Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Круглов, Авторегрессия на конечной абелевой группе с марковской входной последовательностью, *Матем. вопр. криптогр.*, 2011, том 2, выпуск 4, 25–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk41>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 04:20:58

УДК: 519.217.2

Авторегрессия на конечной абелевой группе с марковской входной последовательностью

И. А. Круглов

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 23.VI.2011

В статье доказан аналог принципа сходимости Б.М.Клосса для последовательностей случайных величин из указанной в заглавии схемы суммирования случайных величин со значениями в конечных абелевых группах.

Ключевые слова: цепи Маркова на группах, условные распределения, предельные теоремы

Autoregression on a finite Abelian group controlled by a Markov chain

I. A. Kruglov

LLC Certification Research Center, Moscow

Abstract. An analog of convergence principle due to B.M.Kloss is proved for autoregressive sequences of random variables on a finite Abelian group controlled by a Markov chain.

Key words: Markov chains on groups, conditional distributions, limit theorems

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2011, vol. 2, no. 4, pp. 25–36 (Russian).

© 2011 И. А. Круглов

В статье рассматривается следующий способ образования случайных величин, который получил название схемы авторегрессии на конечной группе.

Пусть

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \quad (1)$$

— конечная простая однородная неразложимая цепь Маркова с множеством состояний $\{1, 2, \dots, n\}$, матрицей переходных вероятностей $P = \|p(i, j)\|_{i,j=1}^n$ и некоторым положительным вектором начального распределения, $(G; \cdot)$ — конечная абелева группа. Предположим, что для каждого $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ задана последовательность $\{\xi_{i,j}^{(N)}\}$ одинаково распределенных со случайной величиной $\xi_{i,j}$ случайных величин со значениями в группе G . Будем предполагать, что случайные величины $\xi_{i,j}^{(N)}, N \geq 1, i, j \in \{1, \dots, n\}$, и цепь Маркова (1) независимы в совокупности. Предположим, что задан автоморфизм группы G :

$$\varphi: G \rightarrow G.$$

Определим случайные величины со значениями в группе G :

$$\zeta^{(N)} = \left(\left(\dots (\xi_{\alpha_1, \alpha_2}^{(1)})^\varphi \cdot \dots \right)^\varphi \cdot \xi_{\alpha_{N-1}, \alpha_N}^{(N-1)} \right)^\varphi \cdot \xi_{\alpha_N, \alpha_{N+1}}^{(N)}, \quad N \geq 1. \quad (2)$$

Для любого $N \geq 1$ пусть

$$P^N = \|p^{(N)}(i, j)\|_{i,j=1}^n$$

— матрица переходных вероятностей цепи Маркова $\{\alpha_t\}$ за N шагов. Для таких $i, j \in \{1, \dots, n\}, N \geq 1$, что $p^{(N)}(i, j) > 0$, обозначим через $\zeta_{i,j}^{(N)}$ случайную величину со значениями в группе G , распределение которой совпадает с условным распределением $\zeta^{(N)}$ при условии $\alpha_1 = i, \alpha_{N+1} = j$. Нас будет интересовать предельное поведение последовательностей распределений случайных величин $\zeta_{i,j}^{(N)}$ при $N \rightarrow \infty$.

Последовательность (2) в случае $n = 1$, т. е. схема авторегрессии в случае, когда $\{\alpha_t\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, исследовалась в [3]. Условия предельной равномерности распределений случайных величин $\zeta_{i,j}^{(N)}$ на группе G при $N \rightarrow \infty$ указаны автором в [4].

Введем обозначения, необходимые для формулировки основной теоремы. Пусть $\text{ord} \varphi$ — порядок автоморфизма φ , d — число циклических классов цепи Маркова (1), f — наименьшее общее кратное чисел d и $\text{ord} \varphi$. Рассмотрим ориентированный граф Γ (см. [1]) с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$ и множеством ориентированных ребер $\{e_{i,j}^{+1}, e_{j,i}^{-1} | i, j \in \{1, \dots, n\}, p^{(f)}(i, j) > 0\}$.

