Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тарасов, Универсальные алгебры, порождаемые множествами выполняющих векторов биюнктивных и r -юнктивных булевых функций, *Матем. вопр. криптогр.*, 2011, том 2, выпуск 3, 75–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:58:34

УДК: 519.571

Универсальные алгебры, порождаемые множествами выполняющих векторов биюнктивных и r -юнктивных булевых функций

А. В. Тарасов

Московский государственный технический университет радиотехники,
электроники и автоматики, Москва

Получено 10.V.2011

В работе введено понятие универсальной алгебры $\Omega_n^r = (V_n, v_r)$, где V_n — множество двоичных n -мерных векторов, а v_r — покоординатно определяемая $(r + 1)$ -местная операция. Подалгебры этой алгебры образованы множествами выполняющих векторов r -юнктивных функций, т. е. функций, представимых в виде r -КНФ. В работе описаны эндоморфизмы подалгебр алгебры Ω_n^r и их эндоморфные образы. Для случая $r = 2$ исследован ряд свойств систем образующих самой алгебры и некоторых подалгебр.

Ключевые слова: биюнктивные функции, r -юнктивные функции, r -КНФ, универсальная алгебра

Universal algebras generated by sets of satisfying vectors of bijunctive and r -junctive Boolean functions

A. V. Tarasov

Moscow State Technical University of Radio Engineering, Electronics and Automatics, Moscow

Abstract. The notion of universal algebra $\Omega_n^r = (V_n, v_r)$ (where V_n is the set of binary n -dimensional vectors and $v_r: V_n^{r+1} \rightarrow V_n$ is the coordinate-wise operation) is introduced. Subalgebras of this algebra are formed by sets of satisfying vectors for r -junctive functions, i.e. functions which may be represented as r -CNF. The endomorphisms of these subalgebras of algebra Ω_n^r and their endomorphic images are described. In the case of $r = 2$ several properties of generating systems of the algebra and of some subalgebras are investigated.

Key words: bijunctive functions, r -junctive functions, r -CNF, universal algebra

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2011, vol. 2, no. 3, pp. 75–98 (Russian).

1. Введение

Задача решения систем булевых уравнений является одной из актуальных проблем теоретической криптографии. Одним из направлений исследований этой проблемы является изучение классов функций, порождающих полиномиально решаемые системы уравнений с ограничениями на выбор функций и без ограничений на выбор неизвестных. Значительное место в изучении таких классов функций занимают работы Т. Шефера [1], С. П. Горшкова [2–4] и др. Некоторые результаты автора настоящей работы отражены в [5].

Полиномиально решаемые системы уравнений с ограничениями на выбор функций и без ограничений на выбор неизвестных порождаются, например, булевыми биконктивными функциями, т. е. функциями, представимыми в виде 2-КНФ. Известен целый ряд свойств биконктивных функций, однако многие вопросы, касающиеся структуры класса биконктивных функций и множеств их выполняющих векторов, остаются открытыми. В настоящей работе рассматриваются некоторые новые свойства класса биконктивных функций и одного подкласса класса r -юнктивных булевых функций специального вида, основанные на изучении их универсальных алгебр.

2. Алгебры Ω_n^r и их основные свойства

Напомним некоторые определения. Введем следующие классы булевых функций (см., например, [2]). Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется:

1) *мультиаффинной*, если $f \equiv 1$ или существует представление функции f в виде конъюнкции аффинных функций

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (a_{i_1}x_1 \oplus \dots \oplus a_{i_n}x_n \oplus a_{i_0}), \quad (1)$$

где $a_{i_0}, \dots, a_{i_n} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, t$;

2) *биконктивной*, если $f \equiv 1$ или существует представление функции f в виде 2-КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_{i2}}), \quad (2)$$

где $s_{i1}, s_{i2} \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i1}, a_{i2} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, t$, $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$;

3) *слабо положительной*, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_i} \vee x_{s_{i2}} \vee \dots \vee x_{s_{ik_i}}); \quad (3)$$

4) *слабо отрицательной*, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t \left(x_{s_{i1}}^{a_i} \vee \overline{x}_{s_{i2}} \vee \dots \vee \overline{x}_{s_{ik_i}} \right), \quad (4)$$

где $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, t$;

5) булеву функцию f назовем *r-юнктивной*, если $f \equiv 1$ или существует ее представление в виде конъюнктивной нормальной формы (КНФ) вида

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t \left(x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_{i2}} \vee \dots \vee x_{s_{ir_i}}^{a_{ir_i}} \right), \quad r_i \leq r, i = 1, \dots, t, \quad (5)$$

где $s_{i1}, \dots, s_{ir_i} \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i1}, \dots, a_{ir_i} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, t$.

Множество всех функций классов 1)–5) обозначим соответственно A , Bi , WP , WN , Ju_r . Формулы (1)–(5) для функций классов A , Bi , WP , WN , Ju_r будем называть *приведенными представлениями*. В работах [2–6] показано, что классы A , Bi , WP , WN порождают полиномиально решаемые классы систем уравнений без ограничений на выбор неизвестных и с ограничениями на выбор функций, и исследован ряд их свойств.

Через $F_2(n)$ обозначим множество всех булевых функций, зависящих от n переменных.

Очевидно, что

$$Bi \subset Ju_3 \subset Ju_4 \subset \dots$$

Если для произвольного класса булевых функций Q определить подкласс $Q(n)$ как множество функций из Q , зависящих от n переменных, то будут выполняться очевидные включения

$$Bi(n) \subset Ju_3(n) \subset Ju_4(n) \subset \dots \subset Ju_n(n) = F_2(n).$$

К перечисленным множествам функций добавим еще класс M — класс монотонных функций.

Для всякой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ определим множество

$$E_f = \{\alpha = (a_1, \dots, a_n) : f(a_1, \dots, a_n) = 1\},$$

которое будем называть *множеством выполняющих векторов* функции f .

Пусть V_n — множество двоичных n -мерных векторов, 0_n — вектор из V_n , состоящий из нулей, 1_n — вектор из V_n , состоящий из единиц.

Для множества $N \subset V_n$ обозначим через f_N булеву функцию, множеством выполняющих векторов которой является множество N , т. е. $E_{f_N} = N$.

Определим множество $N \oplus \delta = \{\alpha \oplus \delta: \alpha \in N\}$, где δ — произвольный вектор из множества V_n .

Для всяких $i_1, \dots, i_r$, $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, $a_1, \dots, a_r \in \{0, 1\}$, обозначим

$$N_{i_1 \dots i_r}^{a_1 \dots a_r} = \{\alpha = (c_1, \dots, c_n) \in N: c_{i_j} = a_j, j = 1, \dots, r\}$$

и определим *подфункцию* $f_{i_1 \dots i_r}^{a_1 \dots a_r}$ булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ как $(n - r)$ -местную функцию, получаемую из f фиксацией переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ значениями $a_1, \dots, a_r$.

Координаты вектора $\alpha \in V_n$ будем обозначать как $\alpha(1), \dots, \alpha(n)$. Для векторов $\alpha, \beta \in V_n$ запись $\alpha\beta$, $\alpha \vee \beta$ означает покоординатное применение операций дизъюнкции и конъюнкции.

Введем еще одно обозначение. Пусть $r \geq 2$. Определим $(r + 1)$ -арную операцию $v_r: V_n^{r+1} \rightarrow V_n$, определенную покоординатно по правилу

$$v_r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1}) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq r+1} \alpha_i \alpha_j,$$

т. е. если $v_r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1}) = \delta$, то выполнены равенства

$$\delta(k) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq r+1} \alpha_i(k) \alpha_j(k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Заметим, что k -я ($k = 1, \dots, n$) координата вектора $v_r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1})$ равна единице тогда и только тогда, когда в векторах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1}$ по этой координате содержится не менее двух единиц.

Для любого $r \geq 2$ будем рассматривать универсальную алгебру $\Omega_n^r = (V_n, v_r)$. При этом операцию v_2 будем обозначать через v , а соответствующую алгебру — через Ω_n , т. е. $\Omega_n = (V_n, v)$.

