Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Сачков, Цикловая структура элементов централизаторов подстановок симметрической группы, *Матем. вопр. криптогр.*, 2010, том 1, выпуск 1, 85–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk5>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:48:42

УДК 512.542

Цикловая структура элементов централизаторов подстановок симметрической группы

В. Н. Сачков

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 22.IV.2010

Для числа циклов случайного элемента централизатора подстановки A степени n найдена производящая функция и описаны предельные распределения числа циклов при $n \rightarrow \infty$ и некоторых ограничениях на характер изменения подстановки A с ростом n .

Ключевые слова: подстановки, производящие функции, централизатор, предельное распределение, циклы.

Cycle structure of the elements of centralizers of permutations from the symmetric group

V. N. Sachkov

Academy of Cryptography of Russian Federation, Moscow

Abstract. Let ζ be the number of cycles of a random element of centralizer of a permutation from the symmetric group S_n with given cycle structure. For some classes of permutations generating functions and limit distributions of ζ as $n \rightarrow \infty$ are described.

Key words: permutation, centralizer, cycles, generating function, limit distribution.

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2010, vol. 1, no. 1, pp. 85–100 (Russian).

© 2010 В. Н. Сачков

Введение

Централизатор элемента A из симметрической группы S_n является совокупностью всех решений X уравнения

$$AX = XA \quad (1.1)$$

в группе S_n . Уравнения вида (1.1) представляют интерес в криптографии, например, при изучении дискретных функций, задаваемых биективными отображениями полей Галуа и имеющих трансляторы [1].

Для подстановки A , принадлежащей цикловому классу $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$,

$\sum_{r=1}^n r\alpha_r = n$, в п. 1 устанавливается биекция множества решений уравнения (1.1) с полупрямым произведением ФЛТ, где Φ и T — прямые произведения симметрических групп и групп циклических сдвигов соответственно. На этой основе формулируется алгоритм построения решений (1.1) с заданной цикловой структурой.

В п. 2 и п. 3 для случайной величины $\xi(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n})$, равной числу циклов в случайно выбранном решении X уравнения (1.1), когда A принадлежит цикловому классу $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$, $\sum_{r=1}^n r\alpha_r = n$, найдено выражение для производящей функции $f(t; 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n})$ этой случайной величины:

$$f(t; 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) = \prod_{r=1}^n \frac{\Gamma(\Psi(t; r) + \alpha_r)}{\Gamma(\Psi(t; r))\Gamma(\alpha_r + 1)},$$

$$\Psi(t; r) = \frac{1}{r} \sum_{d \mid r} \varphi\left(\frac{r}{d}\right) t^d,$$

где Γ — гамма-функция, φ — функция Эйлера.

Для случайной величины $\xi(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n})$ получено представление в виде суммы независимых случайных величин:

$$\xi(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) = \sum_{r=1}^n \xi(r^{\alpha_r}),$$

где $\xi(r^{\alpha_r})$ — число циклов случайного элемента централизатора регулярной подстановки, содержащей α_r циклов длины r .

В п. 4 показано, что при соответствующих нормировках случайной величины $\xi(r^k)$ в зависимости от поведения величины $\ln k / r$ при $n \rightarrow \infty$ распределения нормированных случайных величин сходятся либо к нормальному распределению, либо к распределению пуассоновского типа, либо

к вырожденному распределению. Для сумм нормированных случайных величин $\xi(r_1^{\alpha_1}), \dots, \xi(r_\ell^{\alpha_\ell})$, $\sum_{i=1}^{\ell} r_i \alpha_{r_i} = n$, указаны условия, при которых для $n \rightarrow \infty$ предельными являются либо нормальное распределение, либо распределение пуассоновского типа.

