Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Солодовников, О примарных функциях, минимально близких к линейным,
Матем. вопр. криптогр., 2011, том 2, выпуск 4, 97–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk45>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 02:53:22

УДК 519.719.2

О примарных функциях, минимально близких к линейным

В. И. Солодовников

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 23.VI.1010

Продолжается начатое автором ранее исследование вопросов близости функций из $(\mathbf{Z}/(p))^n$ в $(\mathbf{Z}/(p))^m$ (p — простое) к линейным функциям. Найжены новые критерии минимальной близости функции к линейным. Доказывается, что такая минимальность функции наследуется ее гомоморфными образами. В качестве обобщения утверждения, хорошо известного для булевых функций, доказывается, что для $p = 2, 3$ класс всех минимально близких к линейным функций совпадает с классом бент-функций (в случае их существования).

Ключевые слова: близость функций, абсолютно негомоморфные функции, минимальные функции, бент-функции

On primary functions which are minimally close to linear functions

V. I. Solodovnikov

Academy of Cryptography of Russian Federation, Moscow

Abstract. The investigation of aspects of closeness to linear functions for functions from $(\mathbf{Z}/(p))^n$ to $(\mathbf{Z}/(p))^m$ (p is prime number). New criteria of minimal closeness to linear functions are found. This property of a function is proved to be inherited for its homomorphic images. As a generalization of an analogous statement for Boolean functions it is proved that if $p = 2$ or 3 then a class of functions which are minimally close to linear ones coincides with the class of bent-functions (if bent-functions do exist).

Key words: closeness of functions, absolutely nonhomomorphic functions, minimal functions, bent-functions

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2011, vol. 2, no. 4, pp. 97–108 (Russian).

© 2011 В. И. Солодовников

Нам потребуются следующие обозначения, терминология и результаты работы [5].

X, Y — аддитивные конечные абелевы группы.

Y^X — множество всех отображений $f: X \rightarrow Y$ из множества X в множество Y (термины «отображение» и «функция» считаем синонимами).

$\psi\varphi$ — композиция отображений, при которой φ действует первым.

$\text{Hom}(G, H)$ — множество всех гомоморфизмов группы G в группу H .

$\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Z}/(k)$ — кольцо вычетов по модулю k .

P — равномерное вероятностное распределение на X , то есть

$$P(A) = |A| |X|^{-1}$$

для любого $A \subseteq X$.

Функция $f: X \rightarrow Y$ называется *сбалансированной*, если мощности полных прообразов всех элементов Y одинаковы.

В работе [5] близость двух произвольных функций $f_1, f_2 \in Y^X$ измерялась корнем из дисперсии

$$\left(|Y|^{-1} \sum_{y \in Y} (P(f_1 - f_2 = y) - |Y|^{-1})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В [6] была предложена другая нормировка этой величины, при которой ее максимальное значение становится равным 1:

$$\left(|Y| (|Y| - 1)^{-1} \sum_{y \in Y} (P(f_1 - f_2 = y) - |Y|^{-1})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Это позволило упростить многие формулы. С целью дальнейших упрощений здесь мы откажемся и от корня. А именно, **близость** δ функций $f_1, f_2 \in Y^X$ определим равенством

$$\delta(f_1, f_2) = |Y| (|Y| - 1)^{-1} \sum_{y \in Y} (P(f_1 - f_2 = y) - |Y|^{-1})^2, \quad (1)$$

а близость классов функций $K_1, K_2 \subseteq Y^X$ — равенством

$$\delta(K_1, K_2) = \max_{f_1 \in K_1, f_2 \in K_2} \delta(f_1, f_2),$$

Близость δ обладает следующими свойствами:

$$0 \leq \delta(f_1, f_2) \leq 1, \quad (2)$$

$$\delta(f_1, f_2) = 0 \Leftrightarrow f_1 - f_2 \text{ — сбалансированная}, \quad (3)$$

$$\delta(f_1, f_2) = 1 \Leftrightarrow f_1 - f_2 = \text{const}, \quad (4)$$

$$\delta(f_1, f_2) = \delta(f_2, f_1), \quad (5)$$

$$\delta(y_1 + g_2 f_1 g_1 + f', y_2 + g_2 f_2 g_1 + f') = \delta(f_1, f_2) \quad (6)$$

для любых $f_1, f_2 \in Y^X$, где $g_1: X' \rightarrow X$ — сбалансированная, $g_2: Y \rightarrow Y'$ — изоморфизм, $f': X' \rightarrow Y'$, $y_1, y_2 \in Y'$.