Для $N \subset V_n$ положим $\langle N \rangle^{(1)} = N \cup \{v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}): \alpha_1, \dots, \alpha_{r+1} \in N\}$, $\langle N \rangle^{(i+1)} = \langle \langle N \rangle^{(i)} \rangle^{(1)}$, $i = 1, 2, \dots$. Через $\langle N \rangle$ обозначим подалгебру алгебры Ω_n^r , порожденную множеством N . Очевидно, $\langle N \rangle = \langle N \rangle^{(k)}$ для некоторого $k > 0$. Если $\langle N \rangle = N$, то множество N будем называть v_r -замкнутым, а если $\langle N \rangle = V_n$, то — v_r -полным.

При $n = 1$ операция v_r является $(r + 1)$ -местной булевой функцией.

Утверждение 1. При $n = 1$ многочлен Жегалкина функции v_r имеет вид

$$v_r(x_1, \dots, x_{r+1}) = \bigoplus_{\substack{k=2 \\ k \text{ четно}}}^{r+1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r+1} x_{i_1} \dots x_{i_k}.$$

Доказательство. Пусть $n = 1$. Определим функцию $w_r = v_r \oplus 1$. Согласно определению данная функция равна единице только на векторах веса не более 1. Найдем коэффициенты ее многочлена Жегалкина $a_0, a_1, \dots, a_{r+1}, a_{12}, \dots, a_{12\dots r+1}$. Ввиду того что функция симметрическая, для ее коэффициентов выполняются равенства $a_{12\dots k} = a_{i_1\dots i_k}$ для всех $k \in \{1, 2, \dots, r+1\}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r+1$.

Поэтому положим $b_k = a_{1\dots k}, 1 \leq k \leq r+1, b_0 = a_0$, и применим метод неопределенных коэффициентов. Имеем

$$b_0 = a_0 = w_r(0, \dots, 0) = 1,$$

$$b_1 = w_r(1, 0, \dots, 0) \oplus b_0 = 0,$$

$$b_2 = w_r(1, 1, \dots, 0) \oplus b_0 \oplus b_1 \oplus b_1 = 1.$$

Очевидно, что во введенных обозначениях при $k \geq 2$ верны равенства

$$b_k = \bigoplus_{i=0}^{k-1} ((C_k^i \bmod 2) \& b_i).$$

Покажем, что $b_k = 1$ при четном k и $b_k = 0$ при нечетном k . Доказательство проведем индукцией по k . Базис индукции — значения b_0, b_1, b_2 , подсчитанные выше. Пусть утверждение верно для $b_0, \dots, b_{k-1}$ и k четно. Тогда

$$\begin{aligned} b_k &= \bigoplus_{\substack{i=0 \\ i \text{ четно}}}^{k-1} (C_k^i \bmod 2) = \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ четно}}}^{k-1} C_k^i \right) \bmod 2 = \\ &= \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ четно}}}^k C_k^i - C_k^k \right) \bmod 2 = (2^{k-1} - 1) \bmod 2 = 1. \end{aligned}$$

Если же k нечетно, то

$$b_k = \bigoplus_{\substack{i=0 \\ i \text{ четно}}}^{k-1} (C_k^i \bmod 2) = \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ четно}}}^k C_k^i \right) \bmod 2 = (2^{k-1}) \bmod 2 = 0.$$

Из этих рассуждений о виде последовательности $b_k, k = 1, 2, \dots, r+1$, легко следует искомый результат. $\square$

В следующем утверждении доказывается еще одно важное свойство операции v_r .

Утверждение 2. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}, \delta \in V_n$ и $\delta = v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1})$. Тогда для любых $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ среди векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}$ найдется такой вектор $\alpha_m \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}\}$, что $\delta(i_1) = \alpha_m(i_1), \dots, \delta(i_r) = \alpha_m(i_r)$.

Доказательство. Предположим противное. Без ограничения общности будем считать, что $i_1 = 1, \dots, i_r = r$ и $\delta(1) = \dots = \delta(r) = 0$. В соответствии со сделанным предположением среди векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}$ не найдется вектора, первые r координат которого равны 0. Это означает, что у каждого из векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}$ содержится по крайней мере по одной единице на местах $1, \dots, r$. Следовательно, суммарное число единиц среди двоичных чисел $\alpha_1(1), \dots, \alpha_1(r), \dots, \alpha_{r+1}(r)$ не меньше $r + 1$. С другой стороны, поскольку $\delta = v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1})$ и $\delta(1) = \dots = \delta(r) = 0$, то в каждом из векторов $\beta_1 = (\alpha_1(1), \dots, \alpha_{r+1}(1)), \dots, \beta_r = (\alpha_1(r), \dots, \alpha_{r+1}(r))$ содержится не более одной единицы, что противоречит сделанному выше выводу о суммарном числе единиц. Полученное противоречие доказывает утверждение. $\square$

В работе Шефера [1] доказан критерий бионктивности, который во введенных обозначениях можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ бионктивна тогда и только тогда, когда множество E_f является v -замкнутым, т. е. является подалгеброй алгебры Ω_n .

Следующая теорема реализует идею А. С. Артемьева о том, что критерий бионктивности Шефера можно обобщить на более широкий класс функций. Прежде чем перейти к ее формулировке и доказательству, напомним [4], что класс функций $WP \cap WN$ является подклассом класса Bi и состоит из функций $f(x_1, \dots, x_n)$, представимых в виде 2-КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i1}} \vee x_{s_{i2}}).$$

Класс $M \cap Ju_r$ определим как класс монотонных r -юнктивных функций. Несложно показать, что такие функции представимы КНФ вида

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}} \vee x_{s_{i2}} \vee \dots \vee x_{s_{il_i}}), \quad l_i \leq r, \quad i = 1, \dots, t.$$

Имплицентай булевой функции f назовем такую элементарную дизъюнкцию D , что $f \leq D$ на всех наборах значений переменных. Имплицента называется

простой, если никакая ее собственная часть не является имплицентай функции f . Таким образом, понятие имплиценты является двойственным к широко известному понятию импликанты. Поэтому общеизвестные утверждения, касающиеся свойств импликант, можно двойственным образом сформулировать и для имплицентай.

Теорема 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция и $r \geq 3$. Множество E_f является v_r -замкнутым тогда и только тогда, когда существует представление функции f в виде $f(x_1, \dots, x_n) = gh$, где $g \in WP \cap WN$, $h \in M \cap Ju_r$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет представление указанного вида и $\bigwedge_{i=1}^{\mu} D_i$ — соответствующая КНФ. Пусть теперь $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}\}$ — произвольный набор из $r+1$ выполняющих векторов функции $f(x_1, \dots, x_n)$ (не обязательно различных). Очевидно, что произвольный вектор из этого набора является выполняющим для каждой элементарной дизъюнкции D_i , $i \in 1, \dots, \mu$. Покажем, что при этом вектор $\delta = v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1})$ также является выполняющим для дизъюнкции D_i , $i \in 1, \dots, \mu$, из чего и будет следовать, что вектор δ является также выполняющим и для функции $f(x_1, \dots, x_n)$. С точностью до перестановки переменных элементарные дизъюнкции D_i будут иметь следующий вид:

либо $D = x_1 \vee \dots \vee x_l$, где $l \leq r$,

либо $D = \bar{x}_1 \vee x_2$.

Рассмотрим первый случай. Из соотношения $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1} \in E_f$ следует, что $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1} \in E_D$. Значит, каждый из этих векторов содержит по крайней мере по одной единице на местах с 1-го по l -е. Следовательно, найдется такая координата i : $1 \leq i \leq l$, что по крайней мере два из указанных векторов имеют 1 на i -м месте. Тогда если $\delta = v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1})$, то $\delta(i) = 1$ и $\delta \in E_D$.