1. Элементы централизатора с данной цикловой структурой

Пусть S_n — симметрическая группа, действующая на множестве $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, и подстановка $A \in S_n$ принадлежит цикловому классу $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$. Централизатор подстановки A представляет собой совокупность всех решений X уравнения

$$AX = XA \quad (1.1)$$

в группе S_n . Из равенства (1.1) следует, что трансформация некоторого цикла A элементом централизатора X совпадает с некоторым циклом той же длины подстановки A . В соответствии с этим существует такое разбиение

$$N_n = N_n^{(1)} \cup N_n^{(2)} \cup \dots \cup N_n^{(n)}, \quad (1.2)$$

что $A^{(r)}$ — регулярная подстановка, действующая на множестве $N_n^{(r)}$ и состоящая из всех циклов длины r подстановки A , так что

$$A = A^{(1)} A^{(2)} \dots A^{(n)}. \quad (1.3)$$

Любое решение X уравнения (1.1) может быть представлено в виде

$$X = X^{(1)} X^{(2)} \dots X^{(n)}, \quad (1.4)$$

где $X^{(r)}$ — решение уравнения

$$A^{(r)} X^{(r)} = X^{(r)} A^{(r)}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

Для подстановки $A^{(r)}$ из циклового класса $[r^k]$ на элементах $N_n^{(r)}$ зададим отношение эквивалентности, считая эквивалентными все элементы, на которых действует один и тот же цикл длины r подстановки $A^{(r)}$. Имеется k классов эквивалентности, содержащих каждый r элементов.

Подстановку степени k , действующую на соответствующем фактор-множестве, будем называть фактор-подстановкой. Совокупность всех фактор-подстановок образует группу Φ_k , изоморфную группе S_k . Циклы фактор-подстановки будем называть фактор-циклами. При фиксированных фактор-циклах множество решений уравнения (1.1) определяется всевозможными сдвигами один относительно другого циклов длины r , соответствие между которыми определяется фактор-подстановкой. Совокупность таких сдвигов образует группу T_r , являющуюся прямым произведением циклических групп, отвечающих взаимным сдвигам циклов один относительно другого.

Подстановке A , принадлежащей цикловому классу $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$, поставим в соответствие группы Φ и T , представляющие собой прямые произведения вида:

$$\Phi = \Phi_{\alpha_1} \times \Phi_{\alpha_2} \times \dots \times \Phi_{\alpha_n}, \quad (1.6)$$

$$T = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n, \quad (1.7)$$

где $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$.

Тогда каждое решение $X = X_g$ уравнения (1.1) определяется элементом g группы G , представляющей собой полупрямое произведение групп Φ и T ,

$$G = \Phi \lambda T, \quad (1.8)$$

причем $g = \varphi t \in G$, $\varphi \in \Phi$, $t \in T$.

Исходя из описания решений уравнения (1.1), можно привести алгоритм построения таких решений, которые имеют заданную цикловую структуру.

Алгоритм.

1. Для подстановки A из циклового класса $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$ определяются блоки $N_n^{(1)}, N_n^{(2)}, \dots, N_n^{(n)}$ разбиения (1.2).

2. Для каждого r , $1 \leq r \leq n$, рассматривается уравнение

$$A^{(r)} X^{(r)} = X^{(r)} A^{(r)}, \quad (1.9)$$

где $A^{(r)}$ — сужение A на множество $N_n^{(r)}$, причем $A^{(r)}$ — регулярная подстановка, определенная на $N_n^{(r)}$ и имеющая α_r циклов длины r .

3. При заданном r рассматривается множество всех фактор-подстановок степени α_r . Для каждой фактор-подстановки $\sigma \in \Phi_{\alpha_r}$ находится ее разложение в произведение независимых циклов $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l$. Осуществляются все взаимные сдвиги один относительно другого r -циклов подстановки A , на которых действует цикл σ_j , $1 \leq j \leq l$, фактор-подстановки σ . В результате получается множество решений $X^{(r)}$ уравнения (1.9), соответствующих фактор-подстановке $\sigma \in \Phi_{\alpha_r}$, $1 \leq r \leq n$.

4. Операции проводятся для всех $r = 1, 2, \dots, n$. В результате находится множество всех решений уравнения (1.1), каждое из которых имеет представление в виде произведения

$$X = X^{(1)} X^{(2)} \dots X^{(n)}.$$

Отметим, что указанный алгоритм построения всех решений уравнения (1.1) фактически состоит в переборе всех элементов группы G , причем каждому элементу $g \in G$ отвечает одно и только одно решение. Алгоритм по-

зволяет без перебора всех решений отдельно находить решения с данной цикловой структурой. Для этого на определенных шагах алгоритма на параметры накладываются соответствующие ограничения, определяемые заданной цикловой структурой решения.

