) - H_{n,N}(k+1)) &= N,
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x \hat{H}_{n,N}(x) dx &= \int_0^{n+1} x \hat{H}_{n,N}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} x \hat{H}_{n,N}(x) dx = 2 \sum_{k=0}^n k H_{n,N}(k) = 2\Upsilon(F_{n,N}) + N. \quad (10)
\end{aligned}$$

Для формулировки следующей леммы нам понадобится процесс $\mathcal{X} := \{X_{l,t,r}, r \geq 0\}$, который имеет распределение, задаваемое соотношением

$$\{X_{l,t,r}, r \geq 0\} \stackrel{d}{=} \left\{L_{t,r}^{|\text{br}|}, r \geq 0 \mid 2L_{t,0}^{|\text{br}|} = l\right\}. \quad (11)$$

Детальное описание свойств процесса $\mathcal{X}$ можно найти в [13].

Основой наших дальнейших рассуждений будет следующее утверждение (см. следствие 10 работы [13]).

Лемма 5. Если n и $N = N(n)$ меняются так, что $2Nn^{-1/2} \rightarrow l \in [0, \infty)$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{n}}\hat{H}_{n,N}(2\sqrt{nr}), r \geq 0\right\} \Longrightarrow \{X_{l,1,r}, r \geq 0\},$$

где символ $\Longrightarrow$ обозначает слабую сходимость в пространстве $C[0, \infty)$ непрерывных функций, снабженном равномерной метрикой.

Заметим теперь, что высоту леса $F_{n,N}$ можно можно задать формулой

$$h(F_{n,N}) = \min \{1 \leq k \leq n : H_{n,N}(k) = 0\}. \quad (12)$$

Из леммы 5 и принципа инвариантности Донскера – Прохорова следует, что при выполнении условия (4)

$$\frac{2}{\sqrt{n}}h(F_{n,N}) \xrightarrow{d} \inf \{r > 0 : X_{l,1,r} = 0\} =: \zeta. \quad (13)$$

Тот факт, что случайная величина ζ имеет собственное распределение, вытекает из непрерывности с вероятностью 1 траекторий броуновского моста $\mathcal{B}^{|\text{br}|,1}(l)$ на интервале $[0, 1]$.

Лемма 5 позволяет убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 6. В условиях леммы 5

$$\frac{1}{2n^{3/2}}\Upsilon(F_{n,N}) \xrightarrow{d} \int_0^1 |B_s^{\text{br},1}(l)| ds, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x \hat{H}_{n,N}(x) dx &= \int_0^{h(F_{n,N})} x \hat{H}_{n,N}(x) dx \leq h(F_{n,N}) \int_0^{h(F_{n,N})} \hat{H}_{n,N}(x) dx \\ &= h(F_{n,N}) \left(\sum_{k=0}^{h(F_{n,N})} \left(H_{k,N} + \frac{1}{2} (H_{k+1,N} - H_{k,N}) \right) \right) = h(F_{n,N})(n + N), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
 & \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \int_0^\infty x \hat{H}_{n,N}(x) dx > M \right) \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \int_0^{h(F_{n,N})} x \hat{H}_{n,N}(x) dx > M \right) \\
 &\leq \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{1}{n^{1/2}} h(F_{n,N}) > M \right) = 0. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Зафиксируем $M > 0$ и, используя соотношение (10), запишем представление

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2n^{3/2}} (\Upsilon(F_{n,N}) + N) &= \frac{1}{2n^{3/2}} \int_0^\infty x \hat{H}_{n,N}(x) dx = \int_0^\infty r \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \hat{H}_{n,N}(2\sqrt{nr}) \right) dr \\
 &= \int_0^M r \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \hat{H}_{n,N}(2\sqrt{nr}) \right) dr + \frac{1}{2n^{3/2}} \int_{2M\sqrt{n}}^\infty x \hat{H}_{n,N}(x) dx. \quad (16)
 \end{aligned}$$

В силу (12) и (15)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\int_{2M\sqrt{n}}^\infty x \hat{H}_{n,N}(x) dx > 0 \right) \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} (h(F_{n,N}) > 2M\sqrt{n}) = 0. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Поэтому при больших значениях M интерес представляет лишь первое слагаемое в правой части (16).