Путем в Γ назовем произвольную последовательность ориентированных ребер вида

$$z = e_{i_1, i_2}^{\varepsilon_1}, e_{i_2, i_3}^{\varepsilon_2}, \dots, e_{i_k, i_{k+1}}^{\varepsilon_k}. \quad (3)$$

Путь z вида (3) называется петлей, если $i_1 = i_{k+1}$. Для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $R \in \mathbb{Z}$ обозначим через $L_R(i, j)$ множество всех путей z вида (3), для которых $i_1 = i, i_{k+1} = j, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k = R$, при этом в случае, когда $L_R(i, j) \neq \emptyset$, для любого $z \in L_R(i, j)$ мы будем использовать обозначение $l(z) = R$.

Для произвольной случайной величины ξ со значениями в G обозначим через $\Omega(\xi)$ носитель распределения ξ . Для любых таких $i, j \in \{1, \dots, n\}$, что $p^{(f)}(i, j) > 0$, определим подмножества элементов группы G :

$$\overline{\Omega}(e_{i,j}^{+1}) = \Omega(\zeta_{i,j}^{(f)}), \quad \overline{\Omega}(e_{j,i}^{-1}) = \Omega(\zeta_{i,j}^{(f)})^{-1}.$$

Пути z вида (3) поставим в соответствие множество элементов группы G :

$$\overline{\Omega}(z) = \overline{\Omega}(e_{i_1, i_2}^{\varepsilon_1}) \cdot \overline{\Omega}(e_{i_2, i_3}^{\varepsilon_2}) \cdot \dots \cdot \overline{\Omega}(e_{i_k, i_{k+1}}^{\varepsilon_k}). \quad (4)$$

Пусть $D_1, D_2, \dots, D_d$ — циклические классы состояний цепи Маркова (1). Можно считать, что для любого $\mu \in \{1, \dots, d\}$ из состояний класса D_μ в цепи Маркова (1) возможен переход только в состояния класса $D_{\mu+1}$ (здесь $D_{d+1} = D_1$). Так как d делит f , то (см. [6]) существует натуральное число N_0 , при котором для любых $\mu \in \{1, \dots, d\}, i, j \in D_\mu, N \geq N_0$

$$p^{(N \cdot f)}(i, j) > 0. \quad (5)$$

Отсюда следует, что для любых $\mu \in \{1, \dots, d\}, i, j \in D_\mu, R \in \mathbb{Z}$ множество $L_R(i, j) \neq \emptyset$.

Зафиксируем произвольно петлю $z_1 \in L_1(1, 1)$ и элемент $x_1 \in \overline{\Omega}(z_1)$; пусть $Z^{(1)}$ — множество всех путей вида (3), удовлетворяющих соотношению $i_1 = i_{k+1} = 1$; обозначим через H_1 минимальную подгруппу среди всех подгрупп L группы G , для которых при любом $z \in Z^{(1)}$ выполнено включение

$$\overline{\Omega}(z) \subset x_1^{l(z)} \cdot L.$$

Для произвольных $i, j \in \{1, \dots, n\}$ пусть $\nu, \mu \in \{1, \dots, d\}$ таковы, что $i \in D_\nu, j \in D_\mu$; положим

$$\nu(i, j) = \begin{cases} \mu - \nu, & \text{если } \mu \geq \nu, \\ \mu - \nu + d, & \text{если } \mu < \nu, \end{cases}$$

тогда $\nu(i, j) \in \{0, 1, \dots, d-1\}$.

Из соотношения (5) следует, что для любых $N \geq 0, i, j \in \{1, \dots, n\}$ определены случайные величины $\zeta_{i,j}^{(\nu(i,j)+N \cdot d+N_0 \cdot f)}$.

Для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}, t \in \{0, 1, \dots, f/d - 1\}$ зафиксируем произвольно элементы

$$\tau_{i,j}^{(t)} \in \Omega \left(\zeta_{i,j}^{(\nu(i,j)+t \cdot d+N_0 \cdot f)} \right), \quad (6)$$

и для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}, N \geq 0$, таких что $p^{(\nu(i,j)+N \cdot d)}(i, j) > 0$, определим элементы $\sigma_{i,j}^{(N)}$ группы G следующим образом.

