Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Погорелов, М. А. Пудовкина, Свойства графов орбиталов надгрупп группы Джевонса, *Матем. вопр. криптогр.*, 2010, том 1, выпуск 1, 55–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk4>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:58:45

УДК 512.542.76

Свойства графов орбиталов надгруппы группы Джевонса

Б. А. Погорелов¹⁾, М. А. Пудовкина²⁾

¹⁾ Академия криптографии Российской Федерации, Москва

²⁾ Московский инженерно-физический институт, Москва

Получено 22.IV.2010

Рассматриваются графы орбиталов подсхем схемы Хемминга. Среди таких графов описываются дистанционно-транзитивные, дистанционно-регулярные, антиподальные и бипримитивные графы. Описаны также группы автоморфизмов указанных графов орбиталов, их метрики и факторметрики.

Ключевые слова: ассоциативная схема отношений, граф орбитала, метрика, подметрика, дистанционно-транзитивный граф, дистанционно-регулярный граф.

Properties of graphs of orbitals for overgroups of the Jevons group

B. A. Pogorelov¹⁾, M. A. Pudovkina²⁾

¹⁾ Academy of Cryptography of Russian Federation, Moscow

²⁾ Moscow Engineering Physics Institute

Abstract. In this paper we consider properties of graphs of orbitals for sub-schemes of the Hamming scheme. We describe distance-transitive, distance-regular, antipodal and bipartite graphs of orbitals. Automorphism groups of the graphs of orbitals, their metrics, quotient metric and corresponding properties are investigated also.

Keywords: association scheme, orbital graph, metric, submetric, distance-transitive graph, distance-regular graph.

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2010, vol. 1, no. 1, pp. 55–84 (Russian).

1. Введение

Напомним [3], что целочисленная метрика $\mu: V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{N}$, где $V_n = (\text{GF}(2))^n$, называется подметрикой метрики Хемминга χ , если для любых векторов $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V_n$ она удовлетворяет условиям:

- 1) если $\chi(\alpha, \beta) = \chi(\gamma, \delta)$, то $\mu(\alpha, \beta) = \mu(\gamma, \delta)$;
- 2) $\mu(\alpha, \beta) \leq \chi(\alpha, \beta)$.

Группой изометрий метрики Хемминга является группа Джевонса $S_2 \uparrow S_n$. Надгруппы группы Джевонса и подметрики метрики Хемминга часто возникают при исследовании различных объектов в дискретной математике и криптографии.

Любому неориентированному связному графу без кратных рёбер и петель (далее — просто графу) соответствует метрика на множестве вершин, задающаяся как расстояние между вершинами. Назовём метрику групповой, если она построена по графу орбитала группы. В работах [4, 5] установлено соответствие между подсхемами схемы Хемминга, описанными в работе [2], групповыми подметриками метрики Хемминга, соответствующими орбиталам надгрупп, а также группами автоморфизмов подсхем и группами G изометрий подметрик орбиталов, содержащих произвольные пары векторов $(\alpha, \beta) \in V_n \times V_n$, $S_2 \uparrow S_n \leq G \leq S_{2^n}$. Такие орбиталы будем называть орбиталами подсхемы схемы Хемминга. Среди графов, соответствующих орбиталам надгрупп группы Джевонса, возникают такие интересные классы графов как дистанционно-транзитивные, антиподальные и двудольные. Подобным графам посвящён целый ряд работ ([6, 7, 8, 12, 13, 14 и др.]).

В данной работе найдены условия наличия или отсутствия дистанционной транзитивности и регулярности, антиподальности, двудольности у графов орбиталов подсхем схемы Хемминга. Указаны группы автоморфизмов, соответствующих графов их метрики, факторметрики и другие свойства. Также доказана замкнутость множества подсхем схемы Хемминга относительно введённых унарных операций «антиподальности», «двудольности».

1.1. Основные обозначения и понятия

Обозначим:

- $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;
- $N^{(0)}, N^{(1)}$ — соответственно множество четных и нечетных натуральных чисел;
- $\overline{\{a, b\}} = \{a, a+1, \dots, b\} \subseteq \mathbb{N}$, $a < b$;

- $\{\overline{a,b}\}^0, \{\overline{a,b}\}^1$ — соответственно множество всех чётных и нечётных чисел из множества $\{\overline{a,b}\}$;
- V_n — пространство всех n -мерных двоичных векторов над полем $GF(2)$;
- W_n — подпространство всех векторов чётного веса из V_n ,
- $\overline{W}_n = V_n \setminus W_n$,
- $\|\alpha\|$ — вес (Хемминга) вектора $\alpha \in V_n$;
- $H(n, 2)$ — схема отношений Хемминга;
- $\bar{G}$ — образ при естественном гомоморфизме импримитивной группы G , действующей на множестве блоков импримитивности;
- $\lceil a \rceil$ — наименьшее целое, большее или равное числу a ;
- $\lfloor a \rfloor$ — наибольшее целое, меньшее или равное числу a ;
- $\omega_b(\gamma) = \min\{\|\gamma\|, n - \|\gamma\| + b\}$, $b \in \{-1, 0, 1\}$;
- $\bar{\mu}(\|\alpha + \beta\|) = \mu(\alpha, \beta)$, где $\alpha, \beta \in V_n$, μ — подметрика метрики Хемминга и $\bar{\mu}: \{\overline{0, n}\} \rightarrow \{\overline{0, n}\}$;
- Δ_i — множество всех векторов веса i из V_n ,
- $C_k = \{i \in \{\overline{1, n-1}\} \mid i \equiv k \pmod{4}\}$, $D_k = \{i \in \{\overline{1, n}\} \mid i \equiv k \pmod{4}\}$, $k = 0, 1, 2, 3$;
- $C_0, C_1, C_2, C_3, \{0\}, \{n\}$ и $D_0, D_1, D_2, D_3, \{0\}$ — разбиения множества $\{\overline{0, n}\}$;
- $\Delta_0, \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Delta_n$ и $\Delta_0, \Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ — разбиения пространства V_n , где $\Theta_k = \sum_{i \in D_k} \Delta_i$, $\Lambda_k = \sum_{i \in C_k} \Delta_i$ и $k = 0, 1, 2, 3$.

Пусть Ψ — произвольный самопарный орбитал подсхемы схемы Хемминга, $\bar{\Psi} = (V_n; \Psi)$ — граф, соответствующий орбиталу Ψ , $\Psi_{\bar{0}} = \{\alpha \mid (\bar{0}, \alpha) \in \Psi\}$. Если $\Psi_{\bar{0}} = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$, где $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{\overline{1, n}\}$, то обозначим $\Psi = \Gamma_{i_1 \cup \dots \cup i_l}$, $\bar{\Gamma}_{i_1 \cup \dots \cup i_l} = (V_n, \Gamma_{i_1 \cup \dots \cup i_l})$. Кроме того, если множество I представимо в виде $I = \bigcup_{j \in J} D_j$ или $I = \bigcup_{j \in J} C_j$ для некоторого множества индексов

$J = \{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$, $r \leq 4$, то соответственно обозначим $\Psi = \Gamma_{[j_1 \cup \dots \cup j_r]}$, $\Psi = \Gamma_{(j_1 \cup \dots \cup j_r)}$.

Орбитал Ψ называется нечётным, если $\Delta_k \subseteq \Psi_{\bar{0}}$ для некоторого нечётного числа $k \in \overline{[1, n]}$. В противном случае орбитал называется чётным. Если $\Delta_1 \subseteq \Psi_{\bar{0}}$, то орбитал Ψ называется базовым и обозначается Ψ_1 .

Будем говорить, что орбитал Ψ принадлежит схеме отношений, если Ψ — «подмножество» схемы отношений. Орбитал Ψ может принадлежать разным подсхемам схемы Хемминга $H(n, 2)$. Каждому нечётному орбиталу Ψ поставим в соответствие такой базовый орбитал Ψ_1 наибольшей мощности, что орбиталы Ψ , Ψ_1 принадлежат одной подсхеме схемы Хемминга.