Свойства (2), (3), (4) означают, что минимально близкие функции — это функции, разность которых сбалансирована, а максимально близкие функции — это функции, разность которых есть константа.

Для любого $a \in X$ подстановку $x \mapsto a + x$ множества X будем обозначать через a^+ . Все такие подстановки называют *сдвигами* группы X . Они образуют изоморфную группе X группу подстановок, называемую группой сдвигов (или группой Кэли) группы X (в теории представлений групп такое представление группы X называют регулярным).

Гомоморфизмы $h \in \text{Hom}(X, Y)$ по определению обладают следующим характерным свойством: $ha^+ - h = \text{const}$ для всех $a \in X \setminus \{0\}$. Поэтому естественным (в силу свойств (2), (3), (4)) является следующее определение, обобщающее определение «совершенной нелинейности» в [9].

Функция $f: X \rightarrow Y$ называется **абсолютно негомоморфной**, если для любого $a \in X \setminus \{0\}$ функция $fa^+ - f$ является сбалансированной, то есть

$$\delta(fa^+, f) = 0. \quad (7)$$

Множество всех абсолютно негомоморфных функций из Y^X обозначается через $B(X, Y)$.

К понятию абсолютной негомоморфности можно подойти не только с алгебраической, но и с криптографической стороны. А именно, пусть G — некоторая группа подстановок множества X , $fG = \{fg \mid g \in G\}$ — класс функций, порождённых функцией $f \in Y^X$ и группой G . Пусть в некоторой крипто-схеме имеется узел, реализующий функции из fG , где элементы группы G являются ключами. Тогда величины $\delta(fg_1, fg_2)$, $g_1, g_2 \in G$, характеризуют степень изменения этого узла ключами из G : чем ближе эти величины к 0, тем сильнее подстановки из G изменяют функцию f . Наоборот, если величина $\delta(fg_1, fg_2)$ близка к 1, то ключи g_1 и g_2 называют *близкими*. Поскольку, в силу (6), $\delta(fg_1, fg_2) = \delta(fg_1 g_2^{-1}, f)$, то достаточно рассматривать только величину $\delta(fg, f)$, $g \in G$. В частности, когда G — группа сдвигов группы X , получаем, что абсолютно негомоморфные функции — это функции, которые *максимально изменяются сдвигами*, то есть соответствующие узлы не имеют различных близких ключей-сдвигов.

В работе [5] доказано, что если группа G транзитивна, то для любой $f \in Y^X$

$$\delta(f, 0) = |Y| (|G|(|Y| - 1))^{-1} \sum_{g \in G} (P(fg = f) - |Y|^{-1})$$

и, в частности, для любого $h \in \text{Hom}(X, Y)$

$$\delta(f, h) = |Y| (|X| (|Y| - 1))^{-1} \sum_{a \in X} (P(fa^+ - f = h(a)) - |Y|^{-1}). \quad (8)$$

Приведём некоторые свойства абсолютно негомоморфных функций: если $f \in B(X, Y)$, $h \in \text{Hom}(X, Y)$, $g_1: X' \rightarrow X$ — изоморфизм, $g_2: Y \rightarrow Y'$ — эпиморфизм (т. е. сюръективный гомоморфизм групп), $c \in X'$, $b \in Y'$, $h' \in \text{Hom}(X', Y')$, то

$$\delta(f, h) = |X|^{-1}, \quad (9)$$

$$b + h' + g_2 f g_1 c^+ \in B(X', Y'). \quad (10)$$

Из формулы (9) следует, что абсолютно негомоморфные функции одинаково близки к любому гомоморфизму, а также они не являются сбалансированными при $|Y| > 1$, поскольку сбалансированность равносильна условию

$$\delta(f, 0) = 0.$$

В частности, абсолютно негомоморфные функции не могут быть биективными.

