Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Шуваев, Вычисление распределения одной комбинаторной статистики, заданной на последовательностях с фиксированным составом знаков, *Матем. вопр. криптогр.*, 2011, том 2, выпуск 3, 99–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk38>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 11:15:16

УДК: 519.12, 519.1:519.21

Вычисление распределения одной комбинаторной статистики, заданной на последовательностях с фиксированным составом знаков

Д. В. Шуваев

Лаборатория ТВП, Москва

Получено 10.V.2010

Для конечной целочисленной последовательности α рассматривается число $X(\alpha)$ чтений α слева направо, необходимое для обращения ко всем элементам последовательности в порядке неубывания. Получены формулы для вычисления точного распределения $X(\alpha)$, когда α равномерно распределена на множестве всех перестановок n заданных чисел.

Ключевые слова: число чтений, цепь Маркова

Computing the distribution of a combinatorial statistics defined on permutations of a given multiset

D. V. Shuvaev

TVP Laboratory, Moscow

Abstract. For a finite integer sequence α we consider the number $X(\alpha)$ of readings of α from left to right necessary to count all elements of the sequence in a nondecreasing order. We describe a method to calculate the distribution of $X(\alpha)$ exactly when α is uniformly distributed on the set of all permutations of n given numbers.

Key words: number of readings, Markov chain

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2011, vol. 2, no. 3, pp. 99–109 (Russian).

Говорят, что конечная числовая последовательность имеет s чтений, если ее нужно просмотреть s раз слева направо, чтобы в порядке неубывания вычеркнуть все ее элементы. Элементы, вычеркиваемые в ходе одного просмотра слева направо, образуют одно чтение. Таким образом, вся последовательность разбивается на чтения. Ясно, что совпадающие элементы последовательности принадлежат одному чтению. Вместе с тем чтение может содержать несовпадающие элементы. Пример: последовательность 3, 5, 3, 4, 1, 5, 2 содержит три чтения — (1, 2), (3, 3, 4), (5, 5).

Вопрос о распределении числа чтений в случайной последовательности связан, в частности, с задачами о сортировке, см., например [3]. Наиболее полно исследовано распределение числа чтений в случайной равновероятной перестановке порядка n . Нетрудно проверить, что число чтений перестановки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ на единицу превосходит число убываний в обратной перестановке, т. е. число выполненных соотношений в следующем ряду: $(\beta_1 > \beta_2), (\beta_2 > \beta_3), \dots, (\beta_{n-1} > \beta_n)$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \alpha^{-1}$. Имея в виду, что убывания разбивают последовательность (перестановку) на отрезки неубывания (отрезки возрастания), можно сказать, что число чтений перестановки равно числу отрезков возрастания в обратной перестановке.

Перечисление перестановок по числу убываний описывается так называемыми числами Эйлера $A_{n,k}$, $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$ [6, с. 55]. Именно, число $A_{n,k}$ равно числу перестановок степени n , имеющих ровно $k - 1$ убывание. Числа Эйлера можно определить следующим способом:

$$\begin{aligned} A_{1,k} &= \chi\{k = 1\}, \\ A_{n,k} &= kA_{n-1,k} + (n - k + 1)A_{n-1,k-1} \quad (n \geq 2, 1 \leq k \leq n), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь и далее χ — индикатор события, стоящего в скобках: $\chi\{B\} = 1$, если B истинно, $\chi\{B\} = 0$, если B ложно.

Указанную формулу, а также другие способы задания чисел Эйлера, можно найти в книгах [3–5]. Асимптотические свойства чисел Эйлера описаны в [5, 17]. Для случайной равновероятной перестановки известны совместные распределения числа чтений и числа убываний, числа чтений и числа инверсий, числа чтений и числа инверсий в обратной перестановке, числа чтений и так называемого мажорирующего индекса перестановки [9, 16].