По степени «похожести» (под «похожестью» понимается единообразное описание метрик и их групп изометрий, кроме класса R_2) орбиталы подсхемы схемы Хемминга $H(n, 2)$ можно разбить на следующие семь классов [5]:

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}\}, \\
 R_1 &= \begin{cases} \{\Gamma_{(k)}, \Gamma_{[k]} \mid k \in \{0, 1, 2, 3\}\}, & \text{если } n \in N^{(1)}, \\ \{\Gamma_{[k]} \mid k \in \{0, 1, 2, 3\}\}, & \text{если } n \in N^{(0)}, \end{cases} \\
 R_2 &= \begin{cases} \{\Gamma_{(0 \cup 3)}, \Gamma_{(0 \cup 1)}, \Gamma_{(2 \cup 3)}, \Gamma_{(1 \cup 2)}, \Gamma_{[0 \cup 2]}, \Gamma_{(1 \cup 3)}, \Gamma_{[1 \cup 3]}\}, & \text{если } n \in N^{(1)}, \\ \{\Gamma_{[0 \cup 3]}, \Gamma_{[0 \cup 1]}, \Gamma_{[2 \cup 3]}, \Gamma_{[1 \cup 2]}, \Gamma_{(0 \cup 2)}, \Gamma_{[0 \cup 2]}, \Gamma_{[1 \cup 3]}\}, & \text{если } n \in N^{(0)}, \end{cases} \\
 R_3 &= \begin{cases} \{\Gamma_{k \cup n+b-k} \mid b \in \{-1, 0, 1\}, k \in \overline{[1, \lfloor n/2 \rfloor]}\}, & \text{если } n \in N^{(1)}, \\ \{\Gamma_{k \cup n+b-k} \mid b \in \{0, 1\}, k \in \overline{[1, \lfloor n/2 \rfloor]}\}, & \text{если } n \in N^{(0)}, \end{cases} \\
 R_4 &= \{\Gamma_{2k-1 \cup 2k} \mid k \in \overline{[1, \lfloor n/2 \rfloor]}\}, \\
 R_5 &= \begin{cases} \{\Gamma_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k \cup n-2k+1} \mid k \in \overline{[1, \lfloor n/4 \rfloor]}\}, & \text{если } n \in N^{(1)}, \\ \{\Gamma_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k+2} \mid k \in \overline{[1, \lfloor n/4 \rfloor]}\}, & \text{если } n \in N^{(0)}, \end{cases} \\
 R_6 &= \{\Gamma_{(0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)}, \Gamma_{[0 \cup 1 \cup 2 \cup 3]}\}.
 \end{aligned}$$

Имеют место равенства:

$$\Gamma_{(k)} = \Gamma_{[k]}, \text{ если } k \not\equiv n \pmod{2};$$

$$\Gamma_{[1 \cup 3]} = \Gamma_{(1 \cup 3)}, \text{ если } n \in N^{(0)};$$

$$\Gamma_{[0 \cup 2]} = \Gamma_{(0 \cup 2)}, \text{ если } n \in N^{(1)}.$$

Метрику, соответствующую i -му классу, будем записывать в виде $\rho_*^{(i)}$, $i = \overline{0, 6}$. При этом положим:

$$\chi_k = \rho_k^{(0)} \text{ — метрика орбитала } \Gamma_k \in R_0, k \in \overline{1, n-1};$$

$$\rho_{(k)}^{(1)} \text{ — метрика орбитала } \Gamma_{(k)} \in R_1, k \in \{0, 1, 2, 3\};$$

$$\rho_{[k]}^{(1)} \text{ — метрика орбитала } \Gamma_{[k]} \in R_1, k \in \{0, 1, 2, 3\};$$

$$\rho_{i,b,1}^{(2)} \text{ — метрика орбитала } \Gamma_{(i \cup i+b)} \in R_2, i \in \{0, 1, 2\}, b \in \{1, 2, 3\},$$

$$\text{и } 0 \leq i < i+b < 4;$$

$$\rho_{i,b,2}^{(2)} \text{ — метрика орбитала } \Gamma_{[i \cup i+b]} \in R_2, i \in \{0, 1, 2\}, b \in \{1, 2, 3\},$$

$$\text{и } 0 \leq i < i+b < 4;$$

$$\rho_{k,b}^{(3)} \text{ — метрика орбитала } \Gamma_{k \cup n+b-k} \in R_3, b \in \{-1, 0, 1\}, k = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor;$$

$$\rho_k^{(4)} \text{ — метрика орбитала } \Gamma_{2k-1 \cup 2k} \in R_4, k = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor;$$

$$\rho_{k,1}^{(5)} \text{ — метрики орбитала } \Gamma_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k \cup n-2k+1} \in R_5 \text{ при } n \in N^{(1)},$$

$$k = 1, \dots, \lfloor n/4 \rfloor;$$

$$\rho_{k,2}^{(5)} \text{ — метрики орбитала } \Gamma_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k+2} \in R_5 \text{ при } n \in N^{(0)},$$

$$k = 1, \dots, \lfloor n/4 \rfloor;$$

$$\rho_1^{(6)} \text{ — метрики орбитала } \Gamma_{(0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)} \in R_6;$$

$$\rho_2^{(6)} \text{ — метрики орбитала } \Gamma_{[0 \cup 1 \cup 2 \cup 3]} \in R_6;$$

$$\rho_1^{(6)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \in \{1, \dots, n-1\}, \\ 2, & \text{если } \|\alpha + \beta\| = n, \end{cases}$$

$$\rho_2^{(6)}(\alpha, \beta) = 1 \text{ для любых векторов } \alpha, \beta \in V_n.$$

Обозначим через $\chi_k(\alpha, \beta)$ расстояние между вершинами α, β в графе $\bar{\Gamma}_k$, $\chi(\alpha, \beta) = \chi_1(\alpha, \beta)$.

2. Дистанционно-транзитивные графы нечетных орбиталов

Напомним, что граф $\Gamma = (X, Y)$ называется дистанционно-транзитивным, если для любых вершин $u, u', v, v' \in X$ таких, что $d(u, u') = d(v, v')$, существует элемент $g \in \text{Aut}(\Gamma)$, удовлетворяющий равенствам $v = u^g$, $v' = u'^g$. Граф $\Gamma = (X, Y)$ называется вершинно-транзитивным, если группа $\text{Aut}(\Gamma)$ действует на множестве X транзитивно.

Различным аспектам классификации дистанционно-транзитивных графов посвящены работы [12, 8, 9, 17, 16, 14]. Очевидно, что связный граф $\Gamma = (X, Y)$ диаметра $b \geq 1$ является дистанционно-транзитивным тогда и только тогда, когда Γ — вершинно-транзитивный и стабилизатор $\text{Aut}(\Gamma)_v$ транзитивен на множестве $\Gamma^i(v)$ для каждого $v \in X$, $i \in \{1, b\}$, где $\Gamma^i(v) = \{\alpha \in X \mid \rho(\alpha, v) = i\}$, $\rho(\alpha, v)$ — расстояние между вершинами $v, \alpha \in X$ в графе Γ .

Отсюда непосредственно вытекает следующий критерий дистанционной транзитивности графов, подгруппой группы автоморфизмов которых является $S_2 \uparrow S_n$.

Лемма 2.1. Пусть Γ — связный граф с множеством вершин V_n диаметра $b \geq 1$ такой, что $S_2 \uparrow S_n \leq \text{Aut}(\Gamma)$ — группа ранга r . Пусть также X_i — i -я орбита стабилизатора $\text{Aut}(\Gamma)_0$, $i = \overline{0, r-1}$. Граф Γ является дистанционно-транзитивным тогда и только тогда, когда для каждого $j \in \{1, b\}$ выполняется включение $\Gamma^j(\vec{0}) \subseteq X_{i_j}$ для некоторого $i_j \in \overline{0, r-1}$.

В таблицах 1 и 3 работы [5] приведены все нечётные орбиталы подсхем схемы Хемминга (см. также приложение).

Опираясь на полученные в [5] метрики орбиталов, описание их групп изометрий и классификацию подорбит групп автоморфизмов подсхем схемы Хемминга, опишем дистанционно-транзитивные графы орбиталов подсхем схемы Хемминга. Отметим, что графы всех чётных орбиталов несвязные.

Теорема 2.2. Дистанционно-транзитивные графы нечётных орбиталов подсхем схемы Хемминга при $n \geq 6$ исчерпываются следующим списком:

- а) $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_{1 \cup 2}, \bar{\Gamma}_{1 \cup n}, \bar{\Gamma}_{[1]}, \bar{\Gamma}_{[3]}, \bar{\Gamma}_{[1 \cup 3]}, \bar{\Gamma}_{[0 \cup 1 \cup 2 \cup 3]}, \bar{\Gamma}_{(0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)}$;
- б) $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}, \bar{\Gamma}_{(2 \cup 3)}, \bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}, \bar{\Gamma}_{(0 \cup 3)}, \bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)}$ при нечётном n ;
- в) $\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]}, \bar{\Gamma}_{[2 \cup 3]}, \bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]}, \bar{\Gamma}_{[0 \cup 3]}, \bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n \cup n-1}$ при чётном n .

Среди всех нечётных графов дистанционно-транзитивными являются графы, соответствующие обведённым пунктиром вершинам. Штрихованная линия вложения соответствует случаю $n \equiv 1(\bmod 4)$ или $n \equiv 0(\bmod 4)$, штрих-пунктирная — случаю $n \equiv 3(\bmod 4)$ или $n \equiv 2(\bmod 4)$. Любой жирный тип линии соответствует вложению дистанционно-транзитивных графов.

Доказательство состоит из следующих этапов. Для каждого орбитала Ψ , приведенного в таблицах 1, 3 [5], выписываются подорбиты $X_0, \dots, X_{r-1}$ группы $\text{Aut}(\bar{\Psi})$ ранга r . Затем определяются множества $\bar{\Psi}^i(\bar{0}) = \{\alpha \in V_n \mid \rho(\alpha, \bar{0}) = i\}$, где $\rho(\alpha, v)$ — кратчайшее расстояние между вершинами $v, \alpha \in V_n$ в графе $\bar{\Psi}$. После чего для каждого $j = 1, 2, \dots$ проверяется справедливость включения $\bar{\Psi}^j(\bar{0}) \subseteq X_{i_j}$ для некоторого $i_j \in \{0, r-1\}$.