В соответствии с теоретико-автоматной терминологией и с учетом групповой структуры алфавитов, пару (α, β) гомоморфизмов $\alpha \in \text{Hom}(X, X')$ и $\beta \in \text{Hom}(Y, Y')$ назовем *гомоморфизмом функции* $f: X \rightarrow Y$ в функцию $f': X' \rightarrow Y'$, если $\beta f = f' \alpha$. Если α и β — сюръекции, то гомоморфизм (α, β) назовем *эпиморфизмом*, а функцию f' — *гомоморфным образом функции* f . В этом случае для любых $a \in X$ и $y' \in Y'$

$$P(f'(\alpha(a))^+ - f' = y') - |Y'|^{-1} = \sum_{y \in \beta^{-1}(y')} (P(fa^+ - f = y) - |Y|^{-1}) \quad (11)$$

(где $P'(A') = |A'| |X'|^{-1}$ для любого $A' \subseteq X'$). Легко проверяется справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Если (α, β) — эпиморфизм функции $f \in B(X, Y)$ в функцию $f': X' \rightarrow Y'$ и $|Y'| > 1$, то α — изоморфизм и $f' \in B(X', Y')$.

Минимальная близость функций из Y^X к гомоморфизмам определяется равенством

$$\delta_0(X, Y) = \min_{f \in Y^X} \delta(f, \text{Hom}(X, Y)).$$

Минимальными называются функции, минимально близкие к гомоморфизмам, то есть функции $f \in Y^X$, для которых

$$\delta(f, \text{Hom}(X, Y)) = \delta_0(X, Y).$$

Множество всех минимальных функций из Y^X обозначим через $M(X, Y)$.

Заметим, что минимальные функции существуют всегда, в отличие от абсолютно негомоморфных функций.

Хорошо известно, что любая конечная абелева группа изоморфна прямому произведению аддитивных групп колец вычетов. Поэтому без ограничения общности (в силу формул (6) и (10)) далее считаем, что

$$X = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z} / (k_i), \quad Y = \prod_{j=1}^m \mathbb{Z} / (t_j),$$

где n, m — произвольные натуральные числа, $k_1, \dots, k_n, t_1, \dots, t_m$ — произвольные натуральные числа, большие 1.

В работе [5] для функций из Y^X введено понятие **бент-функции** как функции, обладающей следующим свойством: в разложении композиции ее и любого неединичного неприводимого (комплекснозначного) характера группы Y по неприводимым характеристам группы X модули всех коэффициентов (они называются коэффициентами Фурье) одинаковы. Это определение обобщает определения работы [2] (для булевых функций, когда $m = 1, k_1 = \dots = k_n = t_1 = 2$), работы [3] (когда $k_1 = \dots = k_n = t_1 = \dots = t_m = p$ — простое число, m делит n) и может быть сведено к определению работы [4], где бент-функции определяются как комплекснозначные функции на конечной абелевой группе с единичными модулями всех значений и условием равенства модулей всех коэффициентов Фурье. Для случая $m = 1, k_1 = \dots = k_n = t_1 \geq 3$ определение из [5] сужает определение бент-функции в [8] (где участвует только один характер группы Y), но в [8] доказано, что при простом t_1 эти определения равносильны. В книге [10] приводится обстоятельный обзор бент-тематики.

В [5] доказано:

множество всех бент-функций из Y^X совпадает с $B(X, Y)$,

что распространяет результаты [2], [3], [8] на произвольные конечные абелевы группы X и Y .

Для любого $h \in \text{Hom}(X, Y)$ матрица гомоморфизма h

$$A_h = (a_{ij} + (t_j))_{n \times m}$$

определяется равенствами

$$h(e_i) = (a_{i,1} + (t_1), \dots, a_{i,m} + (t_m)),$$

$$e_i = ((k_1), \dots, (k_{i-1}), 1 + (k_i), (k_{i+1}), \dots, (k_n)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Она обладает следующими свойствами:

$$\frac{t_j}{(k_i, t_j)} \mid a_{ij} \quad (12)$$

для любых $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ (здесь (k_i, t_j) — наибольший общий делитель чисел k_i и t_j , а $a \mid b$ обозначает, что a делит b), $h((x_1 + (k_1), \dots, x_n + (k_n))) = (x_1, \dots, x_n)A_h$ для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{Z}$. Следовательно, матрица A_h однозначно определяет сам гомоморфизм h . Обратно, если $A = (a_{ij} + (t_j))_{n \times m}$ — произвольная матрица со свойством (12), то соответствие $h_A: X \rightarrow Y$, определяемое равенством

$$h_A((x_1 + (k_1), \dots, x_n + (k_n))) = (x_1, \dots, x_n)A,$$

является гомоморфизмом групп. Таким образом, между $\text{Hom}(X, Y)$ и всеми матрицами со свойством (12) существует взаимно-однозначное соответствие и, значит,

$$\begin{aligned} |\text{Hom}(X, Y)| &= \prod (k_i, t_j), \\ i &= 1, \dots, n, \\ j &= 1, \dots, m, \end{aligned}$$