Общий случай, когда случайная последовательность может содержать совпадающие элементы, несколько сложнее. Перечисление последовательностей с заданным составом знаков по числу убываний составляет так называемую задачу С. Ньюкомба, ее решение можно найти в [4, 8]. В отличие от случайных перестановок, для случайных последовательностей распределение

числа отрезков невозрастания и распределение числа чтений могут не совпадать.

В работах [1, 2] исследованы асимптотические свойства распределений числа чтений для некоторых классов случайных последовательностей, в том числе для последовательностей с заданным составом знаков. Настоящая работа посвящена задаче точного вычисления распределения числа чтений в случайной последовательности с фиксированным составом знаков.

Пусть $1 < m \leq n$, $M = \{1, 2, \dots, m\}$. Таким образом, M^n — это множество последовательностей длины n , составленных из элементов множества M .

Обозначим через $S[s]$ подмножество M^n , состоящее из последовательностей со спецификацией $[s] = [s_1, s_2, \dots, s_m]$, т.е. состоящих из s_1 единиц, s_2 двоек, ..., s_m чисел m , где $n = s_1 + \dots + s_m$. Обозначим $X(\alpha)$ число чтений в последовательности α . Всюду далее считаем, что последовательность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ случайно равномерно выбирается из множества $S[s]$. Нас интересует распределение случайной величины $\xi_{[s],m} = X(\alpha)$.

Для нахождения распределения $\xi_{[s],m}$ мы рассмотрим вложение процесса построения последовательности α в многомерную неоднородную цепь Маркова. Основная идея рассматриваемого подхода состоит в следующем. В начальный момент последовательность состоит из одного элемента, а далее каждая последовательность получается из предыдущей вставкой очередного элемента. Все размещаемые элементы предварительно упорядочены, поэтому на каждом шаге можно выразить переходные вероятности цепи через соотношения в спецификации. В работе [10] этот метод назван *Finite Markov Chain Imbedding Approach*, а в книге [14] можно найти его подробное изложение. Ранее указанный метод позволил получить формулы для вычисления распределений ряда комбинаторных статистик, заданных на последовательностях с фиксированным составом: числа возрастаний [11], числа отрезков убывания [13], числа пар соседних элементов последовательности, имеющих вид $(i, i + 1)$ [15], вектора, состоящего из чисел возрастаний, убываний и уровней [12].

Опишем процедуру, приводящую к построению равновероятной последовательности α со спецификацией $[s]$, подробно. Возьмем набор $\text{Set}[s]$ спецификации $[s] = [s_1, s_2, \dots, s_m]$. Введенное выше множество $S[s]$ — это все последовательности, которые можно составить из всего набора $\text{Set}[s]$. Элементы множества $S[s]$ будем записывать в виде строк: $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$. Если $[s] = [1^n] = [1, \dots, 1]$, то $m = n$ и $S[s] = S_n$.

Для $t = 1, \dots, n$ определим числа

$$\tilde{k}_t = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \left| \sum_{i=1}^k s_i \geq t \right. \right\}, \quad \tilde{s}_t = t - \sum_{i=1}^{\tilde{k}_t-1} s_i.$$

Иначе говоря, если набор $\text{Set}[s]$ упорядочить по возрастанию, то на месте с номером t окажется $\tilde{s}_t$ -й экземпляр знака $\tilde{k}_t$.

Случайная последовательность α строится за n шагов в результате размещения в одной строке знаков, выбираемых из набора $\text{Set}[s]$ в порядке неубывания. При этом $\tilde{s}_t$ -й экземпляр знака $\tilde{k}_t$ размещается на шаге t вставкой в один ряд с $t-1$ ранее размещенными элементами на любое из t мест (включая места слева и справа от всех) с вероятностью $1/t$, $t = 1, \dots, n$. После шага t оказываются размещенными t знаков, а именно все знаки, меньшие $\tilde{k}_t$, а также $\tilde{s}_t$ экземпляров знака $\tilde{k}_t$. Набор знаков, размещенных на шагах с первого по t -й, обозначим $\text{Set}_t[s]$.