Рис. 1. Граф вложений дистанционно-транзитивных графов нечётных степеней n

Рис. 2. Граф вложений дистанционно-транзитивных графов чётных степеней n

1. Граф $\bar{\Gamma}_k$. Известно [1], что граф $\bar{\Gamma}_1$ дистанционно-транзитивный. При $k \geq 3$ из работы [5] следует, что $\Delta_2 \cup \Delta_{2k} \subseteq \bar{\Gamma}_k^2(\bar{0})$ при $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, $\Delta_2 \cup \Delta_{2(n-k)} \subseteq \bar{\Gamma}_k^2(\bar{0})$ при $k > \lfloor n/2 \rfloor$, а орбиты $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_k)_{\bar{0}}$ равны $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{2i-1}, \Delta_{2i}, \dots, \Delta_n$. Таким образом, граф $\bar{\Gamma}_k$ не является дистанционно-транзитивным при нечётном $k \geq 3$.

2. Графы $\bar{\Gamma}_{(1)}$, $\bar{\Gamma}_{(3)}$. В работе [4] показано, что при $k \in \{1, 3\}$ справедливо равенство

$$\rho_{(k)}^{(1)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \equiv k \pmod{4}, \alpha + \beta \neq \bar{1}, \\ 2, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \equiv 0, 2 \pmod{4}, \\ 3, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \equiv 3k \pmod{4} \text{ или } \alpha + \beta = \bar{1}, n \equiv 1 \pmod{2}, \\ 4, & \text{если } \alpha + \beta = \bar{1}, n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Из работы [5] следует, что $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(1)})_{\vec{0}} = \text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(3)})_{\vec{0}}$ и группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(1)})_{\vec{0}}$ имеет орбиты $\Delta_0, \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Delta_n$ при нечётном n и $\Delta_0, \Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_0 \cup \Lambda_2, \Delta_n$ при чётном n . Для любого n справедливо равенство $\bar{\Gamma}_{(k)}^2(\vec{0}) = \Lambda_2 \cup \Lambda_0$. Следовательно, граф $\bar{\Gamma}_{(k)}$ не является дистанционно-транзитивным при нечётном n .

Пусть n чётно, тогда

$$\bar{\Gamma}_{(k)}^3(\vec{0}) = \Lambda_{3k(\bmod 4)},$$

$$\bar{\Gamma}_{[k]}^4(\vec{0}) \subseteq \Theta_0 \text{ при } n \equiv 0(\bmod 4),$$

$$\bar{\Gamma}_{(k)} = \bar{\Gamma}_{[k]}.$$

Значит, $\bar{\Gamma}_{(k)}$ — дистанционно-транзитивный при чётном n .

3. Графы $\bar{\Gamma}_{[1]}, \bar{\Gamma}_{[3]}$. В работе [4] показано, что при $k \in \{1, 3\}$ справедливо равенство

$$\rho_{[k]}^{(1)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \equiv k (\bmod 4), \\ 2, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \equiv 0, 2 (\bmod 4), \\ 3, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \equiv k + 2 (\bmod 4), \\ 4, & \text{если } \alpha + \beta = \vec{1}, n \equiv 0 (\bmod 4). \end{cases}$$

Случай чётного n рассмотрен в пункте 2. При нечётном n из работы [5] следует, что $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[1]})_{\vec{0}} = \text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[3]})_{\vec{0}}$ и группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[1]})_{\vec{0}}$ имеет орбиты $\Delta_0, \Lambda_0 \cup \Lambda_2, \Theta_1, \Theta_3$. Из соотношений

$$\bar{\Gamma}_{[k]}^i(\vec{0}) = \Theta_{k-i(\bmod 4)}, i = 1, 3,$$

$$\bar{\Gamma}_{[k]}^2(\vec{0}) = \Lambda_0 \cup \Lambda_2$$

следует дистанционная транзитивность графов $\bar{\Gamma}_{[1]}, \bar{\Gamma}_{[3]}$.

4. Графы $\bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)}, \bar{\Gamma}_{[1 \cup 3]}$. В работе [4] показано, что

$$\rho_{1,2,1}^{(2)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\beta + \alpha\| \equiv 1 (\bmod 2), \alpha + \beta \neq \vec{1}, \\ 2, & \text{если } \|\beta + \alpha\| \equiv 0 (\bmod 2), \\ 3, & \text{если } \alpha + \beta = \vec{1}, n \equiv 1 (\bmod 2), \end{cases}$$

$$\rho_{1,2,2}^{(2)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\beta + \alpha\| \equiv 1 \pmod{2}, \\ 2, & \text{если } \|\beta + \alpha\| \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Из работы [5] следует, что при нечётном n группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)})_{\vec{0}}$ имеет орбиты $\Delta_0, \Lambda_0 \cup \Lambda_2, \Lambda_1 \cup \Lambda_3, \Delta_n$. Орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[1 \cup 3]})_{\vec{0}}$ для любого n равны $\Delta_0, \Theta_0 \cup \Theta_2, \Lambda_1 \cup \Lambda_3$. Из равенства $\bar{\Gamma}_{[1 \cup 3]} = \bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)}$ при чётном n следует, что $\Delta_0, \Theta_0 \cup \Theta_2, \Lambda_1 \cup \Lambda_3$ — орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)})_{\vec{0}}$ при чётном n . Отсюда получаем, что

$$\bar{\Gamma}_{[1 \cup 3]}^2(\vec{0}) = \Theta_0 \cup \Theta_2 \text{ при любом } n,$$

$$\bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)}^2(\vec{0}) = \Lambda_0 \cup \Lambda_2, \quad \bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)}^3(\vec{0}) = \Delta_n \text{ при нечётном } n.$$

Следовательно, графы $\bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)}, \bar{\Gamma}_{[1 \cup 3]}$ — дистанционно-транзитивные.

5. Графы $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}, \bar{\Gamma}_{(2 \cup 3)}$, нечётное n . В работе [4] показано, что при $i \in \{0, 2\}$ справедливо равенство:

$$\rho_{i,1,1}^{(2)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\beta + \alpha\| \equiv i, i+1 \pmod{4}, \alpha + \beta \neq \vec{1}, \\ 2, & \text{если } \|\beta + \alpha\| \equiv i+2, i+3 \pmod{4} \text{ или } \alpha + \beta = \vec{1}, n \not\equiv 3 \pmod{4}, \\ 3, & \text{если } \alpha + \beta = \vec{1}, n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Из работы [5] следует, что $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)})_{\vec{0}} = \text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(2 \cup 3)})_{\vec{0}}$ и группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)})_{\vec{0}}$ имеет орбиты $\Delta_0, \Lambda_0 \cup \Lambda_1, \Lambda_2 \cup \Lambda_3, \Delta_n$. Так как

$$\bar{\Gamma}_{(i \cup i+1)}^2(\vec{0}) = \Lambda_{i+2 \pmod{4}} \cup \Lambda_{i+3 \pmod{4}},$$

$$\bar{\Gamma}_{(i \cup i+1)}^3(\vec{0}) = \Delta_n \text{ при } n \equiv 3 \pmod{4},$$

то графы $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}, \bar{\Gamma}_{(2 \cup 3)}$ — дистанционно-транзитивные.

6. Графы $\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}, \bar{\Gamma}_{(0 \cup 3)}$, нечётное n . В работе [4] показано, что при $i \in \{1, 3\}$ справедливо равенство:

$$\rho_{i,1,1}^{(2)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \equiv i, i+1 \pmod{4}, \alpha + \beta \neq \vec{1}, \\ 2, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \equiv i+2, i+3 \pmod{4} \text{ или } \alpha + \beta = \vec{1}, n \not\equiv 1 \pmod{4}, \\ 3, & \text{если } \alpha + \beta = \vec{1}, n \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Из работы [5] следует, что $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)})_{\bar{0}} = \text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(0 \cup 3)})_{\bar{0}}$ и группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)})_{\bar{0}}$ имеет орбиты $\Delta_0, \Delta_0 \cup \Delta_3, \Delta_1 \cup \Delta_2, \Delta_n$. Аналогично п. 5 получаем, что графы $\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}, \bar{\Gamma}_{(0 \cup 3)}$ — дистанционно-транзитивные.

7. Графы $\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]}, \bar{\Gamma}_{[2 \cup 3]}$, чётное n . В работе [4] показано, что при $i \in \{0, 2\}$ справедливо равенство:

$$\rho_{i,1,2}^{(2)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\beta + \alpha\| \equiv i, i+1 \pmod{4}, \\ 2, & \text{если } \|\beta + \alpha\| \equiv i+2, i+3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Из работы [5] следует, что группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]})_{\bar{0}}$ имеет орбиты $\Delta_0, \Theta_0 \cup \Theta_1, \Theta_2 \cup \Theta_3$. Значит, графы $\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]}, \bar{\Gamma}_{[2 \cup 3]}$ — дистанционно-транзитивные.