Следующая, доказанная в [5], теорема распространяет известный результат работы [1] для булевых функций на случай абелевых групп.

Теорема 2. Если $k_i \mid t_j$ для любых $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, то для любой $f: X \rightarrow Y$ набор чисел

$$(P(f = y + h) \mid y \in Y, h \in \text{Hom}(X, Y))$$

однозначно определяет функцию f .

Следующие две теоремы (см. [9], [5]) сводят случай многомерного Y к одномерному и обобщают теорему 3 из [3].

Теорема 3. Если $k_i = t_j = t$ для любых $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, то для любой $f: X \rightarrow Y$ следующие свойства равносильны:

- (1) f — сбалансированная;
- (2) hf — сбалансированная для любого эпиморфизма $h: Y \rightarrow \mathbf{Z} / (t)$.

Теорема 4. Если $k_i = t_j = t$ для любых $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, то для любой $f: X \rightarrow Y$ следующие свойства равносильны:

- (1) $f \in B(X, Y)$;
- (2) $hf \in B(X, \mathbf{Z} / (t))$ для любого эпиморфизма $h: Y \rightarrow \mathbf{Z} / (t)$.

Лемма 1. Следующие свойства равносильны:

- (а) для любых $x \in X \setminus \{0\}$, $y \in Y$ существует $h \in \text{Hom}(X, Y)$ такой, что $h(x) = y$;
 (б) $k_1 = \dots = k_n = t_1 = \dots = t_m = p$ — простое число.

Доказательство. (б) $\Rightarrow$ (а) очевидно, так как в случае (б) гомоморфизмы являются линейными отображениями (функциями) векторных пространств над полем $\mathbb{Z}/(p)$.

Обратно, пусть выполнено (а). Тогда, в силу (12), $t_j \mid k_i$ для любых $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Для любого $h \in \text{Hom}(X, Y)$ в $h(t_j e_i)$ j -я координата равна 0 и, следовательно, $t_j = k_i = p = c_1 c_2$, где $c_1 > 1$. Тогда $c_1 h(c_2 e_1) = 0$ для любого $h \in \text{Hom}(X, Y)$ и, следовательно, $c_2 = 1$. Лемма доказана.

Условие (а) существенно для дальнейших рассуждений. Поэтому далее рассмотрим только случай выполнения условия (б) леммы 1, $p > 1$, который назовем *примарным* (или *p-примарным*), при этом функции из Y^X — *примарными* (или *p-примарными*). В этом случае гомоморфизмы из $\text{Hom}(X, Y)$ являются линейными функциями (отображениями векторных пространств) и

$$|\text{Hom}(X, Y)| = |Y|^n = p^{nm}.$$

2-примарный случай называют двоичным. Двоичный случай для $m = 1$ называют булевым. С практической точки зрения оба эти случая наиболее интересны.

Лемма 2 (см. [5]). Для любой примарной $f: X \rightarrow Y$

$$|Y|^{-n} \sum_{h \in \text{Hom}(X, Y)} \delta(f, h) = |X|^{-1}.$$

Доказательство этого равенства, приводимое ниже, проще соответствующего доказательства работы [5] и не использует коэффициенты Фурье.

Для любого $a \in X \setminus \{0\}$ отображение $\text{Hom}(X, Y) \rightarrow Y$, где $h \mapsto h(a)$ является гомоморфизмом групп, который сюръективен в силу леммы 1. Тогда, в силу (8),

$$\begin{aligned} & |Y|^{-n} \sum_{h \in \text{Hom}(X, Y)} \delta(f, h) = \\ & = |Y|^{-n} |Y| (|X| (|Y| - 1))^{-1} (|Y|^n (1 - |Y|^{-1}) + \sum_{0 \neq a \in X} \sum_{h \in \text{Hom}(X, Y)} (P(fa^+ - f = h(a)) - |Y|^{-1})) = \\ & = |Y|^{-n} |Y| (|X| (|Y| - 1))^{-1} (|Y|^n (1 - |Y|^{-1}) + (|X| - 1)(|Y|^{n-1} - |Y|^n |Y|^{-1})) = |X|^{-1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из этой леммы получаем оценку минимальной близости функций к линейным функциям.