Множество всех последовательностей, которые можно составить из всего набора $\text{Set}_t[s]$, обозначим $\Pi_t[s]$, а сами последовательности из $\Pi_t[s]$ будем записывать в виде строк: $\pi_t = (\pi_t(1), \dots, \pi_t(t))$.

Ясно, что $\Pi_n[s] = S[s]$. Строка π_n , полученная после размещения последнего n -го элемента, — это и есть интересующая нас последовательность α , причем по построению все ее $n! / \prod_{j=1}^m s_j!$ возможных реализаций имеют равные вероятности. Таким образом, в процедуре построения последовательности α участвуют последовательность наборов $\{\text{Set}_t[s]\}_{t=1}^n$, последовательность множеств $\{\Pi_t[s]\}_{t=1}^n$ и случайная последовательность строк $\{\pi_t\}_{t=1}^n$. Образует случайную последовательность $\{X_t\}$, $X_t = X(\pi_t)$, где, напомним, $X(\pi_t)$ — число чтений строки $\pi_t \in \Pi_t[s]$, $t = 1, \dots, n$. Заметим, что $\xi_{[s],m} = X_n$.

Последовательность $\{X_t\}$ еще не является цепью Маркова. Чтобы построить цепь Маркова, введем две вспомогательные случайные последовательности $\{V_t\}$ и $\{W_t\}$, значения которых на шаге t указывают левую и правую границы расположения знаков $\tilde{k}_t$ в пределах соответствующего чтения. Дадим необходимые определения.

Пусть $1 \leq t \leq n$. Рассмотрим последнее в ходе построения последовательности π_t чтение, т. е. подпоследовательность $\pi_t(i_1), \dots, \pi_t(i_r)$, элементы которой в соответствующем порядке образуют чтение последовательности π_t и содержат последний размещенный элемент: $\max(\pi_t(i_1), \dots, \pi_t(i_r)) = \tilde{k}_t$.

Положим

$$V(\pi_1) = 0, \quad W(\pi_1) = 1,$$

$$V(\pi_t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \pi_t(i_1) = \dots = \pi_t(i_r) = \tilde{k}_t, \\ \max\{i_j \mid \pi_t(i_j) < \tilde{k}_t, j = 1, \dots, r\} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$W(\pi_t) = \max\{i \mid \pi_t(i) = \tilde{k}_t, i = 1, \dots, t\},$$

и образуем случайные величины $V_t = V(\pi_t)$, $W_t = W(\pi_t)$.

Событие $\{V_t = 0\}$ состоит в том, что рассматриваемое последнее чтение перестановки π_t не содержит знаков, отличных от $\tilde{k}_t$. В противном случае знаки $\tilde{k}_t$ располагаются в строке π_t правее места с номером V_t , а все другие знаки последнего чтения располагаются на местах с номерами не больше V_t , причем место с номером V_t обязательно занято.

По построению набор (X_t, V_t, W_t) принимает значения из множества

$$\Omega_t = \{(x, v, w), x = 1, 2, \dots, \min(t, m), 0 \leq v < w \leq t\}.$$

Таким образом, построены отображения $T_t: \Pi_t[s] \rightarrow \Omega_t$, $t = 1, \dots, n$, вида

$$T_t(\pi_t) = (X_t, V_t, W_t) = (X(\pi_t), V(\pi_t), W(\pi_t)).$$

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^{\omega_t}$ размерности $\omega_t = |\Omega_t|$. Единичным координатным векторам в пространстве $\mathbb{R}^{\omega_t}$ можно взаимно однозначно сопоставить элементы множества Ω_t . С учетом такого соответствия элементы $(x, v, w) \in \Omega_t$ можно рассматривать как векторы в пространстве $\mathbb{R}^{\omega_t}$. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть для $t = 1, \dots, n$ множество $\Pi_t[s]$ состоит из всех перестановок набора $\text{Set}_t[s]$. Тогда