Пусть теперь $D = \bar{x}_1 \vee x_2$. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1} \in E_f$, то в первых двух координатах этих векторов не может встречаться комбинация (1,0). Пусть $\delta = v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1})$. Если в первых координатах векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}$ не более одной единицы, то $\delta(1) = 0$ и тогда $\delta \in E_f$. Пусть $\delta(1) = 1$. Тогда найдутся такие два вектора $\alpha_i, \alpha_j \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}\}$, что $\alpha_i(1) = \alpha_j(1) = 1$. Поскольку эти векторы — выполняющие для D , для них выполняются равенства $\alpha_i(2) = \alpha_j(2) = 1$, откуда $\delta(2) = 1$ и $\delta \in E_D$. Указанные рассуждения верны для любой простой имплиценты f . Достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ множество E_f является v_r -замкнутым. Поскольку $r \geq 3$, для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in E_f$

верно включение

$$v_r(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_2) = \alpha_1 \vee \alpha_2 \in E_f.$$

В работе [3] доказан критерий слабой положительности, в соответствии с которым функция является слабо положительной тогда и только тогда, когда множество ее выполняющих векторов замкнуто относительно операции покоординатной дизъюнкции. Следовательно, $f \in WP$.

Рассмотрим соответствующее приведенное представление функции f вида (3). Имплиценты функции f имеют вид либо $D = x_1 \vee \dots \vee x_q$, либо $D = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_q$.

Рассмотрим первый случай. Будем считать, что имплицента D простая, т. е. никакая ее часть не является имплицентами f . Это означает, что для всякого i , $1 \leq i \leq q$, функция $f_{1\dots i\dots q}^{0\dots 1\dots 0}$ не равна тождественно нулю. Построим q выполняющих векторов

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0, \alpha_1(q+1), \dots, \alpha_1(n)), \\ \alpha_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0, \alpha_2(q+1), \dots, \alpha_2(n)), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \alpha_q &= (0, 0, \dots, 0, 1, \alpha_q(q+1), \dots, \alpha_q(n)). \end{aligned}$$

Легко видеть, что при $q \geq r+1$ применение операции v_r к любым $r+1$ векторам из данной совокупности даст вектор

$$\delta = (0, 0, \dots, 0, 0, \delta(q+1), \dots, \delta(n)) \notin E_D.$$

Такой вектор не лежит в E_f . Получили противоречие.

Рассмотрим случай имплиценты $D = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_q$. Покажем, что в этом случае $q \leq 2$. Аналогично вышесказанному построим q выполняющих векторов

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (0, 0, \dots, 0, 0, \alpha_1(q+1), \dots, \alpha_1(n)), \\ \alpha_2 &= (1, 1, \dots, 0, 0, \alpha_2(q+1), \dots, \alpha_2(n)), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \alpha_q &= (1, 0, \dots, 0, 1, \alpha_q(q+1), \dots, \alpha_q(n)). \end{aligned}$$

При $q \geq 3$ получаем, что

$$\delta = v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0, \dots, 0, \delta(q+1), \dots, \delta(n)) \notin E_f.$$

Таким образом, необходимость доказана. $\square$

Доказанная теорема показывает, что подалгебры алгебры Ω_n^r при $r \geq 3$ являются множествами выполняющих векторов для функций специального вида из подкласса класса Ju_r . Указанный класс функций обозначим через Ju_r^1 .

Определение 1. Множество $N \subset V_n$ называется *комбинаторно полным* порядка r , если для любых таких $i_1, \dots, i_r$, что $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, и $a_1, \dots, a_r \in \{0, 1\}$, в множестве N найдется такой вектор $\alpha = (c_1, \dots, c_n)$, что $c_{i_s} = a_s, s = 1, 2, \dots, r$.

Напомним, что *наилучшим верхним бионктивным аналогом* булевой функции f называется бионктивная функция g , удовлетворяющая условиям: $g \geq f$ и если для некоторой бионктивной функции h выполнено неравенство $h \geq f$, то верно неравенство $h \geq g$ ([3]).

Теорема 3. Пусть $N \subset V_n$. Для наилучшего верхнего бионктивного аналога g функции $f = f_N$ верно равенство $E_g = \langle N \rangle$. Множество N v -полно тогда и только тогда, когда оно комбинаторно полно порядка 2.

Доказательство. По теореме 1 функция g , определяемая равенством $E_g = \langle N \rangle$, является бионктивной. Кроме того, очевидно, что $g \geq f$. Далее, для всякой такой бионктивной функции $h(x_1, \dots, x_n)$, что $h \geq f$, верно включение $N = E_f \subset E_h$. Кроме того, опять же по теореме 1, $\langle E_h \rangle = E_h$. Поэтому $E_g = \langle N \rangle \subset \langle E_h \rangle = E_h$ и $h \geq g$. Первая часть теоремы доказана.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Сначала покажем, что если g — наилучший верхний бионктивный аналог f , то верно равенство

$$g(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{i_1}^{a_1 \oplus 1} \vee x_{i_2}^{a_2 \oplus 1}), \quad (6)$$

где конъюнкция берется по всем таким наборам (i_1, i_2, a_1, a_2) , что $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$, $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$ и $(f_M)_{i_1 i_2}^{a_1 a_2} \equiv 0$.

Докажем включение $\langle N \rangle \subset E_g$. В самом деле, если для некоторых i_1, i_2 , $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$, выполнено условие $f_{i_1 i_2}^{a_1 a_2} \equiv 0$, то у любого вектора $\alpha \in M$ координаты $(\alpha(i_1), \alpha(i_2))$ не могут принимать значения (a_1, a_2) . Соответственно, для любого набора $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in N$ их комбинация $\delta = v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ обладает таким же свойством по утверждению 2. Данным свойством обладают также множества $\langle N \rangle^{(1)}, \langle N \rangle^{(2)}, \dots, \langle N \rangle$. Максимальное по включению множество с указанным свойством — множество E_ϕ , где $\phi = x_{i_1}^{a_1 \oplus 1} \vee x_{i_2}^{a_2 \oplus 1}$. Поэтому $\langle N \rangle \subset E_\phi$. Проведя подобные рассуждения для всех таких i_1, i_2 , $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$, что $f_{i_1 i_2}^{a_1 a_2} \equiv 0$, получим включение $\langle N \rangle \subset E_g$.

Докажем обратное включение $E_g \subset \langle N \rangle$. Предположим противное, т. е. что существует вектор $\alpha \in E_g \setminus \langle N \rangle$. По критерию бионктивности функции $f_{\langle N \rangle}$ бионктивна, следовательно, $f \leq f_{\langle N \rangle} \leq g$. Получили противоречие. Равенство (6) доказано.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть множество N не является комбинаторно полным порядка 2, т. е. $N_{i_1 i_2}^{a_1 a_2} = \emptyset$ для некоторых $i_1, i_2, 1 \leq i_1 < i_2 \leq n, a_1, a_2 \in \{0, 1\}$. Рассмотрим функцию f_N . Очевидно, что $f_N \leq \phi = x_{i_1}^{a_1 \oplus 1} \vee x_{i_2}^{a_2 \oplus 1}$, т. е. функция f_N имеет нетривиальный верхний биюнктивный аналог. Тогда, в соответствии с первой частью теоремы, $\langle N \rangle \subset E_\phi \neq V_n$.

Пусть теперь множество N комбинаторно полно порядка 2. Покажем, что оно v -полно. Так как $N \subset \langle N \rangle$, то функция $g = f_{\langle N \rangle}$ биюнктивна и $f_{\langle N \rangle} \geq f_N$. Если $\langle N \rangle \neq V_n$, то функция f_N имеет нетривиальный верхний биюнктивный аналог, а значит, $N_{i_1 i_2}^{a_1 a_2} = \emptyset$ для некоторых $i_1, i_2, 1 \leq i_1 < i_2 \leq n, a_1, a_2 \in \{0, 1\}$, что противоречит заявленному свойству множества N . $\square$

Теорема 3 показывает, что задача изучения биюнктивных функций сводится к задаче изучения подалгебр алгебры Ω_n .

Напомним (см. [7, стр. 101]), что применительно к рассматриваемому случаю *элементарной трансляцией* $(r + 1)$ -местной операции v_r называется унарная операция, полученная из исходной фиксацией любых r переменных произвольными значениями.