Каждое число $N \geq 0$ может быть однозначно представлено в виде

$$N = s_N + \frac{f}{d} \cdot k_N,$$

где $k_N \geq 0, s_N \in \{0, 1, \dots, f/d - 1\}$, если $\nu(i, j) > 0$, и $s_N \in \{1, 2, \dots, f/d\}$, если $\nu(i, j) = 0$. Пусть

$$t_N = \begin{cases} f/d - (s_N + 1), & \text{если } \nu(i, j) > 0, \\ f/d - s_N, & \text{если } \nu(i, j) = 0, \end{cases}$$

тогда $t_N \in \{0, 1, \dots, f/d - 1\}$.

Далее, для любого $\mu \in \{1, \dots, d\}$ через $\bar{\mu} \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ будем обозначать наименьший неотрицательный вычет μ по модулю $m = \text{НОД}(d, m)$. Положим

$$\sigma_{i,j}^{(N)} = \left((x_1)^{\varphi^{\bar{\mu}}} \right)^{-N_0 - k_N - 1} \cdot \left(\tau_{j,i}^{(t_N)} \right)^{\varphi^{(\nu(i,j)+s_N \cdot d)}}. \quad (7)$$

Следующая теорема является аналогом принципа сходимости Б. М. Клосса (см. [5]) для последовательностей случайных величин $\zeta_{i,j}^{(N)}$.

Теорема 1. Для любых $i \in \{1, \dots, n\}, \mu \in \{1, \dots, d\}, j \in D_\mu$ последовательность распределений случайных величин

$$\sigma_{i,j}^{(N)} \cdot \zeta_{i,j}^{(N)}, \quad N \geq 1, \quad p^{(\nu(i,j)+N \cdot d)}(i, j) > 0,$$

имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на подгруппе $(H_1)^{\varphi^{\bar{\mu}}}$.

Доказательство. Рассмотрим цепь Маркова

$$\alpha_1, \alpha_{f+1}, \dots, \alpha_{f \cdot N + 1}, \dots \quad (8)$$

с множеством состояний $\{1, \dots, n\}$, матрицей переходных вероятностей, равной матрице P^f , и начальным распределением, совпадающим с начальным распределением цепи Маркова (1). Множества $D_1, D_2, \dots, D_d$ — классы существенных состояний цепи Маркова (8).

Произвольной паре состояний $i, j \in \{1, \dots, n\}$, для которых $p^{(f)}(i, j) > 0$, поставим в соответствие последовательность $\{\hat{\xi}_{i,j}^{(N)}\}$ одинаково распределенных со случайной величиной $\zeta_{i,j}^{(f)}$ случайных величин со значениями в группе G . Будем предполагать, что случайные величины $\hat{\xi}_{i,j}^{(N)}, N \geq 1, i, j \in \{1, \dots, n\}$, и цепь Маркова (1) независимы в совокупности.

Определим следующие случайные величины со значениями в группе G (см. § 3 работы [2]):

$$\eta^{(N)} = \hat{\xi}_{\alpha_1, \alpha_{f+1}}^{(1)} \cdot \hat{\xi}_{\alpha_{f+1}, \alpha_{2f+1}}^{(2)} \cdot \dots \cdot \hat{\xi}_{\alpha_{f(N-1)+1}, \alpha_{fN+1}}^{(N-1)}, \quad N \geq 1.$$

Для любых $N \geq 1, i, j \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющих условию $p^{(f \cdot N)}(i, j) > 0$, рассмотрим случайную величину $\eta_{i,j}^{(N)}$ со значениями в группе G , распределение которой совпадает с условным распределением случайной величины $\eta^{(N)}$ при условии $\alpha_1 = i, \alpha_{fN+1} = j$, и докажем, что распределения случайных величин $\zeta_{i,j}^{(N \cdot f)}$ и $\eta_{i,j}^{(N)}$ совпадают.