Из леммы 5 и принципа инвариантности Донскера – Прохорова вытекает, что для каждого $M > 0$

$$\int_0^M r \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \hat{H}_{n,N}(2\sqrt{nr}) \right) dr \xrightarrow{d} \int_0^M r X_{l,1,r} dr.$$

Устремляя M к бесконечности и вспоминая (4) и (17), приходим к соотношению

$$\frac{1}{2n^{3/2}} \Upsilon(F_{n,N}) \xrightarrow{d} \int_0^\infty r X_{l,1,r} dr.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что в силу (11)

$$\int_0^\infty r X_{l,1,r} dr \stackrel{d}{=} \int_0^1 |B_s^{\text{br},1}(l)| ds.$$

Лемма доказана. □

3. Доказательство теоремы

Обозначим ρ_i корень дерева T_i и введем набор

$$\{Q_u, u \in F_{n,N}, v \neq \rho_i, i = 1, 2, \dots, N\},$$

состоящий из независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $(-1/2, 1/2)$. С каждой вершиной $u \neq \rho_i$ свяжем случайную величину

$$W(u) := \left\lfloor \left(Q_u + \frac{1}{2} \right) m_u \right\rfloor,$$

где $\lfloor x \rfloor$ — целая часть числа x . Ясно, что случайная величина $W(u)$ имеет равномерное распределение на множестве $0, 1, \dots, m_u - 1$. Положим

$$\mathcal{I}^*(T_i) := \sum_{u \in T_i, u \neq \rho_i} (W(u) - \mathbf{E}[W(u)|T_i])$$

и рассмотрим случайную величину

$$\mathcal{I}^*(F_{n,N}) := \sum_{i=1}^N \mathcal{I}^*(T_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{u \in T_i, u \neq \rho_i} (W(u) - \mathbf{E}[W(u)|T_i]).$$

В силу (3) и леммы 2 величина $\mathcal{I}^*(F_{n,N})$ совпадает по распределению с центрированным числом инверсий в лесе $F_{n,N}$ без учета инверсий, порождаемых корнями деревьев $T_1, \dots, T_N$. Поскольку

$$\mathcal{I}(F_{n,N}) - \frac{1}{2}\Upsilon(F_{n,N}) = \sum_{i=1}^N \sum_{u \in T_i} (W(u) - \mathbf{E}[W(u)|T_i])$$

и

$$\sum_{i=1}^N (W(\rho_i) - \mathbf{E}[W(\rho_i)|T_i]) \leq n,$$

то

$$\mathcal{I}^*(F_{n,N}) \leq \mathcal{I}(F_{n,N}) - \frac{1}{2}\Upsilon(F_{n,N}) \leq \mathcal{I}^*(F_{n,N}) + n.$$

Заметим далее, что для любой вершины $u \in T_i$

$$\begin{aligned} W(u) - \mathbf{E}[W(u)|T_i] &\leq \left(Q_u + \frac{1}{2} \right) m_u - \mathbf{E} \left[\left(Q_u + \frac{1}{2} \right) m_u - 1 \right] \\ &= Q_u m_u + 1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} W(u) - \mathbf{E}[W(u)|T_i] &\geq \left(Q_u + \frac{1}{2}\right) m_u - 1 - \mathbf{E}\left[\left[\left(Q_u + \frac{1}{2}\right) m_u\right]\right] \\ &\geq Q_u m_u - 1. \end{aligned}$$

Положим

$$\mathcal{J}(F_{n,N}) = \sum_{i=1}^N \sum_{u \in T_i, u \neq \rho_i} Q_u m_u.$$

Из приведенных выше оценок вытекает, что

$$\mathcal{I}^*(F_{n,N}) \leq \sum_{i=1}^N \sum_{u \in T_i, u \neq \rho_i} (Q_u m_u + 1) \leq \mathcal{J}(F_{n,N}) + n$$

и

$$\mathcal{I}^*(F_{n,N}) \geq \mathcal{J}(F_{n,N}) - n.$$

Следовательно,

$$\mathcal{J}(F_{n,N}) - 2n \leq \mathcal{I}(F_{n,N}) - \frac{1}{2}\Upsilon(F_{n,N}) \leq \mathcal{J}(F_{n,N}) + 2n. \quad (18)$$

Ясно, что $\mathbf{E}J(F_{n,N}) = 0$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathcal{J}^2(F_{n,N}) &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^N \sum_{u \in T_i, u \neq \rho_i} Q_u m_u\right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^N \mathbf{E}\left(\sum_{u(i) \in T_i, u(i) \neq \rho_i} \sum_{u(j) \in T_j, u(j) \neq \rho_j} Q_{u(i)} Q_{u(j)} m_{u(i)} m_{u(j)}\right) \\ &\leq \sum_{i,j=1}^N \mathbf{E}\left(\sum_{u(i) \in T_i} \sum_{u(j) \in T_j} \mathbf{E}[Q_{u(i)} Q_{u(j)} | T_i, T_j] m_{u(i)} m_{u(j)}\right). \end{aligned}$$

Поскольку случайные величины $Q_{u(i)}$ и $Q_{u(j)}$ зависимы тогда и только тогда, когда $u(i) = u(j)$, и кроме того,

$$\mathbf{E}[Q_u | T] = 0, \quad \mathbf{E}[Q_u^2 | T] = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

для любого дерева T и любой вершины $u \in T$, то

$$\mathbf{E}\mathcal{J}^2(F_{n,N}) \leq \frac{2}{3} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}\left(\sum_{u \in T_i} m_u^2\right).$$