(i) последовательность $\{T_t\}_{t=1}^n$ есть (неоднородная) конечная цепь Маркова на последовательности пространств состояний $\{\Omega_t\}_{t=1}^n$ с матрицами переходных вероятностей $\mathbf{M}_t = [P_{(x,v,w),(x',v',w')}(t)]$, где для всех пар $(x, v, w) \in \Omega_{t-1}$ и $(x', v', w') \in \Omega_t$

$$P_{(x,v,w),(x',v',w')}(t) = \mathbf{P}\{T_t = (x', v', w') \mid T_{t-1} = (x, v, w)\} =$$

$$= \begin{cases} \begin{array}{ll} \text{либо} & x' = x, v' = w, w < w' \leq t, \tilde{s}_t = 1, \\ \frac{1}{t}, & \text{если} \text{ либо} & x' = x + 1, v' = 0, 1 \leq w' \leq w \leq t, \tilde{s}_t = 1, \\ & \text{либо} & x' = x, v' = v, w + 2 \leq w' \leq t, \tilde{s}_t > 1, \\ \frac{w-v+1}{t}, & \text{если} & x' = x, v' = v, w' = w + 1, \tilde{s}_t > 1, \\ \frac{v}{t}, & \text{если} & x' = x + 1, v' = 0, w' = w + 1, \tilde{s}_t > 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{array} \end{cases}$$

(ii) *распределение случайной величины $\xi_{[s],m} = X_n$ выражается формулой*

$$\mathbf{P}\{X_n = r\} = \left(\prod_{t=2}^n \mathbf{M}_t \right) U(r),$$

где вектор-столбец $U(r)$ равен сумме векторов пространства $\mathbb{R}^{\omega_t}$, отвечающих элементам $(r, v, w) \in \Omega_n$, $0 \leq v < w \leq n$.

Доказательство. На первом шаге в строке единственным образом размещается самый младший элемент набора $\text{Set}[s]$, который и составляет единственное чтение: $\mathbf{P}\{T_1 = (1, 1, 1)\} = 1$. Рассмотрим последующие шаги $t = 2, \dots, n$; пусть $T_{t-1} = (x, v, w) \in \Omega_{t-1}$, $T_t = (x', v', w') \in \Omega_t$. На шаге t должен быть размещен $\tilde{s}_t$ -й экземпляр знака $\tilde{k}_t$, причем всего существует t равновероятных вариантов размещения.

Рассмотрим ситуацию, когда $\tilde{s}_t = 1$, т.е. среди $t - 1$ ранее размещенных знаков нет знаков $\tilde{k}_t$, а размещаемый знак превосходит все ранее размещенные. По определению W_t полагается равным номеру места в строке π_t , занимаемого на шаге t . При размещении знака $\tilde{k}_t$ правее места с номером W_{t-1} не возникает новое чтение, а при размещении на место с номером W_{t-1} или левее — возникает. Соответствующая переходная вероятность при размещении правее места с номером $W_{t-1}(\pi_{t-1})$ равна

$$\mathbf{P}\{T_t = (x, w, l) | T_{t-1} = (x, v, w)\} = 1/t, l = w + 1, \dots, t,$$

а в противном случае

$$\mathbf{P}\{T_t = (x + 1, 0, l) | T_{t-1} = (x, v, w)\} = 1/t, l = 1, \dots, w.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\tilde{s}_t > 1$, т.е. среди $t - 1$ ранее размещенных знаков уже имеется $\tilde{s}_t - 1 \geq 0$ знаков $\tilde{k}_t$. В этой ситуации важно, образовали ранее размещенные знаки $\tilde{k}_t$ новое чтение перестановки π_{t-1} или

нет. Рассмотрим сначала случай, когда ранее размещенные знаки $\tilde{k}_t$ не образовали нового чтения; он характеризуется условием $V_{t-1} > 0$. При этом если очередной знак $\tilde{k}_t$ размещается на место с номером V_{t-1} или левее, то образуется новое чтение, а номер места самого правого знака $\tilde{k}_t$ увеличивается на единицу. Соответствующая переходная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{T_t = (x + 1, 0, w + 1) | T_{t-1} = (x, v, w)\} = v/t.$$