Так как $\text{ord} \varphi$ делит f , то из (2) следует равенство

$$\begin{aligned} \zeta^{(N \cdot f)} &= \left(\dots \left(\xi_{\alpha_1, \alpha_2}^{(1)} \right)^\varphi \cdot \dots \right)^\varphi \cdot \xi_{\alpha_f, \alpha_{f+1}}^{(f)} \times \\ &\times \left(\dots \left(\xi_{\alpha_{f+1}, \alpha_{f+2}}^{(f+1)} \right)^\varphi \cdot \dots \right)^\varphi \cdot \xi_{\alpha_{2f}, \alpha_{2f+1}}^{(2f)} \cdot \dots \times \\ &\times \left(\dots \left(\xi_{\alpha_{(N-1)f+1}, \alpha_{(N-1)f+2}}^{((N-1) \cdot f+1)} \right)^\varphi \cdot \dots \right)^\varphi \cdot \xi_{\alpha_{N \cdot f}, \alpha_{N \cdot f+1}}^{(N \cdot f)}. \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует, что для любой последовательности $j_1, j_2, \dots, j_{N+1} \in \{1, \dots, n\}$, для которой

$$p^{(f)}(j_1, j_2) \cdot p^{(f)}(j_2, j_3) \cdot \dots \cdot p^{(f)}(j_N, j_{N+1}) > 0,$$

условное распределение $\zeta^{(N \cdot f)}$ при условии

$$\alpha_1 = j_1, \alpha_{f+1} = j_2, \dots, \alpha_{N \cdot f+1} = j_{N+1} \quad (9)$$

совпадает с распределением произведения независимых случайных величин,

$$\psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \dots \cdot \psi_N, \quad (10)$$

в котором для каждого $k \in \{1, \dots, N\}$ распределение ψ_k совпадает с распределением $\zeta_{j_k, j_{k+1}}^{(f)}$. Однако распределение произведения (10) совпадает с распределением случайной величины $\eta^{(N)}$ при условии реализации цепочки состояний $j_1, j_2, \dots, j_{N+1}$ в цепи Маркова (8) в первых $N + 1$ испытаниях; вероятность этого события равна вероятности осуществления события (9) для цепи Маркова (1). Из формулы полной вероятности следует совпадение распределений $\zeta_{i,j}^{(N \cdot f)}$ и $\eta_{i,j}^{(N)}$.

В [2] описано предельное поведение распределений случайных величин $\eta_{i,j}^{(N)}$, при этом введена некоторая подгруппа группы G , которая совпадает с определенной выше подгруппой H_1 .

Аналогично случаю $j = 1$ для каждого $j \in \{2, \dots, n\}$ зафиксируем произвольно петлю $z_j \in L_1(j, j)$ и элемент $x_j \in \overline{\Omega}(z_j)$; пусть $Z^{(j)}$ – множество всех путей вида (3), удовлетворяющих соотношению $i_1 = i_{k+1} = j$; обозначим через H_j минимальную подгруппу среди всех подгрупп L группы G , для которых выполнены включения

$$\overline{\Omega}(z) \subset x_j^{l(z)} \cdot L, \quad z \in Z^{(j)}. \quad (11)$$

Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu \in \{1, \dots, d\}$, $j \in D_\mu$, введем элементы

$$y_{i,j}^{(N)} = x_j^{-N_0 - k_N - 1} \cdot \left(\tau_{j,i}^{(t_N)} \right)^{\varphi^{(\nu(i,j) + s_N \cdot d)}}, \quad N \geq 1,$$

группы G и докажем, что последовательность распределений случайных величин

$$y_{i,j}^{(N)} \cdot \zeta_{i,j}^{(N)}, \quad N \geq 1, \quad p^{(\nu(i,j) + N \cdot d)}(i, j) > 0, \quad (12)$$

имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на подгруппе H_j .