8. Графы $\bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]}, \bar{\Gamma}_{[0 \cup 3]}$, чётное n . В работе [4] показано, что при $i \in \{1, 3\}$ справедливо равенство:

$$\rho_{i,1,2}^{(2)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \equiv i, i+1 \pmod{4}, \\ 2, & \text{если } \|\alpha + \beta\| \equiv i+2, i+3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Из работы [5] следует, что $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]})_{\bar{0}} = \text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[0 \cup 3]})_{\bar{0}}$ и группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[0 \cup 3]})_{\bar{0}}$ имеет орбиты $\Delta_0, \Theta_0 \cup \Theta_3, \Theta_1 \cup \Theta_2$. Значит, графы $\bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]}, \bar{\Gamma}_{[0 \cup 3]}$ — дистанционно-транзитивные.

9. Граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k}$. Если $k=1$, то из работы [4] следует, что

$$\rho_{1,0}^3(\alpha, \beta) = \begin{cases} \min\{\|\alpha + \beta\|, n - \|\alpha + \beta\|\}, & \alpha + \beta \neq \bar{1}, \\ 2, & \alpha + \beta = \bar{1}, \end{cases}$$

и $\Delta_0, \Delta_1 \cup \Delta_{n-1}, \dots, \Delta_k \cup \Delta_{n-k}, \dots, \Delta_n$ — орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup n-1})_{\bar{0}}$. Значит, $\bar{\Gamma}_{1 \cup n-1}^2(\bar{0}) = (\Delta_2 \cup \Delta_{n-2}) \cup \Delta_n$ и граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup n-1}$ не является дистанционно-транзитивным.

Пусть $k > 1$. Тогда из работы [5] следует, что $\Delta_2 \cup \Delta_{2k} \subseteq \bar{\Gamma}_{k \cup n-k}^2(\bar{0})$ при $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, $\Delta_2 \cup \Delta_{2(n-k)} \subseteq \bar{\Gamma}_{k \cup n-k}^2(\bar{0})$ при $k > \lfloor n/2 \rfloor$, а орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{k \cup n-k})_{\bar{0}}$ равны $\Delta_0, \Delta_1 \cup \Delta_{n-1}, \dots, \Delta_i \cup \Delta_{n-i}, \dots$. Таким образом, граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k}$ не является дистанционно-транзитивным.

10. Граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1}$. Пусть $k=1$. Из работы [5] следует, что

$$\rho_{1,1}^3(\alpha, \beta) = \min\{\|\alpha + \beta\|, n+1 - \|\alpha + \beta\|\},$$

а орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup n})_{\bar{0}}$ есть $\Delta_0, \Delta_1 \cup \Delta_n, \dots, \Delta_k \cup \Delta_{n+1-k}, \dots$. Значит, $\bar{\Gamma}_{1 \cup n}^k(\bar{0}) = \Delta_k \cup \Delta_{n+1-k}$ и граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup n}$ — дистанционно-транзитивный.

Если n, k нечётны, $n+1=2k$, то из пункта 1 получаем, что граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1}$ не дистанционно-транзитивен.

В остальных случаях из работы [5] следует, что $\Delta_2 \cup \Delta_{2k} \subseteq \bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1}^2(\bar{0})$ при $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, $\Delta_2 \cup \Delta_{2(n-k)} \subseteq \bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1}^2(\bar{0})$ при $k > \lfloor n/2 \rfloor$, а орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1})_{\bar{0}}$ равны $\Delta_0, \Delta_1 \cup \Delta_n, \dots, \Delta_k \cup \Delta_{n+1-k}, \dots$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1}$ не является дистанционно-транзитивным при $k > 1$.

11. Граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k-1}$ при нечётном k . Пусть $k=1$. Из работы [5] следует, что $\rho_{1,-1}^3(\alpha, \beta) = 2$ при $\|\alpha + \beta\| \in \{2, 4, n-1, n-3\}$ и орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup n-2})_{\bar{0}}$ равны $\Delta_0, \dots, \Delta_{2k} \cup \Delta_{n+1-2k}, \dots, \Delta_{2k-1} \cup \Delta_{n-2k}, \dots, \Delta_n$. Так как

$$\bar{\Gamma}_{1 \cup n-2}^2(\bar{0}) = (\Delta_2 \cup \Delta_{n-1}) \cup (\Delta_4 \cup \Delta_{n-3}),$$

то граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup n-2}$ не является дистанционно-транзитивным.

Если n, k нечётны, $n-1=2k$, то из пункта 1 получаем, что граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k-1}$ не дистанционно-транзитивен. В остальных случаях из работы [5] следует, что $\Delta_2 \cup \Delta_{2k} \subseteq \bar{\Gamma}_{k \cup n-k-1}^2(\bar{0})$ при $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, $\Delta_2 \cup \Delta_{2(n-k)} \subseteq \bar{\Gamma}_{k \cup n-k-1}^2(\bar{0})$ при $k > \lfloor n/2 \rfloor$ и орбиты $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{k \cup n-k-1})_{\bar{0}}$ равны

$$\Delta_0, \Delta_2 \cup \Delta_n, \dots, \Delta_{2i} \cup \Delta_{n+1-2i}, \dots, \Delta_1 \cup \Delta_{n-2}, \dots, \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{n-2i}, \dots, \Delta_n.$$

Таким образом, граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1}$ не является дистанционно-транзитивным.

12. Граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k}$. Пусть $k=1$. Из работы [5] следует, что $\rho_k^{(4)}(\alpha, \beta) = \lceil \|\alpha + \beta\| / 2 \rceil$, $\Delta_0, \Delta_1 \cup \Delta_2, \dots, \Delta_{2k-1} \cup \Delta_{2k}, \dots$ — орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup 2})_{\bar{0}}$. Значит, $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2}^i(\bar{0}) = \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i}$, $i=1, 2, \dots$, и граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2}$ — дистанционно-транзитивный.

При $k \geq 2$ из работы [5] следует, что

$$\Delta_2 \cup \Delta_{4k} \subseteq \bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k}^2(\bar{0}) \text{ при } k \leq \lfloor n/4 \rfloor,$$

$$\Delta_2 \cup \Delta_{2n-4k} \subseteq \bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k}^2(\bar{0}) \text{ при } k > \lfloor n/4 \rfloor.$$

Орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k})_{\vec{0}}$ равны $\Delta_0, \Delta_1 \cup \Delta_2, \dots, \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i}, \dots$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k}$ не является дистанционно-транзитивным при $k > 1$.

13. Граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k+2}$ при чётном n . Пусть $k = 1$. Из работы [5] следует, что

$$\rho_{1,2}^{(5)}(\alpha, \beta) = \min \{ \lceil \|\alpha + \beta\| / 2 \rceil, n/2 + 1 - \lceil \|\alpha + \beta\| / 2 \rceil \}$$

и орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n-1})_{\vec{0}}$ равны $\Delta_0, \dots, \Delta_{2k-1} \cup \Delta_{2k} \cup \Delta_{n-2k+1} \cup \Delta_{n-2k+2}, \dots$. Значит, $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n-1}^i = \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i} \cup \Delta_{n-2i+1} \cup \Delta_{n-2i+2}$ и граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n-1}$ — дистанционно-транзитивный.

При $k > 1$ из работы [5] следует, что

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_{4k} \subseteq \bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k+2}^2(\vec{0}) \text{ при } k \leq \lfloor n/4 \rfloor,$$

а орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{k \cup k+1 \cup n-k \cup n-k+1})_{\vec{0}}$ равны

$$\Delta_0, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_{n-1} \cup \Delta_n, \dots, \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i} \cup \Delta_{n-2i+1} \cup \Delta_{n-2i+2}, \dots$$

Таким образом, граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k+2}$ не является дистанционно-транзитивным при $k > 1$.

14. Граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k}$ при нечётном n . Пусть $k = 1$. Из работы [5] следует, что

$$\rho_{1,1}^{(5)}(\alpha, \beta) = 2 \text{ при } \|\alpha + \beta\| \in \{3, 4, n-4, n-3, n\},$$

а орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n-1 \cup n-2})_{\vec{0}}$ равны $\Delta_0, \dots, \Delta_{2k-1} \cup \Delta_{2k} \cup \Delta_{n-2k} \cup \Delta_{n+1-2k}, \dots, \Delta_n$, то

$$\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n-2 \cup n-1}^2(\vec{0}) = (\Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \Delta_{n-3} \cup \Delta_{n-4}) \cup \Delta_n.$$

Следовательно, граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n-1 \cup n-2}$ не является дистанционно-транзитивным.

При $k > 1$ из работы [5] следует, что

$$\Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_{4k} \subseteq \bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k}^2(\vec{0}) \text{ при } k \leq \lfloor n/4 \rfloor,$$

а орбиты группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k})_{\vec{0}}$ равны

$$\Delta_0, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_{n-1} \cup \Delta_{n-2}, \dots, \Delta_{2i-1} \cup \Delta_{2i} \cup \Delta_{n-2i} \cup \Delta_{n+1-2i}, \dots, \Delta_n.$$

Таким образом, граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k}$ не является дистанционно-транзитивным.

Дистанционная транзитивность графов $\Gamma_{[0 \cup 1 \cup 2 \cup 3]}$, $\Gamma_{(0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)}$ очевидна. Теорема доказана.