Теорема 5. Для примарного случая

$$\delta_0(X, Y) \geq |X|^{-1}.$$

Теорема 5 и формула (9) обосновывают теорему 6.

Теорема 6. В примарном случае, если $B(X, Y) \neq \emptyset$, то $B(X, Y) \subseteq M(X, Y)$ и $\delta_0(X, Y) = |X|^{-1}$.

В теореме 7 собраны критерии минимальности примарных функций для случая, когда $\delta_0(X, Y)$ минимальна (т. е. выполняется последнее равенство).

Теорема 7. Для любой p -примарной $f: X \rightarrow Y$ следующие утверждения равносильны:

- (1) $\delta_0(X, Y) = |X|^{-1}$ и $f \in M(X, Y)$;
- (2) $\delta(f, h) = |X|^{-1}$ для любого $h \in \text{Hom}(X, Y)$;
- (3) $\delta(f, h) = \delta(f, h')$ для любых $h, h' \in \text{Hom}(X, Y)$;
- (4) $\sum_{0 \neq a \in X} (P(fa^+ - f = h(a)) - |Y|^{-1}) = 0$ для любого $h \in \text{Hom}(X, Y)$;
- (5) $\sum_{0 \neq a \in X} (P(fa^+ - f = h(a)) - |Y|^{-1}) = \sum_{0 \neq a \in X} (P(fa^+ - f = h'(a)) - |Y|^{-1})$ для любых $h, h' \in \text{Hom}(X, Y)$;
- (6) $\sum_{0 \neq c \in \mathbb{Z}/(p)} (P(f(ca)^+ - f = cy) - |Y|^{-1}) = 0$ для любых $a \in X \setminus \{0\}, y \in Y$;
- (7) $\sum_{0 \neq c \in \mathbb{Z}/(p)} (P(f(ca)^+ - f = cy) - |Y|^{-1}) = \sum_{0 \neq c \in \mathbb{Z}/(p)} (P(f(ca)^+ - f = cy') - |Y|^{-1})$ для любых $a \in X \setminus \{0\}, y, y' \in Y$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) — следует из определения минимальности и леммы 2. (2) $\Rightarrow$ (3) — очевидно. (3) $\Rightarrow$ (1) — следует из леммы 2, теоремы 5 и определения минимальности. Из формулы (8) следуют (2) $\Leftrightarrow$ (4) и (3) $\Leftrightarrow$ (5). Импликации (6) $\Rightarrow$ (7) и (7) $\Rightarrow$ (5) очевидны.

Осталось доказать (4) $\Rightarrow$ (6). При $n = 1$ импликация очевидна. Пусть $n \geq 2$, и пусть $a_1, \dots, a_n$ — любой базис пространства X . Для любых $y_1, \dots, y_n \in Y$ определим $h_{y_1, \dots, y_n}: X \rightarrow Y$ равенством

$$h_{y_1, \dots, y_n}(a) = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

для всех $a = \sum_{i=1}^n c_i a_i \in X$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}/(p)$, так что $h_{y_1, \dots, y_n} \in \text{Hom}(X, Y)$.