Теорема 4. *При $r \geq 2$ множество элементарных трансляций операции v_r совпадает с множеством*

$$T_n = \{ \tau_{\alpha\beta}(x) : V_n \rightarrow V_n, \tau_{\alpha\beta}(x) = \alpha x \oplus \beta, \alpha, \beta \in V_n, \alpha\beta = 0_n \}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную элементарную трансляцию

$$v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_r, x) : V_n \rightarrow V_n,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — фиксированные векторы. В соответствии с определением операции v_r верны равенства

$$\begin{aligned} v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_r, x) &= \alpha_1 \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_1 \alpha_r \vee \alpha_1 x \vee \dots \vee \alpha_r x = \\ &= (\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_r) x \vee \alpha_1 \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_1 \alpha_r \vee \dots \vee \alpha_{r-1} \alpha_r = \\ &= (\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_r) x \vee v_{r-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_r). \end{aligned}$$

Положим $\gamma = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_r, \beta = v_{r-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Тогда

$$v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_r, x) = \gamma x \vee \beta.$$

Теперь построим вектор $\alpha = \gamma(\beta \oplus 1_n)$. Ясно, что $\alpha\beta = 0_n$. При этом выполняется цепочка равенств

$$\alpha x \oplus \beta = \gamma(\beta \oplus 1)x \oplus \beta = (\gamma x) \oplus (\gamma x)\beta \oplus \beta = \gamma x \vee \beta.$$

Таким образом, показано, что $v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_r, x) \in T_n$.

Теперь докажем, что любое отображение из T_n является элементарной трансляцией. Пусть $\tau_{\alpha\beta} \in T_n$, $\alpha, \beta \in V_n$, $\alpha\beta = 0_n$. Построим такие векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, что $v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_r, x) = \alpha x \oplus \beta$.

В случае, когда $\alpha = 0_n$, положим $\alpha_1 = \beta, \dots, \alpha_r = \beta$. Тогда очевидно, что $\tau_{\alpha\beta}(x) \equiv \beta \equiv v_r(\beta, \dots, \beta, x)$.

Пусть $\alpha \neq 0_n$. Сначала рассмотрим случай $r = 2$. Положим $\alpha_1 = \beta, \alpha_2 = \alpha \vee \beta$. Тогда

$$\begin{aligned} v(\alpha_1, \alpha_2, x) &= v(\alpha \vee \beta, \beta, x) = (\alpha \vee \beta)x \oplus \beta x \oplus (\alpha \vee \beta)\beta = \\ &= (\alpha\beta \oplus \alpha \oplus \beta)x \oplus \beta x \oplus \beta = (\alpha \oplus \beta)x \oplus \beta x \oplus \beta = \alpha x \oplus \beta. \end{aligned}$$

Положив теперь $\alpha_3 = \dots = \alpha_r = 0$, получим, что $v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_r, x) = \alpha x \oplus \beta$. $\square$

Для числа элементарных трансляций верны следующие утверждения.

Утверждение 3. Для числа элементов множества T_n верно равенство $|T_n| = 3^n$.

Доказательство. Для подсчета числа элементарных трансляций достаточно посчитать количество таких пар (α, β) , что $\alpha, \beta \in V_n, \alpha\beta = 0_n$. Так как для разных пар (α, β) трансляции, очевидно, различны, то

$$|T_n| = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k = 3^n. \quad \square$$

Утверждение 4. Множество преобразований T_n образует относительно операции суперпозиции некоммутативную полугруппу с единицей, каждый элемент которой является идемпотентом.

Доказательство. Ассоциативность следует из ассоциативности операции композиции отображений. Докажем замкнутость:

$$\tau_{\alpha_1\beta_1}(\tau_{\alpha_2\beta_2}(x)) = \alpha_1(\alpha_2 x \oplus \beta_2) \oplus \beta_1 = \alpha_1\alpha_2 x \oplus (\alpha_1\beta_2 \oplus \beta_1) = \tau_{\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2 \oplus \beta_1}.$$

Единицей полугруппы является тождественное отображение $\tau_{1_n 0_n}$.

Идемпотентность следует из равенства

$$\tau_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}(x)) = \alpha(\alpha x \oplus \beta) \oplus \beta = \alpha x \oplus \alpha\beta \oplus \beta = \alpha x \oplus \beta. \quad \square$$

3. Эндоморфизмы алгебр Ω_n^r

Определим универсальную алгебру $\Psi_n = (V_n, T_n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно [7, с. 102] множество конгруэнций алгебры Ψ_n совпадает с множеством конгруэнций алгебры Ω_n^r .

Пусть $\phi: V_n \rightarrow V_n$ — преобразование множества V_n с координатными функциями $\phi_1, \dots, \phi_n$. Определим бинарные отношения $\varepsilon_{\phi_1}, \dots, \varepsilon_{\phi_n}$ на V_n по принципу: если $x, y \in V_n$, то $x \varepsilon_{\phi_i} y$ тогда и только тогда, когда $\phi_i(x) = \phi_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Также определим бинарное отношение $\varepsilon_\phi: x \varepsilon_\phi y$ тогда и только тогда, когда $\phi(x) = \phi(y)$. Фактически $\varepsilon_\phi = \varepsilon_{\phi_1} \cap \dots \cap \varepsilon_{\phi_n}$. Если ϕ — эндоморфизм алгебры Ω_n^r , то отношения $\varepsilon_\phi, \varepsilon_{\phi_1}, \dots, \varepsilon_{\phi_n}$ будут конгруэнциями на Ω_n^r . Следовательно, по замечанию 1, они будут конгруэнциями алгебры Ψ_n .

Лемма 1. Пусть $r \geq 2$, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n): V_n \rightarrow V_n$ — эндоморфизм алгебры Ω_n^r и существуют такие различные векторы $y, z \in V_n$, что $\phi(y) = \phi(z)$. Тогда если для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполнено условие $y(i) \neq z(i)$, то функции $\phi_1, \dots, \phi_n$ не зависят существенно от переменной x_i .

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$ и $y = (0, y(2), \dots, y(n))$, $z = (1, z(2), \dots, z(n))$. Предположим, что функция $\phi_j(x_1, \dots, x_n)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, существенно зависит от переменной x_1 . Тогда найдутся такие соседние векторы $\gamma = (0, \gamma(2), \dots, \gamma(n))$, $\gamma' = (1, \gamma(2), \dots, \gamma(n))$, что $\phi_j(\gamma) \neq \phi_j(\gamma')$. Так как ϕ — гомоморфизм Ω_n^r , то ε_ϕ — конгруэнция Ω_n^r . Следовательно, ε_{ϕ_j} — также конгруэнция Ω_n^r , а значит, и конгруэнция алгебры Ψ_n в силу сделанного выше замечания 1.

Так как $\phi(y) = \phi(z)$, то $y \varepsilon_\phi z$, откуда $y \varepsilon_{\phi_j} z$. Поэтому для любых $\alpha, \beta \in V_n$: $\alpha\beta = 0_n$ должно выполняться условие $\tau_{\alpha\beta}(y) \varepsilon_{\phi_j} \tau_{\alpha\beta}(z)$, т.е. $\phi_j(\tau_{\alpha\beta}(y)) = \phi_j(\tau_{\alpha\beta}(z))$. Положим $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, $\beta = \gamma$. Тогда

$$\tau_{\alpha\beta}(y) = \gamma, \quad \tau_{\alpha\beta}(z) = \gamma'$$

и

$$\phi_j(\tau_{\alpha\beta}(y)) = \phi_j(\gamma) \neq \phi_j(\tau_{\alpha\beta}(z)) = \phi_j(\gamma').$$

Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Обозначим полугруппу эндоморфизмов алгебры Ω_n^r через $\text{End}(\Omega_n^r)$. Через Ξ_n обозначим множество отображений $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : V_n \rightarrow V_n$, каждая из координатных функций $\phi_1, \dots, \phi_n$ которых существенно зависит не более, чем от одной переменной, и положим Ξ_n^0 — множество преобразований $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \Xi_n$, удовлетворяющих условию: если координатная функция ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, существенно зависит от одной переменной, то $\phi_i(0_n) = 0$. В частности, для таких групп преобразований пространства V_n , как симметрическая группа перестановок координат S_n и группа Джевонса Q_n , верны включения $Q_n \subset \Xi_n$, $S_n \subset \Xi_n^0$. Приводимая ниже теорема для случая $r = 2$ в некотором смысле обобщает полученный ранее результат автора (см. [8, теорема 2]).