Для любых $u \in \{1, \dots, n\}$, $N \geq 1$, удовлетворяющих условию $p^{(N \cdot f)}(u, j) > 0$, зафиксируем произвольно элемент

$$g_{u,j}^{(N)} \in \Omega \left(\zeta_{u,j}^{(N \cdot f)} \right).$$

Отметим, что $u \in D_\mu$ и что $\nu(i, j) = \nu(i, u)$. Из теоремы § 3 в [2] следует, что

$$\mathbf{P} \left(\left(g_{u,j}^{(N)} \right)^{-1} \cdot \zeta_{u,j}^{(N \cdot f)} = g \right) = 0, \quad g \in G \setminus H_j, N \geq 0, p^{(N \cdot f)}(u, j) > 0, \quad (13)$$

$$\mathbf{P} \left(\left(g_{u,j}^{(N)} \right)^{-1} \cdot \zeta_{u,j}^{(N \cdot f)} = h \right) = \frac{1}{|H_j|} \cdot (1 + o(1)), \quad h \in H_j, N \rightarrow \infty. \quad (14)$$

По формуле полной вероятности с учетом (13) для любого такого $N \geq 0$, что $p^{(\nu(i,j)+N \cdot d)}(i, j) > 0$, и любого $g \in G$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(y_{i,j}^{(N)} \cdot \zeta_{i,j}^{(\nu(i,j)+N \cdot d)} = g \right) &= p^{(\nu(i,j)+N \cdot d)}(i, j)^{-1} \times \\ &\times \sum_{u \in D_\mu} p^{(\nu(i,u)+s_N \cdot d)}(i, u) \cdot p^{(k_N \cdot f)}(u, j) \times \\ &\times \left[\sum_{h \in H_j} \mathbf{P} \left(y_{i,j}^{(N)} \cdot \zeta_{i,u}^{(\nu(i,u)+s_N \cdot d)} \cdot g_{u,j}^{(k_N)} = g \cdot h^{-1} \right) \times \right. \\ &\left. \times \mathbf{P} \left(\left(g_{u,j}^{(k_N)} \right)^{-1} \cdot \zeta_{u,j}^{(k_N \cdot f)} = h \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Для любых таких $u \in D_\mu, N \geq 0$, что $p^{(\nu(i,u)+s_N \cdot d)}(i, u) > 0$, рассмотрим произвольный элемент

$$\rho \in \Omega \left(\zeta_{i,u}^{(\nu(i,u)+s_N \cdot d)} \right).$$

Справедливо включение

$$\begin{aligned} \left(\tau_{j,i}^{(t_N)} \right)^{\varphi^{(\nu(i,j)+s_N \cdot d)}} \cdot \rho \cdot g_{u,j}^{(k_N \cdot f)} &\in \Omega \left(\zeta_{j,i}^{(\nu(j,i)+t_N \cdot d+N_0 \cdot f)} \right)^{\varphi^{(\nu(i,j)+s_N \cdot d)}} \times \\ &\times \Omega \left(\zeta_{i,u}^{(\nu(i,j)+s_N \cdot d)} \right) \cdot \Omega \left(\zeta_{u,j}^{(k_N \cdot f)} \right) \subset \overline{\Omega}(z), \end{aligned} \quad (16)$$

где $z \in L_R(j, j)$,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{f} \cdot (\nu(j, i) + t_N \cdot d + N_0 \cdot f + \nu(i, j) + s_N \cdot d + k_N \cdot f) = \\ &= N_0 + k_N + \frac{1}{f} \cdot (\nu(j, i) + \nu(i, j) + (s_N + t_N) \cdot d) = N_0 + k_N + 1. \end{aligned}$$

Из условия (11), выполненного при $L = H_j$, следует, что

$$\overline{\Omega}(z) \subset x_j^{N_0+k_N+1} \cdot H_j. \quad (17)$$

Таким образом, из соотношений (6), (16), (17) для любых таких $u \in D_\mu, N \geq 0$, что $p^{(\nu(i,u)+s_N \cdot d)}(i, u) > 0$, следует включение

$$\Omega \left(y_{i,j}^{(N)} \cdot \zeta_{i,u}^{(\nu(i,u)+s_N \cdot d)} \cdot g_{u,j}^{(k_N)} \right) \subset H_j. \quad (18)$$