Тогда

$$0 = |Y|^{n-1} 0 = \sum_{0 \neq a \in X} \sum_{y_1, \dots, y_n \in Y} (P(fa^+ - f = h_{y_1, \dots, y_n}(a)) - |Y|^{-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{0 \neq c_1 \in Z/(p)} |Y|^{n-1} (P(f(c_1 a_1)^+ - f = c_1 y_1) - |Y|^{-1}) + \\
&+ \sum_{\bar{0} \neq (c_2, \dots, c_n) \in (Z/(p))^{n-1}, c_1 \in Z/(p)} \sum_{y_2, \dots, y_n \in Y} (P(f a^+ - f = \sum_{i=1}^n c_i y_i)) - |Y|^{-1}) = \\
&= |Y|^{n-1} \sum_{0 \neq c_1 \in Z/(p)} (P(f(c_1 a_1)^+ - f = c_1 y_1) - |Y|^{-1}) + \\
&+ \sum_{\bar{0} \neq (c_2, \dots, c_n) \in (Z/(p))^{n-1}, c_1 \in Z/(p)} \sum_{y_2, \dots, y_n \in Y} (P(f a^+ - f = c_1 y_1 + \sum_{i=2}^n c_i y_i)) - |Y|^{-1}) = \\
&= |Y|^{n-1} \sum_{0 \neq c_1 \in Z/(p)} (P(f(c_1 a_1)^+ - f = c_1 y_1) - |Y|^{-1}) + \\
&+ \sum_{\bar{0} \neq (c_2, \dots, c_n) \in (Z/(p))^{n-1}, c_1 \in Z/(p)} |Y|^{n-2} \sum_{y \in Y} (P(f a^+ - f = y) - |Y|^{-1}) = \\
&= |Y|^{n-1} \sum_{0 \neq c_1 \in Z/(p)} (P(f(c_1 a_1)^+ - f = c_1 y_1) - |Y|^{-1}).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 1 означает, что свойство абсолютной негомоморфности (т. е. бентовости) наследуется гомоморфными образами, а также то, что бент-функции не имеют нетривиальных гомоморфных образов с $|X'| < |X|$. Покажем, что это справедливо и для свойства минимальности.

Теорема 8. Если в примарном случае $\delta_0(X, Y) = |X|^{-1}$, $f \in M(X, Y)$, $f': X' \rightarrow Y'$ — гомоморфный образ функции f и $|Y'| > 1$, то

$$|X'| = |X|, \quad \delta_0(X', Y') = |X|^{-1} \text{ и } f' \in M(X', Y').$$

Доказательство. Для любых $a \in X \setminus \{0\}$, $y' \in Y'$ по формуле (11)

$$\begin{aligned}
&\sum_{0 \neq c \in Z/(p)} (P'(f'(c \alpha(a)) + - f' = c y') - |Y'|^{-1}) = \\
&= \sum_{0 \neq c \in Z/(p)} \sum_{y \in \beta^{-1}(y')} (P(f(ca)^+ - f = cy) - |Y|^{-1}) = 0
\end{aligned}$$

в силу утверждения (6) теоремы 7. Тогда α — изоморфизм, утверждение (6) теоремы 7 выполнено для X', Y', f' и теорема доказана.

Утверждение, эквивалентное теореме 8 для $Y' = Z/(p)$, в терминах коэффициентов Фурье доказано В. А. Шишкиным в 2008 году.

Следующая теорема обобщает хорошо известный для булева случая факт (см., например, [2]).

Теорема 9. Для p -примарного случая, $p \in \{2, 3\}$, следующие утверждения равносильны:

- (1) $B(X, Y) \neq \emptyset$;
- (2) $\delta_0(X, Y) = |X|^{-1}$;
- (3) $B(X, Y) = M(X, Y)$.

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (1) — очевидно. (1) $\Rightarrow$ (2) — следует из теоремы 6. Докажем импликацию (2) $\Rightarrow$ (3). При $p = 2$ она следует из утверждения (6) теоремы 7. Пусть $p = 3$. Для любого p выполняются равенства

$$\begin{aligned} P(f(-ca)^+ - f = -cy) - |Y|^{-1} &= P(f - f(ca)^+ = -cy) - |Y|^{-1} = \\ &= P(f(ca)^+ - f = cy) - |Y|^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть f — минимальная. Тогда из утверждения (6) теоремы 7 получаем, что для любых $a \in X \setminus \{0\}$, $y \in Y$

$$0 = \sum_{c \in \{1, -1\}} (P(f(ca)^+ - f = cy) - |Y|^{-1}) = 2 (P(f(a)^+ - f = y) - |Y|^{-1}),$$

и, следовательно, f — абсолютно негомоморфная. Теорема доказана.

В [3] доказано, что если $p = 2$ и $2m \mid n$ или $p \geq 3$ и $m \mid n$, то $B(X, Y) \neq \emptyset$.

В заключение введем следующие обозначения и терминологию.