Отметим, что на рисунках 1 и 2 имеются пути от дистанционно-транзитивной вершины $\bar{\Gamma}_1$ к такой же вершине $\Gamma_{[0 \cup 1 \cup 2 \cup 3]}$ через не дистанционно-транзитивные графы. При этом интранзитивность группы автоморфизмов наблюдается уже на путях длины два.

Следствие 2.3. *При $n \geq 6$ следующие графы нечётных орбиталов не дистанционно-транзитивны:*

- 1) $\bar{\Gamma}_k$ при нечётном $k \geq 3$;
- 2) $\bar{\Gamma}_{(1)}$, $\bar{\Gamma}_{(3)}$ при нечётном n ;
- 3) $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k}$ при $k \geq 2$;
- 4) $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k}$ при нечётном $k \geq 1$;
- 5) $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1}$ при нечётном $k \geq 2$;
- 6) $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k-1}$ при нечётном $k \geq 1$;
- 7) $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k+2}$ при чётном n и $k \geq 2$;
- 8) $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k}$ при нечётном n и $k \geq 1$;
- 9) $\bar{\Gamma}_{(1)}$, $\bar{\Gamma}_{(3)}$ при нечётном n .

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.2.

Чисто технически описываются изоморфные графы среди дистанционно-транзитивных графов нечётных орбиталов, приведенных в теореме 2.2.

Утверждение 2.4. *Пусть $n \geq 6$.*

1. Графы $\bar{\Gamma}_{[1]}$, $\bar{\Gamma}_{[3]}$ изоморфны только при $n \equiv 0 \pmod{4}$.
2. Графы $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}$, $\bar{\Gamma}_{(2 \cup 3)}$ изоморфны только при $n \equiv 3 \pmod{4}$.
3. Графы $\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}$, $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 3)}$ изоморфны только при $n \equiv 1 \pmod{4}$.
4. Графы $\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]}$, $\bar{\Gamma}_{[2 \cup 3]}$ неизоморфны.
5. Графы $\bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]}$, $\bar{\Gamma}_{[0 \cup 3]}$ неизоморфны.

У дистанционно-транзитивных графов степени всех вершин равны. Приведем степени вершин дистанционно-транзитивных графов нечётных орбиталов.

Утверждение 2.5. При $n \geq 6$ параметры дистанционно-транзитивных графов нечётных орбиталей задаются следующими таблицами:

1) для любого n

Граф	Степень вершины	Диаметр графа
$\bar{\Gamma}_1$	n	n
$\bar{\Gamma}_{1 \cup 2}$	$\binom{n}{2} + n$	$\lceil n/2 \rceil$
$\bar{\Gamma}_{1 \cup n}$	$n + 1$	$\lceil n/2 \rceil$
$\bar{\Gamma}_{[1]}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+1}$	3
$\bar{\Gamma}_{[3]}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+3}$	3
$\bar{\Gamma}_{[1 \cup 3]}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+3}$	2
$\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)}$	$2^n - 1$	2
$\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1 \cup 2 \cup 3]}$	2^n	1

2) для нечётного n

Граф	Степень вершины	Диаметр графа
$\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}$ $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+2}$	3
$\bar{\Gamma}_{(2 \cup 3)}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+2} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+3}$	3
$\bar{\Gamma}_{(0 \cup 3)}$	$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \binom{n}{4k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+3}$	3
$\bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+3}$	3

3) для чётного n

Граф	Степень вершины	Диаметр графа
$\bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]} \bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+2}$	2
$\bar{\Gamma}_{[2 \cup 3]}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+2} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+3}$	2
$\bar{\Gamma}_{[0 \cup 3]}$	$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \binom{n}{4k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+3}$	2
$\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n \cup n-1}$	$2n+1 + \binom{n}{2}$	$\lceil n/2 \rceil$

Доказательство следует из работы [5].

3. Фактор-метрики дистанционно-транзитивных графов

Пусть Γ — связный граф диаметра $d \geq 1$ с множеством вершин X и естественной метрикой ρ . На множестве X зададим бинарное отношение ι_r , полагая $v_i \alpha$ тогда и только тогда, когда $\rho(\alpha, v) = r$. Для некоторых классов графов существует такое значение $r \in \overline{\{1, d\}}$, что отношение ι_r становится отношением эквивалентности. К таким классам графов относятся, например, антиподальные и двудольные графы. В случае, когда ι_r есть отношение эквивалентности, обозначим через t_r число классов эквивалентности, а через $X^{(i)}$ — класс эквивалентности, $i \in \overline{\{1, t_r\}}$.

Приведем определение двудольных и антиподальных графов с помощью бинарного отношения ι_r . Граф Γ называется двудольным, если ι_2 есть отношение эквивалентности. В частности, классы эквивалентности ι_2 называются долями и $t_2 = 2$. Граф Γ называется антиподальным, если ι_d есть отношение эквивалентности. В частности, классы эквивалентности ι_d называются классами антиподальности.

Пусть ρ — естественная метрика графа Γ , и ι_r , $r \in \{2, d\}$, является отношением эквивалентности. Определим степень графа $\Gamma^{(2)}$ связного графа Γ следующим образом. Если $r = 2$, то множеством вершин графа $\Gamma^{(2)}$

является класс эквивалентности $X^{(1)}$, а множеством ребер — $\{(\alpha, \beta) \in X^{(1)} \times X^{(1)} \mid \rho(\alpha, \beta) = 2\}$. Метрику графа $\Gamma^{(2)}$ обозначим через $\bar{\rho}_d$.

Если $r = d$, то множеством вершин графа $\bar{\Gamma}^{(2)}$ являются классы эквивалентности $X^{(1)}, \dots, X^{(t_r)}$, а множеством ребер — $\{(X^{(i)}, X^{(j)}) \mid \exists (\alpha, \beta) \in X^{(i)} \times X^{(j)} : \rho(\alpha, \beta) = 1\}$. Известно [10], если Γ — двудольный дистанционно-транзитивный граф, то графы

$$\Gamma^{(2)} = (X^{(1)}, \{(\alpha, \beta) \in X^{(1)} \times X^{(1)} \mid \rho(\alpha, \beta) = 2\}),$$

$$\Gamma' = (X^{(2)}, \{(\alpha, \beta) \in X^{(2)} \times X^{(2)} \mid \rho(\alpha, \beta) = 2\}),$$

порождаемые разными долями $X^{(1)}, X^{(2)}$, являются изоморфными дистанционно-транзитивными графами диаметра $\lfloor d/2 \rfloor$. Граф $\Gamma^{(2)}$ также дистанционно-транзитивен диаметра $\lfloor d/2 \rfloor$. Метрику графа $\Gamma^{(2)}$ обозначим как $\bar{\rho}_a$.

Для дистанционно-транзитивных графов с импримитивной группой автоморфизмов известен следующий результат.

Теорема 3.1 [15]. *Конечный дистанционно-транзитивный граф Γ валентности больше двух с импримитивной группой автоморфизмов $\text{Aut}(\Gamma)$ или двудольный, или антиподальный, причем блоками импримитивности $\text{Aut}(\Gamma)$ являются доли для двудольного графа или классы антиподальности для антиподального графа.*

Таким образом, если валентность дистанционно-транзитивного графа больше двух и задана система импримитивности его группы автоморфизмов, то двудольность и антиподальность графа доказываются несложно.

Дистанционно-транзитивные графы нечётных орбиталов (теорема 2.2) имеют валентность, равную длине подорбиты, а потому большую двух. Опишем метрики этих графов, получающиеся при факторизации по блокам импримитивности групп автоморфизмов, выявим двудольные и антиподальные графы среди них. Блоки импримитивности групп автоморфизмов описаны в работах [4] и [5]. В частности, описываются примитивные дистанционно-транзитивные графы нечётных орбиталов (с примитивной группой автоморфизмов) и импримитивные графы (с импримитивной группой автоморфизмов).

В таблице в столбце «тип» ставится символ «а», если граф антиподальный, и «д» — граф двудольный, иначе ставится прочерк. Также в таблице прочерки означают несуществование соответствующего графа, а значит, и фактор-метрики. Если граф не является дистанционно-транзитивным, то ему соответствует пустая ячейка.