Из соотношений (18) и (15) следует, что для любого $g \in G \setminus H_j$ и любого $N \geq 0$, удовлетворяющего условию $p^{(\nu(i,j)+N \cdot d)}(i, j) > 0$, верно равенство

$$\mathbf{P} \left(y_{i,j}^{(N)} \cdot \zeta_{i,j}^{(\nu(i,j)+N \cdot d)} = g \right) = 0. \quad (19)$$

Из теории конечных цепей Маркова ([6]) следует, что существуют числа $p(u) > 0$, $u \in D_\mu$, для которых

$$p^{(\nu(i,u)+N \cdot d)}(i, u) = p(u) \cdot (1 + o(1)), \quad N \rightarrow \infty; \quad (20)$$

а также

$$\sum_{u \in D_\mu} p(u) = 1. \quad (21)$$

Наконец, согласно (18), для любых $u \in D_\mu$, $N \geq 0$, удовлетворяющих условию $p^{(\nu(i,u)+s_N \cdot d)}(i, u) > 0$, верно равенство

$$\sum_{h \in H_j} \mathbf{P} \left(y_{i,j}^{(N)} \cdot \zeta_{i,u}^{(\nu(i,u)+s_N \cdot d)} \cdot g_{u,j}^{(k_N)} = g \cdot h^{-1} \right) = 1, \quad g \in H_j. \quad (22)$$

Подставив (14), (20) в (15) и используя (21), (22), получим для любого $g \in H_j$

$$\mathbf{P} \left(y_{i,j}^{(N)} \cdot \zeta_{i,j}^{(\nu(i,j)+N \cdot d)} = g \right) = \frac{1}{|H_j|} \cdot (1 + o(1)), \quad N \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Из (19) и (23) вытекает доказываемое утверждение о последовательности (12).

Исследуем теперь связи между подгруппами H_j для различных $j \in \{1, \dots, n\}$. Докажем, что для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ верны равенства

$$H_j = (H_i)^{\varphi^{\nu(i,j)}}, \quad (24)$$

$$x_j \cdot H_j = (x_i \cdot H_i)^{\varphi^{\nu(i,j)}}. \quad (25)$$

Зафиксируем произвольные $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Из соотношений (19) и (23) следует, что существует натуральное число N , для которого порядок группы G делит N , и

$$\Omega \left(\zeta_{j,j}^{(f \cdot N)} \right) = H_j, \quad (26)$$

$$\Omega \left(\zeta_{j,j}^{(f \cdot (N+1))} \right) = x_j \cdot H_j. \quad (27)$$

Выберем произвольный элемент

$$\rho \in \Omega \left(\zeta_{j,i}^{(f - \nu(i,j) + N_0 \cdot f)} \right), \quad (28)$$

пусть

$$\tau = \left(x_i^{1+2 \cdot N_0} \cdot \rho^{-1} \right)^{\varphi^{\nu(i,j)}}. \quad (29)$$

Из соотношений (2), (28) следует, что

$$\left[\tau_{i,j}^{(0)} \cdot \Omega \left(\zeta_{j,j}^{(f \cdot N)} \right) \right]^{\varphi^{(f - \nu(i,j))}} \cdot \rho \subset \Omega \left(\zeta_{i,i}^{(f \cdot (1+2 \cdot N_0 + N))} \right). \quad (30)$$

Из (11) следует, что

$$\Omega \left(\zeta_{i,i}^{(f \cdot (1+2 \cdot N_0 + N))} \right) \subset x_i^{1+2 \cdot N_0 + N} \cdot H_i. \quad (31)$$

Заметим, что $x_i \cdot H_i = H_i \cdot x_i$. Так как порядок элемента x_i делит N , то из (26), (29), (30) и (31) следует включение

$$H_j \subset \left(\tau_{i,j}^{(0)} \right)^{-1} \cdot H_i^{\varphi^{\nu(i,j)}} \cdot \tau. \quad (32)$$

Согласно (32), $|H_j| \leq |H_i|$. Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что $|H_i| \leq |H_j|$, т. е. $|H_j| = |H_i|$.