Если очередной знак $\tilde{k}_t$ размещается либо между местами с номерами V_{t-1} и W_{t-1} , либо на место с номером W_{t-1} или $W_{t-1} + 1$, то новое чтение не образуется, а номер самого правого из размещенных знаков $\tilde{k}_t$ увеличивается на единицу. Соответствующая переходная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{T_t = (x, v, w + 1) | T_{t-1} = (x, v, w)\} = (w - v + 1)/t.$$

Если очередной знак $\tilde{k}_t$ размещается правее места с номером W_{t-1} , но не рядом с ним, то новое чтение не образуется. При этом размещаемый знак оказывается правее всех ранее размещенных знаков $\tilde{k}_t$, и номер его места присваивается величине W_t . Соответствующая переходная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{T_t = (x, v, l) | T_{t-1} = (x, v, w)\} = 1/t, \quad l = w + 2, \dots, t.$$

Рассмотрим теперь два случая, когда ранее размещенные знаки $\tilde{k}_t$ уже образовали новое чтение, или, что то же самое, $V_{t-1} = 0$. Если очередной знак $\tilde{k}_t$ размещается на место с номером W_{t-1} , либо слева, либо на место с номером $W_{t-1} + 1$, то новое чтение не образуется. При этом номер самого правого из ранее размещенных знаков $\tilde{k}_t$ увеличивается на единицу. Соответствующая переходная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{T_t = (x, 0, w + 1) | T_{t-1} = (x, 0, w)\} = (w + 1)/t.$$

Если очередной знак $\tilde{k}_t$ размещается правее места с номером W_{t-1} , но не рядом с ним, то новое чтение не образуется. При этом размещаемый знак оказывается правее всех ранее размещенных знаков $\tilde{k}_t$, и номер его места присваивается величине W_t . Соответствующая переходная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{T_t = (x, 0, l) | T_{t-1} = (x, 0, w)\} = 1/t, \quad l = w + 2, \dots, t.$$

Объединяя все рассмотренные случаи, получаем утверждение (i) теоремы. Утверждение (ii) следует из уравнения Колмогорова – Чепмена.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказанная теорема позволяет непосредственно написать выражения для моментов $\mathbf{E}\{X_n^k\}$ и производящей функции $G_{X_n}(z)$. Положив

$$F(k) = \sum_{r=1}^m r^k U(r) \text{ и } G(z) = \sum_{r=1}^m z^r U(r),$$

получим

$$\mathbf{E}\{X_n^k\} = \theta_1 \left(\prod_{t=2}^n \mathbf{M}_t \right) F(k) \text{ и } G_{X_n}(z) = \theta_1 \left(\prod_{t=2}^n \mathbf{M}_t \right) G(z).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При спецификации $[s] = [1, 1, \dots, 1]$ последовательность α является перестановкой. В этом случае вычисления в соответствии с утверждением (i) теоремы 1 происходят аналогично вычислению чисел Эйлера по рекуррентному закону (1).

Для сравнения рассмотрим некоторые результаты, полученные ранее. В работе [2] приведены формулы для математического ожидания и дисперсии случайной величины $\xi_{[s],m}$:

$$\mathbf{E}\xi_{[s],m} = m - \sum_{r=1}^{m-1} h_r, \quad \mathbf{D}\xi_{[s],m} = \sum_{r=1}^{m-1} h_r(1 - h_r) + 2 \sum_{k=1}^{m-2} (h_{r,r+1} - h_r h_{r+1}), \quad (2)$$

и доказано неравенство

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\xi_{[s],m} - \mathbf{E}\xi_{[s],m}}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_{[s],m}}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| \leq \frac{cH}{(\mathbf{D}\xi_{[s],m})^{3/2}},$$