Теорема 3.2. При $n \geq 6$ дистанционно-транзитивные графы нечётных орбиталов подсхем схемы Хемминга обладают следующими свойствами, приведенными в таблице:

Граф	нечётное n			чётное n		
	тип: а, д	$\bar{\rho}_a$	$\bar{\rho}_d$	тип: а, д	$\bar{\rho}_a$	$\bar{\rho}_d$
$\bar{\Gamma}_{1 \cup 2}$	а	$\rho_1^{(4)}$	—	—	—	—
$\bar{\Gamma}_{1 \cup n}$	д	—	$\rho_{1,1}^{(5)}$	—	—	—
$\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n \cup n-1}$				—	—	—
$\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]}$				—	—	—
$\bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]}$				—	—	—
$\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}$	а	$\rho_2^{(6)}$ при $n \equiv 1 \pmod{4}$, $\rho_{1,1}^{(2)}$ при $n \equiv 3 \pmod{4}$	—			
$\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}$	а	$\rho_2^{(6)}$ при $n \equiv 3 \pmod{4}$, $\rho_{0,1}^{(2)}$ при $n \equiv 1 \pmod{4}$	—			
$\bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)}$	а, д	$\rho_2^{(6)}$	$\rho_2^{(6)}$			
$\bar{\Gamma}_{[1 \cup 3]}$	д	—	$\rho_2^{(6)}$	д	—	$\rho_2^{(6)}$
$\bar{\Gamma}_{[1]}$	д	—	$\rho_2^{(6)}$	д	—	$\rho_2^{(6)}$
$\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1 \cup 2 \cup 3]}$	—	—	—	—	—	—
$\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)}$	а	$\rho_2^{(6)}$	—	а	$\rho_2^{(6)}$	—

Доказательство. Согласно теореме 2.2 достаточно описать блоки им-примитивности групп автоморфизмов следующих графов:

- а) $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_{1 \cup 2}, \bar{\Gamma}_{1 \cup n}, \bar{\Gamma}_{[1]}, \bar{\Gamma}_{[3]}, \bar{\Gamma}_{[1 \cup 3]}, \bar{\Gamma}_{[0 \cup 1 \cup 2 \cup 3]}, \bar{\Gamma}_{(0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)}$ при любом $n \geq 6$;
 б) $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}, \bar{\Gamma}_{(2 \cup 3)}, \bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}, \bar{\Gamma}_{(0 \cup 3)}, \bar{\Gamma}_{(1 \cup 3)}$ при нечётном $n \geq 6$;
 в) $\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]}, \bar{\Gamma}_{[2 \cup 3]}, \bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]}, \bar{\Gamma}_{[0 \cup 3]}, \bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n \cup n-1}$ при чётном $n \geq 6$.

1. Граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2}$. Если n нечётно, то группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup 2})$ импримитивна с системой импримитивности $\{(\alpha, \alpha + \bar{1}) | \alpha \in W_n\}$. Следовательно, граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2}$ — антиподальный. Орбитами фактор-группы $\overline{\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup 2})_0}$ являются множества $\Delta_0^{(n-1)}, \Delta_1^{(n-1)} \cup \Delta_2^{(n-1)}, \dots, \Delta_{2k-1}^{(n-1)} \cup \Delta_{2k}^{(n-1)}, \dots$. Значит, метрика графа $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2}^2$ задаётся равенством $\bar{\rho}(\alpha, \beta) = \left\lceil \frac{\|\alpha + \beta\|}{2} \right\rceil$, $\alpha, \beta \in V_{n-1}$, и совпадает с метрикой $\rho_1^{(4)}$.

Если n чётно, то группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup 2})$ примитивна. Следовательно, граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2}$ не является антиподальным или двудольным. Значит, у него нет фактор-метрики.

2. Граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup n}$. Если n нечётно, то группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup n})$ импримитивна с системой импримитивности $\{W_n, W_n + \bar{1}\}$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup n}$ — двудольный. Кроме того, граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup n}^{(2)}$ связный с множеством вершин W_n и метрикой $\bar{\rho}(\alpha, \beta) = \rho_{1,1}^{(3)}(\alpha, \beta) / 2$, $\alpha, \beta \in W_n$. Поскольку $\overline{\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup n})} = AS_{n-1}^{(2)}$, то фактор-метрика задаётся равенством

$$\bar{\rho}(\alpha, \beta) = \min \left\{ \left\lceil \|\alpha + \beta\| / 2 \right\rceil, (n-1) / 2 + 1 - \left\lceil \|\alpha + \beta\| / 2 \right\rceil \right\}, \quad \alpha, \beta \in V_{n-1},$$

и совпадает с метрикой $\rho_{1,1}^{(5)}$.

Если n чётно, то группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup n})$ примитивна. Таким образом, граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup n}$ не является антиподальным или двудольным.

3. Граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n-1 \cup n}$, чётное n . Группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n-1 \cup n})$ примитивна. Таким образом, граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup 2 \cup n-1 \cup n}$ не является антиподальным или двудольным.

4. Графы $\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]}, \bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]}$, чётное n . Поскольку группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]})$, $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]})$ примитивны, графы $\bar{\Gamma}_{[0 \cup 1]}, \bar{\Gamma}_{[1 \cup 2]}$ не являются антиподальными или двудольными.

5. Граф $\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}$, нечётное n . Группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)})$ импримитивна с системой импримитивности $\{(\alpha, \alpha + \bar{1}) | \alpha \in W_n\}$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}$ — антиподальный. Рассмотрим два случая.

5.1. Если $n \equiv 1 \pmod{4}$, то отображение $f_1: \alpha \rightarrow \alpha + \bar{1}$ обладает свойством $(\Lambda_0 \cup \Lambda_3)^{f_1} = (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ и орбитами фактор-группы $\overline{\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)})_0}$ явля-

ются $\Delta_0^{(n-1)}, \Theta_0^{(n-1)} \cup \Theta_1^{(n-1)} \cup \Theta_2^{(n-1)} \cup \Theta_3^{(n-1)}$. Таким образом, метрика $\bar{\rho}$ графа $\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}^2$ тривиальная, т. е. $\bar{\rho}(\alpha, \beta) = 1$ для любых $\alpha, \beta \in V_{n-1}$, $\alpha \neq \beta$.

5.2. Если $n \equiv 3 \pmod{4}$, то отображение $f_1: \alpha \rightarrow \alpha + \bar{1}$ обладает свойством $\Lambda_0^{f_1} = \Lambda_3$, $\Lambda_1^{f_1} = \Lambda_2$ и $\Delta_0^{(n-1)}, \Theta_1^{(n-1)} \cup \Theta_2^{(n-1)}, \Theta_0^{(n-1)} \cup \Theta_3^{(n-1)}$ — орбиты фактор-группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)})_{\bar{0}}$. Значит, метрика графа $\bar{\Gamma}_{(1 \cup 2)}^2$ задаётся равенством

$$\bar{\rho}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \|\alpha + \beta\| \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ 2, & \|\alpha + \beta\| \equiv 0, 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

для любых $\alpha, \beta \in V_{n-1}$, $\alpha \neq \beta$, и совпадает с метрикой $\rho_{1,1}^{(2)}$.

6. Граф $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}$, нечётное n . Группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)})$ импримитивна с системой импримитивности $\{(\alpha, \alpha + \bar{1}) | \alpha \in W_n\}$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}$ — антиподальный.

6.1. Если $n \equiv 1 \pmod{4}$, то отображение $f_1: \alpha \rightarrow \alpha + \bar{1}$ обладает свойством $\Lambda_0^{f_1} = \Lambda_1$, $\Lambda_2^{f_1} = \Lambda_3$ и орбитами фактор-группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)})_{\bar{0}}$ являются $\Delta_0^{(n-1)}$, $\Theta_0^{(n-1)} \cup \Theta_1^{(n-1)}$, $\Theta_2^{(n-1)} \cup \Theta_3^{(n-1)}$. Таким образом, метрика графа $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}^{(2)}$ задаётся равенством

$$\bar{\rho}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \|\alpha + \beta\| \equiv 0, 1 \pmod{4}, \\ 2, & \|\alpha + \beta\| \equiv 2, 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

для любых $\alpha, \beta \in V_{n-1}$, $\alpha \neq \beta$.

6.2. Если $n \equiv 3 \pmod{4}$, то отображение $f_1: \alpha \rightarrow \alpha + \bar{1}$ обладает свойством $(\Lambda_0 \cup \Lambda_1)^{f_1} = \Lambda_2 \cup \Lambda_3$ и орбитами фактор-группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)})_{\bar{0}}$ являются $\Delta_0^{(n-1)}$, $\Theta_0^{(n-1)} \cup \Theta_1^{(n-1)} \cup \Theta_2^{(n-1)} \cup \Theta_3^{(n-1)}$. Следовательно, метрика графа $\bar{\Gamma}_{(0 \cup 1)}$ тривиальная.

7. Граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup 3}$, нечётное n . Группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1 \cup 3})$ импримитивна с системами импримитивности $\{(\alpha, \alpha + \bar{1}) | \alpha \in W_n\}$ и $\{W_n, W_n + \bar{1}\}$. Следовательно, граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup 3}$ — двудольный и антиподальный.

7.1. Орбитами фактор-группы $\overline{\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1\cup 3})}_0$, полученной факторизацией группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1\cup 3})$ по системе импримитивности $\{(\alpha, \alpha + \bar{1}) | \alpha \in W_n\}$, являются $\Delta_0^{(n-1)}$, $\Theta_1^{(n-1)} \cup \Theta_3^{(n-1)} \cup \Theta_0^{(n-1)} \cup \Theta_2^{(n-1)}$. Значит, метрика графа $\bar{\Gamma}_{1\cup 3}$ тривиальна.

7.2. Фактор-группа $\overline{\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1\cup 3})}_0$, полученная факторизацией группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{1\cup 3})$ по системе импримитивности $\{W_n, W_n + \bar{1}\}$, изоморфна $S_{2^{n-1}}$. Следовательно, фактор-метрика в этом случае также тривиальна.