Но тогда из (32) и условия коммутативности группы G следует равенство

$$H_j = \left(\tau_{i,j}^{(0)} \right)^{-1} \cdot \tau \cdot H_i^{\varphi^{\nu(i,j)}}. \quad (33)$$

Из (33) следует, что

$$\left(\tau_{i,j}^{(0)} \right)^{-1} \cdot \tau \in H_j, \quad (34)$$

откуда вытекает доказываемое равенство (24).

Для доказательства (25) воспользуемся (27) и, проводя аналогичные (28)–(33) рассуждения, получим равенство

$$x_j \cdot H_j = \left(\tau_{i,j}^{(0)} \right)^{-1} \cdot \tau \cdot x_i^{\varphi^{\nu(i,j)}} \cdot H_i^{\varphi^{\nu(i,j)}}. \quad (35)$$

Теперь (25) следует из (34), (35) и (24).

Из соотношений (24), (25) следует, что для любых $\mu \in \{1, \dots, d\}, j \in \in D_\mu$ справедливы соотношения

$$H_j = (H_1)^{\varphi^{\mu-1}}, \quad (36)$$

$$x_j \cdot H_j = (x_1 \cdot H_1)^{\varphi^{\mu-1}}. \quad (37)$$

Докажем равенства

$$H_1 = (H_1)^{\varphi^m}, \quad (38)$$

$$x_1 \cdot H_1 = (x_1 \cdot H_1)^{\varphi^m}. \quad (39)$$

Соотношение (38) следует из (39), докажем соотношение (39). Аналогично (27), существует натуральное число k , для которого верно равенство

$$\Omega\left(\zeta_{1,1}^{(k,f)}\right) = x_1 \cdot H_1. \quad (40)$$

Множество $\Omega\left(\zeta_{1,1}^{(k,f)}\right)$ есть объединение множеств $\overline{\Omega}(z)$, где петли $z \in L_k(1, 1)$ имеют вид (3) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_k = +1$. Зафиксируем произвольно такую петлю z и элемент $g \in \overline{\Omega}(z)$. Тогда из (4) и (2) следует равенство

$$g = g_1^{\varphi^{k \cdot f - 1}} \cdot g_2^{\varphi^{k \cdot f - 2}} \cdot \dots \cdot g_{k \cdot f - 1}^{\varphi} \cdot g_{k \cdot f} \quad (41)$$

для некоторых $g_s \in \Omega\left(\xi_{i_s, i_{s+1}}\right)$ и $i_s \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющих условиям $p(i_s, i_{s+1}) > 0$ при всех $s \in \{1, \dots, k \cdot f\}$, здесь $i_1 = i_{k \cdot f + 1} = 1$.

Используя коммутативность группы G и то, что числа $d, \text{ord } \varphi$ делят f , равенство (41) можно переписать следующим образом:

$$g = \left[g_{k \cdot f - d + 1}^{\varphi^{k \cdot f - 1}} \cdot g_{k \cdot f - d + 2}^{\varphi^{k \cdot f - 2}} \cdot \dots \cdot g_{k \cdot f}^{\varphi^{k \cdot f - d}} \cdot g_1^{\varphi^{k \cdot f - d - 1}} \times \right. \\ \left. \times g_2^{\varphi^{k \cdot f - d - 2}} \cdot g_{k \cdot f - d - 1}^{\varphi} \cdot g_{k \cdot f - d} \right]^{\varphi^d}. \quad (42)$$

Элемент в квадратных скобках в правой части (42) лежит в множестве

$$\Omega\left(\zeta_{i_{d+1}, i_{d+1}}^{(k,f)}\right) \subset x_{i_{d+1}} \cdot H_{i_{d+1}}.$$

Согласно (37)

$$x_{i_{d+1}} \cdot H_{i_{d+1}} = x_1 \cdot H_1.$$

Ввиду (40) и произвольности выбора z, g из этих рассуждений следует включение

$$(x_1 \cdot H_1)^{\varphi^d} \subset x_1 \cdot H_1. \quad (43)$$

Однако отображение φ^d биективно, поэтому согласно (43)

$$(x_1 \cdot H_1)^{\varphi^d} = x_1 \cdot H_1,$$

откуда следует (39).