где $c < \infty$ — некоторая абсолютная константа, $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения,

$$H = \sum_{r=1}^{m-1} h_r(1 - h_r) \left(1 - 2h_r + 2h_r^2 \right), \quad (3)$$

$$h_r = \frac{s_r! s_{r+1}!}{(s_r + s_{r+1})!}, \quad h_{r,r+1} = \frac{s_r! s_{r+1}! s_{r+2}!}{(s_r + s_{r+1} + s_{r+2})!}.$$

Отметим случай равносоставленной последовательности: $s_1 = s_2 = \dots = s_m$. Из (2) и (3) видно, что в этом случае $H = O(m)$, $\mathbf{D}\xi_{[s],m} = O(m)$ при $s_1 = \text{const}$, $m \rightarrow \infty$, и из указанного неравенства следует асимптотическая нормальность $\xi_{[s],m}$.

В работе [1] исследована случайная величина $\zeta_{n,m}$ — число чтений в случайной последовательности, равномерно распределенной на множестве M^n . В частности, показано, что если $m, n \rightarrow \infty$ так, что $ne^{-n/m} \rightarrow \lambda \in [0, \infty)$, то для любого фиксированного $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{n,m} = k\} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

и установлена асимптотическая нормальность $\zeta_{n,m}$ в случае, когда m растет еще быстрее: $ne^{-n/m} \rightarrow \infty$. Заметим, что при конечных значениях m и n распределение случайной величины $\zeta_{n,m}$ выражается через числа (1) известной формулой (см. также [3, раздел 5.1.3])

$$\mathbf{P}\{\zeta_{n,m} = k\} = \frac{A_{n,k}}{m^n} \binom{m+n-k}{n}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4)$$

Сопоставление распределений $\xi_{[s],m}$ и $\zeta_{n,m}$ показывает, что спецификация последовательности существенно влияет на распределение числа чтений.

ПРИМЕР 1. В таблице 1 с точностью до трех значащих цифр приведены два распределения числа чтений в последовательности длины 48 над алфавитом $1, 2, \dots, 16$. В первом случае последовательность равномерно выбирается из последовательностей спецификации $[3, 3, \dots, 3]$ (равносоставленных последовательностей), а распределение вычислено на компьютере в соответствии с теоремой 1. Во втором случае последовательность равномерно выбирается из всех 16^{48} вариантов, а распределение вычислено по формуле (4). Для иллюстрации в последней колонке приводятся асимптотические оценки вероятностей для случая равносоставленной последовательности — значения $\int_{(x-1, x]} \Phi_{(2)}(dt)$, где x — число чтений, $\Phi_{(2)}(t)$ — функция нормального распределения с параметрами, вычисленными по формулам (2): математическое ожидание $61/4$, дисперсия $791/1200$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Мощность множества Ω_n равна $\omega_n = \min(n, m) \times n(n+1)/2$, что существенно меньше числа $n! / \prod_{j=1}^m s_j!$ различных последовательностей из $S[s]$. Вычисление распределения числа чтений при помощи теоремы 1 требует не более $O(\omega_n^3)$ операций. Для приведенного примера вычисления заняли около 0,1 секунды работы компьютера с процессором Pentium-III и тактовой частотой 1 ГГц.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В условиях теоремы 1 значение W_t указывает правую границу последнего на шаге t чтения. Нетрудно увидеть, что наборы

Таблица 1

Число чтений	Вероятности		
	для равносостав- ленной последо- вательности	для равновероят- ной последова- тельности	асимптотические оценки
1	$2.27 \cdot 10^{-49}$	$1.94 \cdot 10^{-44}$	
2	$2.13 \cdot 10^{-35}$	$1.30 \cdot 10^{-30}$	
3	$2.01 \cdot 10^{-27}$	$8.34 \cdot 10^{-23}$	
4	$6.67 \cdot 10^{-22}$	$1.76 \cdot 10^{-17}$	
5	$9.96 \cdot 10^{-18}$	$1.58 \cdot 10^{-13}$	
6	$2.08 \cdot 10^{-14}$	$1.85 \cdot 10^{-10}$	
7	$1.11 \cdot 10^{-11}$	$5.10 \cdot 10^{-8}$	
8	$2.13 \cdot 10^{-9}$	$4.64 \cdot 10^{-6}$	
9	$1.83 \cdot 10^{-7}$	0.000171	
10	$8.12 \cdot 10^{-6}$	0.00293	
11	0.000202	0.0251	$8.25 \cdot 10^{-8}$
12	0.00298	0.113	$3.11 \cdot 10^{-5}$
13	0.0263	0.271	0.00276
14	0.137	0.339	0.059
15	0.384	0.202	0.317
16	0.449	0.0445	0.443