8. Графы $\bar{\Gamma}_{[1\cup 3]}$, $\bar{\Gamma}_{[1]}$. Для любого n группы $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[1\cup 3]})$, $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[1]})$ импримитивны с системой импримитивности $\{W_n, W'_n\}$, где $W'_n = V_n \setminus W_n$.

Следовательно, графы $\bar{\Gamma}_{[1\cup 3]}$, $\bar{\Gamma}_{[1]}$ — двудольные. Нетрудно убедиться, что фактор-метрики графов $\bar{\Gamma}_{[1\cup 3]}^2$, $\bar{\Gamma}_{[1]}^2$ тривиальны.

9. Граф $\bar{\Gamma}_{[0\cup 1\cup 2\cup 3]}$. Для любого n группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{[0\cup 1\cup 2\cup 3]})$ примитивна.

10. Граф $\bar{\Gamma}_{(0\cup 1\cup 2\cup 3)}$. Для любого n группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(0\cup 1\cup 2\cup 3)})$ импримитивна с системой импримитивности $\{(\alpha, \alpha + \bar{1}) | \alpha \in V_n\}$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{(0\cup 1\cup 2\cup 3)}$ — антиподальный с тривиальной метрикой. Утверждение доказано.

Таким образом, в теореме 3.2 установлена связь между подметриками и их фактор-метриками для дистанционно-транзитивных графов орбиталов при различных значениях n , а также описаны двудольные и антиподальные графы орбиталов.

Напомним [1], что если граф первого орбитала Γ является двудольным, то порождаемая степенями его матрицы смежности схема отношений H называется двудольной.

На множестве схем отношений определим унарную операцию «двудольности» $\bar{\cdot}$ следующим образом:

- а) если H — двудольная схема, то $\bar{\cdot}H$ задается степенями матрицы смежности графа $\bar{\Gamma}^2$, порожденного отношением эквивалентности l_2 ;
- б) если H не является двудольной схемой, то $\bar{\cdot}H = H$.

Для двудольной схемы H схема $\bar{\cdot}H$ называется (см., например, [1]) половинной схемой двудольной схемы.

Если граф нечётного орбитала Γ является антиподальным, то схема отношений H , порождаемая степенями его матрицы смежности, называется антиподальной [1].

На множестве схем отношений определим унарную операцию «антиподальности» $\odot$ следующим образом:

- а) если H — антиподальная схема, то схема $\odot H$ задается степенями матрицы смежности графа $\bar{\Gamma} = \Gamma^{[2]}$, порожденного отношением эквивалентности ι_d , где d — диаметр графа $\bar{\Gamma}$;
- б) если H не является антиподальной схемой, то $\odot H = H$.

Для антиподальной схемы H схема $\odot H$ называется (см., например, [1]) производной схемой антиподальной схемы.

Теорема. 3.3. *Множество подсхем схемы Хемминга замкнуто относительно унарных операций « $\bar{\cdot}$ » и « $\odot$ ».*

Доказательство следует из утверждения 3.2 и работы [4].

Из теоремы 3.3 следует отсутствие новых классов подметрик среди полученных фактор-метрик дистанционно-транзитивных графов, отличных от рассмотренных в работе [5].

4. Дистанционно-регулярные графы нечетных орбиталов

Кроме дистанционно-транзитивных графов к важным классам графов относятся также дистанционно-регулярные графы. Любой дистанционно-транзитивный граф является дистанционно-регулярным, но обратное неверно.

Рассмотрим произвольный граф $\Gamma = (X, Y)$ диаметра d с кратчайшим расстоянием ρ между вершинами. Для произвольных вершин $u, v \in X$, $\rho(u, v) = j$, обозначим

$$p_{i,h}^{(j)}(u, v) = |\{w \in X \mid \rho(u, w) = i, \rho(w, v) = h\}|, \quad i, j, h \in \overline{1, d}.$$

Напомним, что граф $\Gamma = (X, Y)$ называется дистанционно-регулярным, если для любого $j \in \overline{1, d}$ и любых вершин $u, v, u', v' \in X$, $\rho(u, v) = \rho(u', v') = j$, выполняются равенства $p_{1,h}^{(j)}(u, v) = p_{1,h}^{(j)}(u', v') = p_h^{(j)}$, где

$$h \in \begin{cases} \{j-1, j, j+1\}, & \text{если } 2 \leq j \leq d-1, \\ \{1, 2\}, & \text{если } j = 1, \\ \{d-1, d\}, & \text{если } j = d, \end{cases}$$

т. е. значение величины $p_{1,h}^{(j)}$ не зависит от конкретных вершин, находящихся на расстоянии j в графе Γ .

Приведем дистанционно-регулярные графы нечётных орбиталов подсхем схемы Хемминга.

Теорема 4.1. Среди нечётных орбиталов подсхем схемы Хемминга дистанционно-регулярными графами являются только дистанционно-транзитивные графы.

Доказательство. Достаточно рассмотреть только графы, приведенные в следствии 2.3 и не являющиеся дистанционно-транзитивными.

Пусть μ — подметрика некоторой схемы Хемминга, $\|\alpha\|_\mu = \mu(\alpha, \vec{0})$. Поскольку

$$\mu(\alpha, \beta) = \mu(\vec{0}, \alpha + \beta) = \|\alpha + \beta\|_\mu$$

для произвольных вершин $\alpha, \beta \in V_n$, то для доказательства отсутствия дистанционной регулярности достаточно показать зависимость величины

$$p_{1,h}^{(j)}(\vec{0}, \theta) = \left| \left\{ \gamma \in V_n \mid \|\gamma\|_\mu = 1, \|\theta + \gamma\|_\mu = h \right\} \right|$$

от конкретного $\theta \in V_n$, $\|\theta\|_\mu = j$. При доказательстве дистанционной нерегулярности для каждого из графов будем находить величины $p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1)$, $p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2)$ для двух разных векторов $\theta_1, \theta_2 \in V_n$, $\|\theta_1\|_\mu = \|\theta_2\|_\mu = 2$.

Пусть $\varepsilon_t = (0 \dots 0 \overset{t}{1} 0 \dots 0)$ — векторы-строки из пространства V_n , $t \in \overline{1, n}$,
 $\lambda_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$, $t \geq 1$.

Будем придерживаться таких же обозначений, как в доказательстве теоремы 2.2.

1. Граф $\bar{\Gamma}_k$, $k \geq 3$, $\mu = \chi_k$. Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_k(\vec{0}) &= \Delta_k, \\ \Delta_2 \cup \Delta_{2k} &\subseteq \bar{\Gamma}_k^2(\vec{0}) \text{ при } k \leq \lfloor n/2 \rfloor, \\ \Delta_2 \cup \Delta_{2(n-k)} &\subseteq \bar{\Gamma}_k^2(\vec{0}) \text{ при } k > \lfloor n/2 \rfloor. \end{aligned}$$

Пусть $\theta_1 = \lambda_2$,

$$\theta_2 = \begin{cases} \lambda_{2k}, & \text{если } k \leq \lfloor n/2 \rfloor, \\ \lambda_{2(n-k)}, & \text{если } k > \lfloor n/2 \rfloor. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что для любого вектора $\theta \in \Delta_j$ выполняется равенство

$$\left| \left\{ \gamma \in V_n \mid \|\gamma\| = h, \|\theta + \gamma\| = l \right\} \right| = \binom{j}{\frac{h+j-l}{2}} \binom{n-j}{\frac{h+l-j}{2}}. \quad (4.1)$$

Таким образом,

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) = \binom{2}{1} \binom{n-2}{k-1},$$

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2) = \begin{cases} \binom{2k}{k}, & \text{если } k \leq \lfloor n/2 \rfloor, \\ \binom{2(n-k)}{n-k} \binom{n-2(n-k)}{k-(n-k)}, & \text{если } k > \lfloor n/2 \rfloor. \end{cases}$$

Поскольку $p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) \neq p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2)$, граф $\bar{\Gamma}_k$ не является дистанционно-регулярным.

2. Графы $\bar{\Gamma}_{(1)}$, $\bar{\Gamma}_{(3)}$ при нечётном n . Для $k \in \{1, 3\}$ справедливы соотношения:

$$\bar{\Gamma}_k(\vec{0}) = \Lambda_k, \quad \bar{\Gamma}_{(k)}^2(\vec{0}) = \Lambda_2 \cup \Lambda_0.$$

Положим $\theta_1 = \lambda_2$, $\theta_2 = \lambda_4$. Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1-k)/4 \rfloor} \binom{2}{1} \binom{n-2}{4i+k-1},$$

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2) = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor (n-4-k)/4 \rfloor} \binom{n-4}{4i+k} + \sum_{i=0}^{\lfloor (n-2-k)/4 \rfloor} \binom{4}{2} \binom{n-4}{4i+k-2}$$

и в том, что $p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) \neq p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2)$. Следовательно, графы $\bar{\Gamma}_{(1)}$, $\bar{\Gamma}_{(3)}$ не являются дистанционно-регулярными.

3. Граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k}$. Справедливы соотношения:

$$\bar{\Gamma}_{1 \cup n-1}^2(\vec{0}) = (\Delta_2 \cup \Delta_{n-2}) \cup \Delta_n;$$

$$\Delta_2 \cup \Delta_n \subseteq \bar{\Gamma}_{k \cup n-k}^2(\vec{0}).$$

Положим $\theta_1 = \lambda_2$, $\theta_2 = \lambda_n$. Применяя равенство (4.1), получаем

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2) = \binom{n}{k} + \binom{n}{n-k} = 2 \binom{n}{k},$$

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) = \begin{cases} \binom{2}{1} \binom{n-2}{k-1} + \binom{2}{1} \binom{n-2}{n-(k-1)}, & \text{если } 2k \neq n-2, \\ \binom{2}{1} \binom{n-2}{k-1} + \binom{2}{1} \binom{n-2}{n-(k-1)} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{n-k-2}, & \text{если } 2k = n-2, \end{cases}$$

т. е.

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) = \begin{cases} 2 \binom{n-2}{k-1} + 2 \binom{n-2}{k-3}, & \text{если } 2k \neq n-2, \\ 2 \binom{n-1}{k} + 2 \binom{n-2}{k-3}, & \text{если } 2k = n-2, \end{cases}$$

Значит, $p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) \neq p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2)$ и граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k}$ не является дистанционно-регулярным.

4. Граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1}$, $k > 1$. Очевидно, что достаточно рассмотреть только $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Справедливо соотношение:

$$\Delta_2 \cup \Delta_4 \cup \Delta_{2k} \subseteq \bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1}^2(\vec{0}) \text{ при } k \leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

Положим $\theta_1 = \lambda_2$, $\theta_2 = \lambda_4$. Применяя равенство (4.1) и используя свойства биномиальных коэффициентов, получаем:

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) = \begin{cases} 2 \binom{n-1}{k-1}, & \text{если } 2k \neq n-1, \\ \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{если } 2k = n-1, \end{cases}$$

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2) = \begin{cases} \binom{4}{2} \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k}, & \text{если } 2k = n-3, \\ \binom{4}{2} \binom{n-3}{k-2} + 4 \binom{n-3}{k-1}, & \text{если } 2k = n-3, \\ \binom{4}{2} \binom{n-3}{k-2} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что $p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) \neq p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2)$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k+1}$ при $k > 1$ не является дистанционно-регулярным.

5. Граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k-1}$. Очевидно, что достаточно рассмотреть только $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, k или $n-k-1$ нечётные. Справедливо соотношение:

$$\Delta_2 \cup \Delta_4 \cup \Delta_{2k} \subseteq \bar{\Gamma}_{k \cup n-k-1}^2(\vec{0}) \text{ при } k \leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

Положим $\theta_1 = \lambda_2$, $\theta_2 = \lambda_4$. Применяя равенство (4.1) и используя свойства биномиальных коэффициентов, получаем:

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) = \begin{cases} 2 \binom{n-1}{k}, & \text{если } 2k \neq n-3, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k+1}, & \text{если } 2k = n-3, \end{cases}$$

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2) = \begin{cases} \binom{4}{2} \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k+1}, & \text{если } 2k = n-5, \\ \binom{4}{2} \binom{n-3}{k-1} + 4 \binom{n-4}{k-1} + 4 \binom{n-3}{k}, & \text{если } 2k = n-3, \\ \binom{4}{2} \binom{n-3}{k-1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что $p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) \neq p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2)$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{k \cup n-k-1}$ не является дистанционно-регулярным.

6. $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k}$, $k > 1$. Справедливо соотношение

$$\Delta_2 \cup \Delta_4 \subseteq \bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k}^2(\vec{0}).$$

Положим $\theta_1 = \lambda_2$, $\theta_2 = \lambda_4$. Применяя равенство (4.1) и используя свойства биномиальных коэффициентов, получаем:

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) = \binom{2}{1} \binom{n-2}{2k-2} + \binom{2}{1} \binom{n-2}{2k-1} = 2 \binom{n-1}{2k-1},$$

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2) = \binom{4}{2} \binom{n-4}{2k-3} + \binom{4}{2} \binom{n-4}{2k-2} = 2 \binom{n-3}{2k-2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) \neq p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2)$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k}$ при $k > 1$ не является дистанционно-регулярным.

7. Граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k+2}$ при чётном n , $k > 1$. Справедливо соотношение:

$$\Delta_2 \cup \Delta_4 \subseteq \bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k+2}^2(\vec{0}).$$

Рассмотрим $\theta_1 = \lambda_2$, $\theta_2 = \lambda_4$. Применяя равенство (4.1) и используя свойства биномиальных коэффициентов, получаем:

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) = \begin{cases} 2 \binom{n}{2k-1}, & \text{если } n \neq 4k, \\ \binom{n}{2k-1} + \binom{n+1}{2k}, & \text{если } n = 4k, \end{cases}$$

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2) = \begin{cases} \binom{4}{2} \binom{n-2}{2k-2}, & \text{если } 4k \notin \{n, n-2\}, \\ \binom{4}{2} \binom{n-2}{2k-2} + \binom{4}{1} \binom{n-3}{2k-1} + \binom{4}{3} \binom{n-3}{2k-2}, & \text{если } n = 4k, \\ \binom{4}{2} \binom{n-2}{2k-2} + \binom{n-2}{2k}, & \text{если } n-2 = 4k, \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что $p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) \neq p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2)$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k+2}$ при чётном n , $k > 1$, не является дистанционно-регулярным.

8. Граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k}$ при нечётном n . Справедливо соотношение:

$$\Delta_2 \cup \Delta_4 \subseteq \bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k}^2(\vec{0}).$$

Положим $\theta_1 = \lambda_2$, $\theta_2 = \lambda_4$. Применяя равенство (4.1) и используя свойства биномиальных коэффициентов, получаем:

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) = \begin{cases} 4 \binom{n-1}{2k-1}, & \text{если } n-1 \neq 4k, \\ 4 \binom{n-1}{2k-1} + 2 \binom{n-1}{2k}, & \text{если } n-1 = 4k, \end{cases}$$

$$p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2) = \begin{cases} 2 \binom{4}{2} \binom{n-3}{2k-2}, & \text{если } 4k \notin \{n, n-2\}, \\ 2 \binom{4}{2} \binom{n-3}{2k-2} + \binom{4}{1} \binom{n-3}{2k-1} + \binom{4}{3} \binom{n-3}{2k-1}, & \text{если } n-1 = 4k, \\ 2 \binom{4}{2} \binom{n-3}{2k-2} + 2 \binom{n-3}{2k}, & \text{если } n-3 = 4k. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что $p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_1) \neq p_{1,1}^{(2)}(\vec{0}, \theta_2)$. Значит, граф $\bar{\Gamma}_{2k-1 \cup 2k \cup n-2k+1 \cup n-2k}$ при нечётном n не является дистанционно-регулярным. Теорема доказана.

Список литературы

1. Баннаи Э., Ито Т. Алгебраическая комбинаторика. — М.: Мир, 1987, 373 с.
2. Музычук М. Е. Подсхемы схемы Хемминга. Исследования по алгебраической теории комбинаторных объектов. — В сб.: ВНИИ системных исследований. Труды семинара. — М., 1985, с. 49–76.
3. Погорелов Б. А. Подметрики метрики Хемминга и теорема А. А. Маркова. В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 9. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
4. Погорелов Б. А., Пудовкина М. А. Подметрики метрики Хемминга и преобразования, распространяющие искажения в заданное число раз. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 10. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
5. Погорелов Б. А., Пудовкина М. А. Подметрики Хемминга и их группы изометрий. В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 11. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
6. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973, 300 с.
7. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-regular graphs. — Berlin: Springer-Verlag, 1989.
8. van Bon J. T. M., Brouwer A. E. The distance-regular antipodal covers of classical distance-regular graphs. — In: Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Proc. Eger, 1987, p. 141–166.
9. Brouwer A. E., Koolen J. H. The distance-regular graphs of valency four. — In: J. Algebr. Combin. 1999, v. 10, p. 5–24.
10. Cameron P. J. Permutation groups. — London Math. Soc. Student Texts. V. 45. In: Cambridge Univ. Press, 1999.
11. Godsil C. Association schemes. — Lect. notes, Univ. Waterloo, 2004.

12. *Ivanov A. A.* Distance-transitive graphs and their classification. — In: Investigations in algebraic theory of combinatorial objects. — Dordrecht: Kluwer, 1994, p. 283–378.
13. *Ivanov A. A.* Liebler R., Penttila T., Praeger C. Antipodal distance-transitive covers of complete bipartite graphs. — European J. Combin., 1997, v. 18, p. 11–33.
14. *Praeger C. E.* Finite transitive permutation groups and bipartite vertex-transitive graphs. — Illinois J. Math., 2003, v. 47, p. 461–475.
15. *Smith D. H.* Primitive and imprimitive graphs. — Quart. J. Math. Oxford, 1971, v. 22, p. 551–557.
16. *Soicher L. H.* The GRAPE package for GAP. — <http://www.maths.qmul.ac.uk/~leonard/grape>.
17. *Soicher L. H.* Three new distance-regular graphs. — Europ. J. Comb. 1993, v. 14, p. 501–505.