Теорема 5. Пусть $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : V_n \rightarrow V_n$. Для того чтобы выполнялось условие $\phi \in \text{End}(\Omega_n)$, необходимо и достаточно, чтобы $\phi \in \Xi_n$. Получаемые при таких эндоморфизмах образы алгебры Ω_n будут подалгебрами Ω_n , изоморфными алгебрам $\Omega_0, \dots, \Omega_{n-1}, \Omega_n$, а их основные множества будут совпадать с множествами выполняющих векторов мультиаффинных биконъюнктивных функций.

Доказательство. Сначала докажем первую часть теоремы в прямую сторону. Пусть $\phi \in \text{End}(\Omega_n)$.

1. Сначала рассмотрим случай, когда $\phi(V_n) \neq V_n$. В этом случае должны существовать хотя бы два вектора с равными образами при действии преобразования ϕ . Обозначим эти векторы через y и z и, без ограничения общности, будем считать, что они различны по первой координате: $y = (0, y(2), \dots, y(n))$, $z = (1, z(2), \dots, z(n))$. По лемме 1 функции $\phi_1, \dots, \phi_n$ не зависят существенно от первой переменной. Не ограничивая общности доказательства, рассмотрим функцию $\phi_1(x_1, \dots, x_n)$. Предположим, что она существенно зависит хотя бы от двух переменных: x_2 и x_3 . Тогда найдутся две такие пары соседних векторов вида:

$$\begin{aligned} \gamma &= (\gamma(1), 0, \gamma(3), \gamma(4), \dots, \gamma(n)), \\ \gamma' &= (\gamma(1), 1, \gamma(3), \gamma(4), \dots, \gamma(n)), \\ \delta &= (\delta(1), \delta(2), 0, \delta(4), \dots, \delta(n)), \\ \delta' &= (\delta(1), \delta(2), 1, \delta(4), \dots, \delta(n)), \end{aligned}$$

что $\phi_1(\gamma) \neq \phi_1(\gamma')$, $\phi_1(\delta) \neq \phi_1(\delta')$. Поскольку x_1 — несущественная переменная ϕ_1 , можно считать, что $\gamma(1) = \delta(1) = 0$. Построим следующее множество векторов:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= (0, 0, \gamma(3), \gamma(4), \dots, \gamma(n)), \\ \gamma_1 &= (1, 0, \gamma(3), \gamma(4), \dots, \gamma(n)), \\ \gamma_2 &= (0, 1, \gamma(3), \gamma(4), \dots, \gamma(n)), \\ \gamma_3 &= (1, 1, \gamma(3), \gamma(4), \dots, \gamma(n)), \\ \delta_0 &= (0, \delta(2), 0, \delta(4), \dots, \delta(n)), \\ \delta_1 &= (1, \delta(2), 0, \delta(4), \dots, \delta(n)), \\ \delta_2 &= (0, \delta(2), 1, \delta(4), \dots, \delta(n)), \\ \delta_3 &= (1, \delta(2), 1, \delta(4), \dots, \delta(n)).\end{aligned}\tag{7}$$

Для этого набора векторов будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned}\phi_1(\gamma_0) &= \phi_1(\gamma_1) \neq \phi_1(\gamma_2) = \phi_1(\gamma_3), \\ \phi_1(\delta_0) &= \phi_1(\delta_1) \neq \phi_1(\delta_2) = \phi_1(\delta_3).\end{aligned}\tag{8}$$

Исходя из множества векторов (7) со свойством (8), построим такие наборы векторов $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, что

$$\alpha_1 \varepsilon_{\phi_1} \beta_1, \alpha_2 \varepsilon_{\phi_1} \beta_2, \alpha_3 \varepsilon_{\phi_1} \beta_3,\tag{9}$$

но

$$\phi_1(v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \neq \phi_1(v(\beta_1, \beta_2, \beta_3)).\tag{10}$$

Если $\gamma(3) = \delta(2) = c$, $c \in \{0, 1\}$, то (7) принимает вид:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= (0, 0, c, \gamma(4), \dots, \gamma(n)), \\ \gamma_1 &= (1, 0, c, \gamma(4), \dots, \gamma(n)), \\ \gamma_2 &= (0, 1, c, \gamma(4), \dots, \gamma(n)), \\ \gamma_3 &= (1, 1, c, \gamma(4), \dots, \gamma(n)), \\ \delta_0 &= (0, c, 0, \delta(4), \dots, \delta(n)), \\ \delta_1 &= (1, c, 0, \delta(4), \dots, \delta(n)), \\ \delta_2 &= (0, c, 1, \delta(4), \dots, \delta(n)), \\ \delta_3 &= (1, c, 1, \delta(4), \dots, \delta(n)).\end{aligned}\tag{11}$$

Пусть $\phi_1(\gamma_0) = \phi_1(\delta_0)$. Положим

$$\alpha_1 = \gamma_{2-2c}, \alpha_2 = \delta_{3-2c}, \alpha_3 = \gamma_{3c}, \beta_1 = \gamma_{2-2c}, \beta_2 = \gamma_{3-2c}, \beta_3 = \delta_{2c}.$$

Тогда верно неравенство

$$\phi_1(v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = \phi_1(\gamma_{1+2c}) \neq \phi_1(\gamma_{2-2c}) = \phi_1(v(\beta_1, \beta_2, \beta_3)).$$

Аналогично рассмотрим случай $\phi_1(\gamma_0) \neq \phi_1(\delta_0)$. В этом случае положим $\alpha_1 = \gamma_{1+2c}$, $\alpha_2 = \delta_{2-2c}$, $\alpha_3 = \delta_{3c}$ и при $c = 0$ положим $\beta_1 = \gamma_0$, $\beta_2 = \gamma_1$, $\beta_3 = \gamma_2$, а при $c = 1$ — $\beta_1 = \delta_0$, $\beta_2 = \delta_1$, $\beta_3 = \gamma_0$. Легко показать, что в обоих случаях

$$\phi_1(v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \neq \phi_1(v(\beta_1, \beta_2, \beta_3)).$$

Пусть теперь $c = \gamma(3) \neq \delta(2) = c \oplus 1$. Тогда, перегруппировав в (7), а затем и в (11) векторы δ_i , $i = 0, \dots, 3$, в порядке $\delta_2, \delta_3, \delta_0, \delta_1$ и соответствующим образом их переобозначив, дословно повторяем проведенные ранее рассуждения.

Во всех возможных случаях построены наборы векторов $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, для которых выполнены условия (9) и (10). Полученные противоречия показывают, что функция ϕ_1 не может существенно зависеть более чем от одной переменной.

2. Случай $\phi(V_n) = V_n$. Тогда ϕ — биекция, т. е. подстановка на множестве V_n . Построим следующий гомоморфизм. Положим

$$\hat{\phi}_i(x) = (0, \dots, 0, \phi_i(x), 0, \dots, 0) : V_n \rightarrow V_n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда очевидно, что $\hat{\phi}_i$ — эндоморфизм Ω_n , причем $\hat{\phi}_i(V_n) \neq V_n$. К такому гомоморфизму можно применить рассуждения шага 1 и получить, что функция ϕ_i существенно зависит не более чем от одной переменной. Так как эти рассуждения можно провести для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, то все координатные функции эндоморфизма ϕ существенно зависят не более, чем от одной переменной, что и требовалось доказать.

Первая часть теоремы доказана в прямую сторону. Докажем ее в обратную сторону.