В случае выполнения условия

$$\delta_0(X, Y) = |X|^{-1} \tag{13}$$

минимальные функции назовем **абсолютно минимальными** (это определение сужает определение «абсолютной минимальности» в работе [5]). Множество всех абсолютно минимальных функций из Y^X обозначим через $A(X, Y)$, так что

$$M(X, Y) = A(X, Y), \text{ если } \delta_0(X, Y) = |X|^{-1},$$

$$A(X, Y) = \emptyset, \quad \text{если } \delta_0(X, Y) > |X|^{-1}.$$

Для любой $f: X \rightarrow Y$ обозначим

$$\bar{\delta}(f) = |X|^{-1} \sum_{a \in X} \delta(fa^+, f),$$

$$\delta_1(X, Y) = \min_{f \in Y^X} \bar{\delta}(f).$$

Максимально негомоморфными назовем функции $f \in Y^X$, для которых

$$\bar{\delta}(f) = \delta_1(X, Y).$$

Множество всех максимально негомоморфных функций из Y^X обозначим через $N(X, Y)$, так что $N(X, Y) \neq \emptyset$ и

$$N(X, Y) = B(X, Y), \text{ если } \delta_1(X, Y) = |X|^{-1},$$

$$B(X, Y) = \emptyset, \quad \text{если } \delta_1(X, Y) > |X|^{-1}.$$

Представляется справедливой следующая

Гипотеза. Для p -примарного случая и любого p

$$A(X, Y) = B(X, Y), \quad (14)$$

$$M(X, Y) = N(X, Y). \quad (15)$$

Теорема 9 равносильна выполнению равенства (14) для $p \in \{2, 3\}$.

Наконец, заметим, что (в отличие от приведенного выше общепринятого определения бент-функции через равномодульность коэффициентов Фурье) в [6] для произвольного простого p и в [7] для $p = 2$ бент-функциями названы *абсолютно минимальные* функции. При этом в теореме 3.2 в [6] со ссылкой на [5] фактически утверждается, что утверждение теоремы 9 справедливо для любого простого p (что автору не удалось доказать ни в [5], ни здесь). Последствием этого явилась необоснованность распространения некоторых свойств бент-функций на абсолютно минимальные функции. Теорема 9 настоящей работы обосновывает такое распространение на случаи $p = 2, 3$ в работах [6] и [7]. Отметим, что основные результаты [6] относятся к случаю $p = 2$.

Список литературы

1. Golomb S. W. On the classification of Boolean functions. — IRE Trans. Circuit Theory, 1959, v. 1, no. 6, p. 10–27.
2. Rothaus O. S. On «bent» functions. — J. Comb. Theory, Ser. A, 1976, v. 20, no. 3, p. 300–305.
3. Амбросимов А. С. Свойства бент-функций q -значной логики над конечными полями. — Дискретная математика, 1994, т. 6, вып. 3, с. 50–60.
4. Логачёв О. А., Сальников А. А., Яценко В. В. Бент-функции на конечной абелевой группе. — Дискретная математика, 1997, т. 9, вып. 4, с. 3–20.
5. Солодовников В. И. Бент-функции из конечной абелевой группы в конечную абелеву группу. — Дискретная математика, 2002, т. 14, вып. 1, с. 99–113.

6. Кузьмин А. С., Нечаев А. А., Шишкин В. А. Бент- и гипербент-функции над конечным полем. — Труды по дискретной математике, 2007, т. 10. — М.: ФИЗМАТЛИТ, с. 97–122.
7. Кузьмин А. С., Нечаев А. А., Шишкин В. А. Параметры (гипер-) бент-функций над полем из 2^l элементов. — Труды по дискретной математике, 2008, т. 11, вып. 1. — М.: ФИЗМАТЛИТ, с. 47–59.
8. Kumar P. V., Scholts R. A., Welch L. R. Generalized bent functions and their properties. — J. Comb. Theory, Ser. A, 1985, v. 40, no. 1, p. 90–107.
9. Nyberg K. Perfect nonlinear S-boxes. — Adv. in Cryptology – EURO-CRYPT’91. Lect. Notes in Comput. Sci., 1991, v. 547, p. 378–386.
10. Токарева Н. Н. Нелинейные булевы функции: бент-функции и их обобщения. — Saarbrücken: LAP, 2011, 180 с.