(X_t, V_t, W_t) можно дополнить случайными величинами, которые будут соответствовать не только границе последнего на шаге t чтения, но также границам всех предыдущих чтений. Выражения для переходных вероятностей соответствующей цепи Маркова будут более громоздкими, чем в теореме 1, но состояние такой цепи Маркова на последнем шаге будет содержать более подробную информацию о чтениях перестановки π_n : о знаках, которые одновременно входят в одно чтение, о взаимном расположении чтений, об их длинах и т. п.

Список литературы

1. Ватутин В.А. Предельные теоремы для числа отрезков возрастания в случайных перестановках, порождаемых алгоритмами сортировки. — Дискретная математика, 1994, т. 6, вып. 1, с. 83–99.
2. Ватутин В.А., Михайлов В.Г. О числе чтений случайных неравновероятных файлов при устойчивой сортировке. — Дискретная математика, 1996, т. 8, вып. 2, с. 14–30.

3. Кнут Д. Искусство программирования, т. 3. Сортировка и поиск. — М.: «Вильямс», 2000.
4. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
5. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: МЦНМО, 2004.
6. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. — М.: ГИТТЛ, 1949.
7. Carlitz L., Roselle D. P., Scoville R. Permutations and sequences with repetitions by number of increases. — J. Comb. Theory, 1966, v. 1, p. 350–374.
8. Dilon J. F., Roselle D. R. Simon Newcomb's problem. — SIAM J. Appl. Math., 1969, v. 17, № 6, p. 1086–1093.
9. Foata D. Distributions eulériennes et mahoniennes sur le groupe des permutations. — Higher combinatorics. Proc. NATO Adv. Study Inst., Berlin, 1976, ed. M. Aigner, Amsterdam, D. Reidel, 1977, p. 27–49, перевод: Фота Д., Распределения типа Эйлера и типа Макмагона на группе перестановок. — Проблемы комбинаторного анализа, вып. 19, М.: Мир, 1980, с. 120–141.
10. Fu J. C., Koutras M. V. Distribution theory of runs: A Markov chain approach. — J. Amer. Statist. Assoc., 1994, v. 89, p. 1050–1058.
11. Fu J. C., Lou W. Y. W. Exact and limiting distributions of the number of successions in a random permutation. — Ann. Inst. Statist. Math., 1995, v. 47, № 3, p. 435–446.
12. Fu J. C., Lou W. Y. W. Joint distributions of rises and falls. — Ann. Inst. Statist. Math., 2000, v. 52, № 3, p. 415–425.
13. Fu J. C., Lou W. Y. W., Wang Y.-J. On exact distributions of Eulerian and Simon Newcomb numbers associated with random permutations. — Stat. & Probab. Letters, 1999, v. 42, p. 115–125.
14. Fu J. C., Lou W. Y. W. Distribution theory of runs and patterns and its application. A finite Markov chain imbedding approach. — World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2003.
15. Johnson C. B. The distribution of 2-sequences in random permutations of arbitrary multi-sets. — Stat. & Probab. Lett., 2002, v. 59, p. 67–74.
16. Rawlings D. Enumerations of permutations by descends, indescends, imajor index, and basic components. — J. Comb. Theory, Ser. A, 1984, v. 36, p. 1–14.
17. Wolfowitz J. Asymptotic distribution of runs up and down. — Ann. Math. Statist., 1944, v. 15, № 2, p. 163–172.