3. Пусть $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : V_n \rightarrow V_n$ и каждая координатная функция $\phi_1, \dots, \phi_n$ существенно зависит не более чем от одной переменной. Докажем, что в этом случае ϕ — эндоморфизм алгебры Ω_n . Пусть

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in V_n, \quad \gamma_1 = \phi(\alpha_1), \quad \gamma_2 = \phi(\alpha_2), \quad \gamma_3 = \phi(\alpha_3).$$

Покажем, что

$$\phi(v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = v(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \quad (12)$$

Ввиду того что функция v действует по координатам, равенство (12) эквивалентно условию

$$\phi_j(v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = v(\gamma_1(j), \gamma_2(j), \gamma_3(j)) \quad (13)$$

для всякого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Поэтому достаточно доказать равенство (13) для одной координаты, например, первой. Пусть $\phi_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_i \oplus b_1$. Тогда

$$\gamma_1(1) = a_1 \alpha_1(i) \oplus b_1, \quad \gamma_2(1) = a_1 \alpha_2(i) \oplus b_1, \quad \gamma_3(1) = a_1 \alpha_3(i) \oplus b_1.$$

Если $a_1 = 0$, то $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = \gamma_3(1) = b_1$. Но в этом случае

$$\phi(v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))(1) = b_1 = v(\gamma_1(1), \gamma_2(1), \gamma_3(1)),$$

т. е. равенство (13) выполняется по первой координате. Пусть теперь $a_1 = 1$. Тогда $\gamma_1(1) = \alpha_1(i) \oplus b_1$, $\gamma_2(1) = \alpha_2(i) \oplus b_1$, $\gamma_3(1) = \alpha_3(i) \oplus b_1$. При $b_1 = 0$ равенство (13) также выполняется очевидным образом. Пусть $b_1 = 1$, т. е. $\gamma_1(1) = \alpha_1(i) \oplus 1$, $\gamma_2(1) = \alpha_2(i) \oplus 1$, $\gamma_3(1) = \alpha_3(i) \oplus 1$. Тогда в силу самодвойственности функции v получаем

$$\begin{aligned} v(\gamma_1(1), \gamma_2(1), \gamma_3(1)) &= v(\alpha_1(i) \oplus 1, \alpha_2(i) \oplus 1, \alpha_3(i) \oplus 1) = \\ &= v(\alpha_1(i), \alpha_2(i), \alpha_3(i)) \oplus 1 = \phi_1(v(\alpha_1(i), \alpha_2(i), \alpha_3(i))). \end{aligned}$$

Из проведенных рассуждений следует, что ϕ — эндоморфизм алгебры Ω_n . Первая часть теоремы полностью доказана.

Перейдем к доказательству второй части теоремы.

4. Пусть $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$. Ввиду доказанного в пунктах 1–3 будем считать, что

$$\phi_i(x_1, \dots, x_n) = a_i x_{r_i} \oplus b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ясно, что путем подходящей перестановки переменных преобразование $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ можно привести к виду

$$\phi(x) = xA \oplus \beta$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} P & P' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где P — подстановочная $m \times m$ -матрица для некоторого $m \leq n$, P' — $m \times k$ -матрица для некоторого $k \leq n - m$, содержащая ровно одну единицу в каждом столбце. При этом $m + k$ — число ненулевых коэффициентов a_i в правой части выражения для ϕ_i . Определим матрицу размера $n \times m$ вида $A' = \begin{pmatrix} P^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть π — подстановка, соответствующая матрице P . Построим отображение $\theta : \phi(V_n) \rightarrow V_m$ следующим образом:

$$\theta(x) = xA' \oplus \beta',$$

где $\beta' \in V_m$ и $\beta'(i) = \beta(\pi^{-1}(i))$, $i = 1, 2, \dots, m$. Поскольку данное отображение является аффинным отображением с матрицей ранга m , множество $\phi(V_n)$ — аффинное многообразие пространства V_n , то очевидно, что θ — биекция. Покажем, что это отображение является гомоморфизмом алгебр, т. е. для любых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \phi(V_n)$ выполняется свойство

$$\theta(v(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = v(\theta(\gamma_1), \theta(\gamma_2), \theta(\gamma_3)).$$

Как и в п. 3 настоящего доказательства, покажем, что для всякого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$\theta(v(y_1, y_2, y_3))(i) = v(\theta(y_1)(i), \theta(y_2)(i), \theta(y_3)(i)).$$

Если $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \phi(V_n)$, то для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in V_n$ выполнены равенства

$$\gamma_j(i) = \alpha_j(\pi(i)) \oplus b(i), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда для $i = 1, 2, \dots, m$ верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} & v(\theta(\gamma_1)(i), \theta(\gamma_2)(i), \theta(\gamma_3)(i)) = \\ & = v(\gamma_1(\pi^{-1}(i)) \oplus b(\pi^{-1}(i)), \gamma_2(\pi^{-1}(i)) \oplus b(\pi^{-1}(i)), \gamma_3(\pi^{-1}(i)) \oplus b(\pi^{-1}(i))) = \\ & = v(\gamma_1(\pi^{-1}(i)), \gamma_2(\pi^{-1}(i)), \gamma_3(\pi^{-1}(i))) \oplus b(\pi^{-1}(i)) = \\ & = v(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)(\pi^{-1}(i)) \oplus b(\pi^{-1}(i)) = \theta(v(\gamma_1(i), \gamma_2(i), \gamma_3(i))). \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что θ — гомоморфизм и, следовательно, изоморфизм.

5. Докажем последнюю часть теоремы: совпадение множества гомоморфных образов $\phi(V_n)$ с множествами выполняющих векторов мультиаффинных бионктивных функций. Рассмотрим множество $\phi(V_n)$. В самом деле, $y = (y(1), \dots, y(n)) \in \phi(V_n)$ тогда и только тогда, когда для некоторого вектора $(x(1), \dots, x(n)) \in V_n$ выполняется система равенств

$$\begin{cases} y(1) = a_1 x(r_1) \oplus b_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y(n) = a_n x(r_n) \oplus b_n. \end{cases} \quad (14)$$

Очевидно, что если $y_1, y_2, y_3 \in \phi(V_n)$, т. е. удовлетворяют системе (14), то и вектор $z = y_1 \oplus y_2 \oplus y_3$ также удовлетворяет системе (14). Поэтому, положив $\hat{f} = \hat{f}_{\phi(V_n)}$, получаем, что $\hat{f}$ — мультиаффинна по критерию мультиаффинности (см. [3]). Теперь рассмотрим вектор $u = v(y_1, y_2, y_3)$. Пусть

$y_1 = \phi(x_1)$, $y_2 = \phi(x_2)$, $y_3 = \phi(x_3)$. Тогда для произвольной координаты $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} u(i) &= y_1(i)y_2(i) \oplus y_2(i)y_3(i) \oplus y_1(i)y_3(i) = \\ &= (a_i x_1(r_i) \oplus b_i)(a_i x_2(r_i) \oplus b_i) \oplus (a_i x_2(r_i) \oplus b_i)(a_i x_3(r_i) \oplus b_i) \oplus \\ &\oplus (a_i x_1(r_i) \oplus b_i)(a_i x_3(r_i) \oplus b_i) = \\ &= a_i (x_1(r_i)x_2(r_i) \oplus x_2(r_i)x_3(r_i) \oplus x_1(r_i)x_3(r_i)) \oplus b_i = \\ &= a_i v(y_1(i), y_2(i), y_3(i)) \oplus b_i, \end{aligned}$$

т. е. $u = v(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3))$ и $u \in E_f$. Значит, по критерию биюнктивности, f — биюнктивна, и $f \in A \cap Bi$.