Из соотношений (36)–(39) следует, что для любых $\mu \in \{1, \dots, d\}$, $j \in D_\mu$ справедливы соотношения

$$H_j = (H_1)^{\varphi^\mu}, \quad (44)$$

$$x_j \cdot H_j = (x_1 \cdot H_1)^{\varphi^\mu}. \quad (45)$$

Из (44) и (45) для любых $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu \in \{1, \dots, d\}$, $j \in D_\mu$ следует равенство

$$y_{i,j}^{(N)} \cdot H_j = \sigma_{i,j}^{(N)} \cdot H_j. \quad (46)$$

Из (46) и доказанной выше сходимости распределений случайных величин последовательностей (12) к равномерному распределению на подгруппе H_j следует, что для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ последовательность распределений случайных величин

$$\sigma_{i,j}^{(N)} \cdot \zeta_{i,j}^{(N)}, \quad N \geq 1, p^{(\nu(i,j)+N \cdot d)}(i, j) > 0,$$

имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на подгруппе H_j . С учетом (44) отсюда следует утверждение теоремы 1.

В случае, когда цепь Маркова (1) положительно регулярна, т. е. $d = 1$, утверждение теоремы значительно упрощается. В этом случае число f есть порядок автоморфизма φ , для любого $N \geq 1$

$$\sigma_{i,j}^{(N)} = (x_1)^{-N_0 - k_N - 1} \cdot \left(\tau_{j,i}^{(t_N)} \right)^{\varphi^{s_N}}, \quad \tau_{i,j}^{(t_N)} \in \Omega \left(\zeta_{i,j}^{(t_N + N_0 \cdot f)} \right),$$

числа k_N, s_N, t_N определяются соотношениями

$$N = s_N + f \cdot k_N, \quad k_N \geq 0, \quad s_N \in \{1, 2, \dots, f\}, \quad t_N = f - s_N.$$

Подгруппа H_1 и смежный класс $x_1 \cdot H_1$ инвариантны относительно действия автоморфизма φ .

Следствие 1. Если цепь Маркова (1) положительно регулярна, то для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ последовательность распределений случайных величин

$$\sigma_{i,j}^{(N)} \cdot \zeta_{i,j}^{(N)}, \quad N \geq 1, \quad p^{(N)}(i, j) > 0,$$

имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на подгруппе H_1 .

Следствие 2. Если цепь Маркова (1) положительно регулярна, тогда для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ последовательность распределений случайных величин

$$\zeta_{i,j}^{(N)}, \quad N \geq 1, \quad p^{(N)}(i, j) > 0,$$

имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на группе G тогда и только тогда, когда группа G не содержит собственной подгруппы L , инвариантной относительно автоморфизма φ и удовлетворяющей соотношению

$$\overline{\Omega}(z) \subset x_1^{l(z)} \cdot L, \quad z \in Z^{(1)}.$$

Утверждение следствия 2 в близкой формулировке было ранее доказано С. В. Глуховым.

Список литературы

1. *Бахтурин Ю. А.* Основные структуры современной алгебры. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. с. 320.
2. *Горчинский Ю. Н., Круглов И. А., Капитонов В. М.* Вопросы теории распределений на конечных группах. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 1. — М.: ТВП, 1997, с. 85–112.
3. *Егоров Б. А., Максимов Ю. И.* Об одной последовательности случайных величин, принимающих значения из компактной коммутативной группы. — Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. 13, вып. 4, с. 621–630.
4. *Круглов И. А.* Условия предельной равновероятности состояний регистров сдвига. — Математические вопросы криптографии, 2010, т. 1, вып. 2, с. 19–30.
5. *Клосс Б. М.* О вероятностных распределениях на бикompактных топологических группах — Теория вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, вып. 3, с. 255–290.
6. *Романовский В. И.* Дискретные цепи Маркова. — М.: Гостехиздат, 1949.