Для не обязательно различных вершин $v_1, \dots, v_k$ дерева T положим

$$c(v_1, \dots, v_k) := |\{u \in T : u \preceq v_1, \dots, u \preceq v_k\}|.$$

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \sum_{u \in T} m_u^2 &= \sum_{u \in T} \left(\sum_{u \preceq v} I\{u \preceq v\} \right)^2 \\ &= \sum_{u \in T} \sum_{u \preceq v_1, u \preceq v_2} I\{u \preceq v_1, u \preceq v_2\} = \sum_{v_1, v_2 \in T} c(v_1, v_2) \\ &\leq |T|^2 (h(T) + 1). \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 4 следует, что найдется такая константа C , что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathcal{J}^2(F_{n,N}) &\leq \frac{2}{3} \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^N |T_i|^2 (h(T_i) + 1) \right] \leq \frac{2}{3} \mathbf{E} [|F_{n,N}|^2 (h(F_{n,N}) + 1)] \\ &\leq \frac{2}{3} n^2 \mathbf{E} [h(F_{n,N}) + 1] \leq C n^2 \sqrt{Nn} \end{aligned}$$

при всех $n = 1, 2, \dots$ и $N \leq n$. Учитывая условие (4), заключаем, что найдется константа C_3 , для которой

$$\mathbf{E} \mathcal{J}^2(F_{n,N}) \leq C_3 n^{11/4}$$

при всех $n \geq 1$. Отсюда и из (18) выводим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left| \frac{1}{n^{3/2}} \mathcal{I}(F_{n,N}) - \frac{1}{2n^{3/2}} \Upsilon(F_{n,N}) \right| \geq \frac{2}{n^{1/16}} \right) \\ = \mathbf{P} \left(\left| \mathcal{I}(F_{n,N}) - \frac{1}{2} \Upsilon(F_{n,N}) \right| \geq 2n^{23/16} \right) \\ \leq \mathbf{P} (|\mathcal{J}(F_{n,N})| + 2n \geq 2n^{23/16}) \leq \mathbf{P} (|\mathcal{J}(F_{n,N})| \geq n^{23/16}) \\ \leq \frac{\mathbf{E} \mathcal{J}^2(F_{n,N})}{n^{23/8}} \leq \frac{C_3 n^{11/4}}{n^{23/8}} = \frac{C_3}{n^{1/8}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Последнее в сочетании с (14) показывает, что если параметры N, n стремятся к бесконечности так, что $2Nn^{-1/2} \rightarrow l \in [0, \infty)$, то

$$\frac{2}{n^{3/2}} \mathcal{I}(F_{n,N}) \xrightarrow{d} \int_0^1 |B_s^{\text{br},1}(l)| ds.$$

Теорема доказана.

Автор благодарен рецензенту, стимулирующие вопросы которого позволили улучшить изложение представленных здесь результатов.

Список литературы

- [1] Ватутин В. А., “Распределение расстояния до корня минимального поддеревя, содержащего все вершины данной высоты”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **38**:2 (1993), 273–287.
- [2] Ватутин В. А., “Асимптотические свойства числа инверсий в раскрашенных деревьях”, *Математические вопросы криптографии*, **10**:4 (2019), 9–24.
- [3] Харрис Т., *Теория ветвящихся процессов*, М.: Наука, 1966, 355 с.
- [4] Колчин В. Ф., *Случайные отображения*, М.: Наука, 1984, 207 с.
- [5] Павлов Ю. Л., “Предельные распределения высоты случайного леса”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **28**:3 (1983), 449–457.
- [6] Addario-Berry L., Devroye L., Janson S., “Sub-Gaussian tail bounds for the width and height of conditioned Galton–Watson trees”, *Ann. Probab.*, **41**:2 (2013), 1072–1087.
- [7] Aldous D., Pitman J., “Brownian bridge asymptotics for random mappings”, *Random Struct. Algor.*, **5** (1994), 487–512.
- [8] Cai X. S., Holmgren C., Janson S., Johansson T., Skerman F., “Inversions in split trees and conditional Galton–Watson trees”, *Comb., Probab. and Comput.*, **28**:3 (2019), 335–364.
- [9] Flajolet P., Poblete P., Viola A., “On the analysis of linear probing hashing”, *Algorithmica*, **22** (1998), 490–515.
- [10] Chassaing P., Louchard G., “Reflected Brownian bridge area conditional on its local time at the origin”, *J. Algorithms*, **44** (2002), 29–51.
- [11] Knight F. B., “The moments of the area under reflected Brownian bridge conditional on its local time at zero”, *Int. J. Stoch. Analysis*, **13**:2 (2000), 99–124.
- [12] Pitman J., “Combinatorial Stochastic Processes”, *Lect. Notes Math.*, **1875**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006, 260 pp.
- [13] Pitman J., “The SDE solved by local times of a Brownian excursion or bridge derived from the height profile of a random tree or forest”, *Ann. Probab.*, **27**:1 (1999), 261–283.