Обратно, пусть $f \in A \cap Bi$. Покажем, что найдется такой эндоморфизм ϕ , что $\phi(V_n) = E_f$. В силу доказанных выше утверждений достаточно найти такое отображение $\phi \in \Xi_n$, что $\phi(V_n) = E_f$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^k x_{s_i}^{a_i} \bigwedge_{j=1}^t (x_{p_{j,1}} \oplus x_{p_{j,2}} \oplus b_j)$ — мультиаффинная биюнктивная функция. Определим преобразование ϕ , положив

$$\begin{aligned} \phi_{s_i} &= a_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \phi_{p_{j,1}} &= x_{p_{j,1}}, \quad \phi_{p_{j,2}} = x_{p_{j,1}} \oplus b_j, \quad j = 1, 2, \dots, t, \\ \phi_k &= x_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus (\{s_1, \dots, s_k\} \cup \{p_{1,1}, \dots, p_{t,1}\} \cup \{p_{1,2}, \dots, p_{t,2}\}). \end{aligned}$$

Легко видеть, что всякий вектор из $\phi(V_n)$ является выполняющим для f , т. е. $\phi(V_n) \subset E_f$. С другой стороны, пусть $\gamma = (c_1, \dots, c_n) \in E_f$. Тогда рассмотрим такой вектор $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, что

$$\begin{aligned} b_{p_{j,1}} &= c_{p_{j,1}}, \quad j = 1, 2, \dots, t, \\ b_k &= c_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus (\{s_1, \dots, s_k\} \cup \{p_{1,1}, \dots, p_{t,1}\} \cup \{p_{1,2}, \dots, p_{t,2}\}). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\phi(\beta) = \gamma$ и, следовательно, $\phi(V_n) = E_f$. Теорема полностью доказана. $\square$

Следует отметить, что для числа гомоморфных образов алгебры Ω_n можно использовать как точные формулы С. П. Горшкова ([4]), так и асимптотику В. Н. Сачкова ([8]). Для алгебр Ω_n^r , $r \geq 3$, эндоморфизмы описывает следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n): V_n \rightarrow V_n$. Для того чтобы выполнялось условие $\phi \in \text{End}(\Omega_n^r)$, необходимо и достаточно, чтобы $\phi \in \Xi_n^0$. Получаемые при таких эндоморфизмах образы алгебры Ω_n^r являются подалгебрами Ω_n^r , изоморфными алгебрам $\Omega_0^r, \dots, \Omega_{n-1}^r, \Omega_n^r$.

Доказательство. Очевидно, что $\text{End}(\Omega_n^r) \supset \Xi_n^0$. Докажем прямое включение. Пусть $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \text{End}(\Omega_n^r)$. Проведем рассуждения первой части теоремы 5 вплоть до получения формул (8). Далее, на основании формул (7) и (8) существуют такие наборы векторов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}\}, \{\beta_1, \dots, \beta_{r+1}\}$, что $\alpha_1 \varepsilon_{\phi_1} \beta_1, \dots, \alpha_{r+1} \varepsilon_{\phi_1} \beta_{r+1}$, но $\phi_1(v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1})) \neq \phi_1(v_r(\beta_1, \dots, \beta_{r+1}))$. Указанные наборы строятся аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 5, с учетом равенств

$$\alpha_3 = \dots = \alpha_{r+1}, \quad \beta_3 = \dots = \beta_{r+1}.$$

Полученные противоречия показывают, что функция ϕ_1 не может существенно зависеть более чем от одной переменной и должна лежать в множестве Ξ_n .

Пусть функция ϕ_1 существенно зависит в точности от одной переменной. Покажем, что для этой функции выполняется равенство: $\phi_1(0_n) = 0$. Предположим противное: $\phi_1(0_n) = 1$. Без ограничения общности считаем, что $\phi_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus 1$. Рассмотрим векторы $\alpha_1 = \dots = \alpha_{r-1} = (10 \dots 0)$, $\alpha_r = \alpha_{r+1} = (0 \dots 0)$. В этом случае $v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}) = \alpha_1 = (10 \dots 0)$.

При этом $\phi_1(v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1})) = \phi_1(\alpha_1) = 0$. Однако, первая координата вектора $v_r(\phi(\alpha_1), \dots, \phi(\alpha_{r+1}))$, очевидно, равна 0. Поэтому $\phi(v_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1})) \neq v_r(\phi(\alpha_1), \dots, \phi(\alpha_{r+1}))$. Поэтому исходное предположение неверно, и $\phi \in \Xi_n^0$.

2. Оставшаяся часть теоремы доказывается аналогично пунктам 2–4 доказательства теоремы 5. $\square$

4. Свойства систем образующих подалгебр алгебры Ω_n

Обратимся теперь к некоторым свойствам систем образующих подалгебр алгебры Ω_n (случай $r = 2$) и исследуем зависимость между свойствами графов 2-КНФ биюнктивных функций и системами образующих соответствующих алгебр.

В работе [3] показано, что множество выполняющих векторов слабо положительной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ вида (3) образует нижнюю полурешетку, определяемую множеством неразложимых векторов R_f , где под неразложимыми векторами понимаются выполняющие векторы функции f , которые не представимы в виде покоординатной дизъюнкции других выполняющих векторов.

Теорема 7. Пусть $f \in WP$ не имеет имплицинт вида x_i^a , $1 \leq i \leq n$, $a \in \{0, 1\}$, $R_f \subset V_n$ — множество неразложимых векторов функции f . Тогда верно включение $E_f \subset \langle R_f \cup \{1_n\} \rangle$, обращающееся в равенство при $f \in WP \cap \bigcap Bi$. Если же $f \in WP \cap Bi$ и $1_n \in R_f$, то для некоторого $i \in 1, \dots, n$ выполняется условие

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq \bigwedge_{i \neq i} (\bar{x}_i \vee x_j). \quad (15)$$

Доказательство. Если $f \in WP$, то в соответствии с критерием слабой положительности (см. [3]) множество E_f замкнуто относительно покоординатной дизъюнкции, и, если $R_f = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, каждый ненулевой вектор $\beta \in E_f$ может быть представлен в виде $\beta = \alpha_{i_1} \vee \dots \vee \alpha_{i_s}$ для некоторых $s \in \{1, 2, \dots, t\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq t$. Кроме того, из условия теоремы следует, что $1_n \in E_f$. Поскольку $v(\alpha, \beta, 1_n) = \alpha \vee \beta$ для любых $\alpha, \beta \in V_n$, очевидно, что $E_f \subset \langle R_f \cup \{1_n\} \rangle$.

Если же $f \in WP \cap Bi$, то, поскольку $R_f \subset E_f$, верна цепочка включений $\langle R_f \rangle \subset E_f \subset \langle R_f \cup \{1_n\} \rangle$, и так как $1_n \in E_f$, то $E_f = \langle R_f \cup \{1_n\} \rangle$.

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть $R_f = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, $\alpha_t = 1_n$. Рассмотрим вектор $\beta = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_{t-1}$. Если $\beta = 1_n$, то получаем противоречие с условием неразложимости вектора 1_n . Следовательно, для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ $\beta(i) = 0$, откуда $\alpha_1(i) = \dots = \alpha_{t-1}(i) = 0$. Это означает, что единственным вектором множества E_f , имеющим единицу на i -й координате, является вектор 1_n , откуда и следует последнее утверждение теоремы. $\square$

Пусть биюнктивная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ задана своей 2-КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_{i2}}). \quad (16)$$

Определим множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. Для 2-КНФ вида (16) определим ориентированный граф $G = (V, \varepsilon)$:

$$V = X \cup \bar{X}, \quad \varepsilon = \{(x_{s_{i1}}^{a_{i1} \oplus 1}, x_{s_{i2}}^{a_{i2}}), (x_{s_{i2}}^{a_{i2} \oplus 1}, x_{s_{i1}}^{a_{i1}}), i = 1, \dots, t\}. \quad (17)$$

Известен следующий результат, полученный Тарьяном. Одно из его доказательств приведено в [6].

Теорема 8 ([6]). Элементарная дизъюнкция $x_i^a \vee x_j^b$ является простой имплицинтной функции f , заданной 2-КНФ (2), тогда и только тогда, когда в графе G , заданном (17), существуют пути из вершины $x_i^{a \oplus 1}$ в вершину x_j^b и из вершины $x_j^{b \oplus 1}$ в вершину x_i^a .

Напомним, что класс $WP \cap WN$ является подклассом класса Bi , содержащим функции вида

$$f \equiv \left(\big\&_{i=1}^{t_1} x_{s_i}^{a_i} \right) \wedge \left(\big\&_{i=l_1+1}^t (\bar{x}_{s_{i1}}^\vee x_{s_{i2}}) \right).$$

При этом множество выполняющих векторов E_f такой функции образует дистрибутивную решетку. Для такой решетки можно сравнительно легко описать как множества неразложимых векторов R_f , так и множества конеразложимых векторов $co - R_f$. Наиболее наглядно эти множества описываются, если функция f не имеет аффинных имплицентов. В этом случае ее можно записать в виде

$$f \equiv \big\&_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i1}} \vee x_{s_{i2}}), \quad (18)$$

причем все имплиценты в правой части (17) простые.

В графе 2-КНФ такой функции нет дуг, соединяющих вершины множеств X и $\bar{X}$, и можно рассматривать его подграф G_1 , порожденный множеством вершин X : $G_1 = G(f)(X)$. Множество дуг такого графа обозначим через ε_1 . В дальнейшем считаем, что данный граф является графом минимальной 2-КНФ. В соответствии с результатами статьи [6], отсутствие аффинных имплицентов функции $f(x_1, \dots, x_n)$ гарантирует отсутствие контуров в графе G_1 и, соответственно, сильно связанных компонент. Минимальность КНФ (17) означает, в свою очередь, что в графе G_1 нет дуг, соединяющих начала и концы путей длины не меньше 2.

Лемма 2. Пусть $f \in WP \cap WN$ и граф G_1 не имеет сильно связанных компонент. Тогда множество R_f состоит из $n + 1$ векторов $R_f = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, где $\alpha_0 = 0_n$, а векторы α_i , $i = 1, \dots, n$, построены по принципу $\alpha_i(i) = 1$ и $\alpha_i(j) = 1$ для всех таких j , что вершина x_j достижима из вершины x_i , т. е. в графе G_1 существует ориентированный путь из вершины x_i в вершину x_j .

Доказательство. Воспользуемся результатами из статьи [3]. Поскольку $WP \cap WN \subset WP$, множество E_f , являющееся решеткой, является, в частности, нижней полурешеткой. Для нахождения множества R_f воспользуемся описанным в указанной работе подходом. В соответствии с результатом [3] верно равенство

$$R_f \setminus \{0_n\} = \bigcup_{i=1}^n \phi_i^{-1} \left(W_{f_i^1} \right),$$

где $W_{f_i^1}$ — множество нижних единиц подфункции f_i^1 функции f , а

$$\phi_i^{-1}(W) = \{(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_i, \dots, a_{n-1}) : (a_1, \dots, a_{n-1}) \in W \subset V_{n-1}\}.$$

Опишем множество $W_{f_i^1}$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть, без ограничения общности, $i = 1$. Перепишем (18) в следующем виде:

$$f \equiv \bigotimes_{i=1}^k (\bar{x}_1 \vee x_{s_i}) \bigotimes_{i=k+1}^m (\bar{x}_{s_i} \vee x_1) h(x_2, \dots, x_n), \quad (19)$$

где $h(x_2, \dots, x_n) \in WP \cap WN$. Тогда $f_1^1 \equiv \bigotimes_{i=1}^k x_{s_i}^h(x_2, \dots, x_n)$. Если $b = (b_2, \dots, b_n) \in E_{f_1^1}$, то

$$b_{s_1} = \dots = b_{s_k} = 1. \quad (20)$$

Поскольку $h(0, \dots, 0) = 1$, для построения нижних единиц необходимо описать все векторы из E_h , удовлетворяющие условию (20).

Из теоремы 8 следует, что если $\beta = (b_2, \dots, b_n) \in E_{f_1^1}$ и выполнено (20), то для всякого такого j , что вершина x_j достижима из одной из вершин $x_{s_1}, \dots, x_{s_k}$, должно выполняться условие $b_j = 1$. Если же вершина x_j достижима хотя бы из одной из вершин $x_{s_1}, \dots, x_{s_k}$, но $b_j = 0$, то вектор $\beta = (b_2, \dots, b_n) \notin E_{f_1^1}$. Следовательно, определенный выше вектор β будет единственной нижней единицей f_i^1 , а вектор $\phi_1^{-1}(\beta) = (1, b_2, \dots, b_n)$ — неразложимым вектором решетки E_f .

Утверждение 5. Пусть $f \in WP \cap WN$ и граф $G(f)(X)$ не имеет сильно связанных компонент. Положим $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 \oplus 1, \dots, x_n \oplus 1) \in WP \cap WN$. Тогда множества неразложимых и конеразложимых векторов функций f и g связаны соотношениями

$$R_f = (co - R_g) \oplus 1_n, \quad co - R_f = R_g \oplus 1_n.$$

Доказательство. Заметим, что $E_g = E_f \oplus 1_n$. Далее, если $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k} \in R_f$ для $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ и $\alpha_{i_1} \vee \dots \vee \alpha_{i_k} = \beta \in E_f$, то $(\alpha_{i_1} \oplus 1_n) \wedge \dots \wedge (\alpha_{i_k} \oplus 1_n) = \beta \oplus 1_n \in E_g$, и наоборот. $\square$

В силу того что граф G_1 функции вида (19) не имеет сильно связанных компонент, для каждой его вершины x_i , $i = 1, \dots, n$, можно рассмотреть подграф $T(x_i)$, построенный на вершинах, достижимых из x_i . Данный граф, очевидно, имеет единственную начальную вершину x_i и не имеет контуров.

Теорема 9. Пусть выполнены условия леммы 2 и для некоторой вершины x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, графа G_1 полустепень захода $\deg^+(x_i)$ удовлетворяет условию $\deg^+(x_i) \geq 2$. Тогда если в графе существуют такие вершины x_j, x_k , что $(x_j, x_i), (x_k, x_i) \in \epsilon_1$, и при этом выполнено условие $T(x_j) \cap T(x_k) = T(x_i)$, то $\langle R_f \rangle = \langle R_f \setminus \{\alpha_i\} \rangle$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\alpha_i = v(\alpha_j, \alpha_k, 0_n)$. Без ограничения общности положим $j = 1, k = 2, i = 3$. Тогда

$$\alpha_1 = (1, 0, 1, \dots), \alpha_2 = (0, 1, 1, \dots), \alpha_3 = (0, 0, 1, \dots).$$

При этом все вершины, достижимые из α_3 , будут достижимыми из вершин α_1, α_2 . Это означает, что если $\alpha_3(m) = 1$, то $\alpha_1(m) = \alpha_2(m) = 1$, $m = 1, 2, \dots, n$. Пусть $\alpha_3(m) = 0$ для некоторого m , $4 \leq m \leq n$. Так как $T(x_j) \cap T(x_k) = T(x_i)$, то выполняется свойство $\alpha_1(m) \& \alpha_2(m) = 0$. Из проведенных рассуждений вытекает, что $\alpha_3 = v(\alpha_1, \alpha_2, 0_n)$, откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Доказанная теорема дает возможность дальнейших исследований по построению минимальных систем образующих подалгебр алгебры Ω_n .

Список литературы

1. Schaefer T. Complexity of satisfiability problems. — Proc. 10th Annu. ACM Symp. theory of computing machinery, 1978, p. 216–226.
2. Горшков С. П. Применение теории NP-полных задач для оценки сложности решения систем булевых уравнений. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 1995, т. 2, вып. 3, с. 325–398.
3. Горшков С. П. О сложности распознавания мультиаффинности, биконкативности, слабой положительности и слабой отрицательности булевых функций. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 1997, т. 4, вып. 2, с. 216–237.
4. Горшков С. П. О пересечениях классов мультиаффинных, биконкативных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 1997, т. 4, вып. 2, с. 238–259.
5. Горшков С. П., Тарасов А. В. Теоретико-сложностной подход к оценке сложности решения систем булевых уравнений. — Матер. 4-й Междунар. научн. конф. по пробл. безопасн. и противодействия терроризму (МаБИТ-2008), МГУ, 2008, т. 2, с. 36–45.

6. *Тарасов А. В.* О свойствах функций, представимых в виде 2-КНФ. — Дискретная математика, 2001, т. 13, вып. 4, с. 99–115.
7. *Кон П.* Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
8. *Горишков С. П., Тарасов А. В.* О максимальных группах инвариантных преобразований мультиаффинных, биконкативных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций. — Дискретная математика, 2009, т. 21, вып. 2, с. 94–101.
9. *Сачков В. Н.* Разбиения с поглощениями и противоречивые разбиения множеств. — Труды по дискретной математике, т. 4, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, с. 201–222.
10. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982.