2. Число циклов решения для регулярной подстановки A

Рассмотрим решения X уравнения (1.1) для случая, когда подстановка A степени kr принадлежит цикловому классу $[r^k]$.

Лемма 1. Пусть A принадлежит цикловому классу $[r^k]$, фиксированная фактор-подстановка полноцикловая, и $v_1, v_2, \dots, v_k$ — величины взаимных циклических сдвигов k циклов, порядок следования которых определяется фактор-подстановкой. Тогда решение уравнения $AX = XA$ является регулярной подстановкой, имеющей d циклов длины kr/d , где $d = (v_1 + \dots + v_k, r)$.

Действительно, если решение имеет цикл длины l , то из способа построения решений следует, что $\ell = kv$, где v — наименьшее положительное решение уравнения

$$v(v_1 + \dots + v_k) \equiv 0 \pmod{r}, \quad 0 \leq v_i \leq r-1, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (2.1)$$

Если $d = (v_1 + \dots + v_k, r)$, то $v = r/d$ и, стало быть, $\ell = kr/d$, и число циклов равно d .

Для случая, когда A принадлежит цикловому классу $[r^k]$, на множестве решений уравнения (1.1), для которых фактор-подстановка зафиксирована и является полноцикловой, зададим равномерное вероятностное распределение и рассмотрим случайную величину ξ_r , равную числу циклов в случайно выбранном решении.

В соответствии с леммой 1 имеем:

$$\mathbf{P}(\xi_r = d) = \frac{1}{r^k} \sum_{\substack{j=0 \\ (j,r)=d}}^{r-1} \sum_{\substack{v_1+\dots+v_k \equiv j \pmod{r} \\ 0 \leq v_i \leq r-1, 1 \leq i \leq k}} 1 \quad (2.2)$$

и

$$\sum_{\substack{v_1+\dots+v_k \equiv j \pmod{r} \\ 0 \leq v_i \leq r-1, 1 \leq i \leq k}} 1 = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{\substack{v_1+\dots+v_k \equiv j+lk \\ 0 \leq v_i \leq r-1, 1 \leq i \leq k}} 1.$$

Так как

$$\sum_{\substack{v_1+\dots+v_k \equiv j+lr \\ 0 \leq v_i \leq r-1, 1 \leq i \leq k}} 1 = \text{coef}_{x^{j+lr}} (1 + x + x^2 + \dots + x^{r-1})^k,$$

то, используя первообразный корень α степени n из единицы, получаем, что

$$\sum_{\nu_1 + \dots + \nu_k \equiv j \pmod{r}} 1 = \frac{1}{r} \sum_{s=1}^r \alpha^{-js} (1 + \alpha^s + \alpha^{2s} + \dots + \alpha^{(r-1)s})^k = r^{k-1}. \quad (2.3)$$

Из соотношений (2.2) и (2.3) получаем окончательное выражение для распределения ξ_r :

$$\mathbf{P}(\xi_r = d) = \frac{1}{r} \varphi\left(\frac{r}{d}\right), \quad d \mid r, \quad (2.4)$$

где $\varphi(x)$ — функция Эйлера.

Производящая функция для ξ_r имеет вид

$$\Psi(t; r) = \frac{1}{r} \sum_{d \mid r} \varphi\left(\frac{r}{d}\right) t^d. \quad (2.5)$$

Отсюда следует выражение для характеристической функции случайной величины ξ_r :

$$\Psi(e^{it}; r) = \frac{1}{r} \sum_{d \mid r} \varphi\left(\frac{r}{d}\right) e^{idt}. \quad (2.6)$$

Эта функция дифференцируема в окрестности точки $t = 0$ и, следовательно, для моментов $\mathbf{M}_{\xi_r}^s$ случайной величины ξ_r имеем:

$$\mathbf{M}_{\xi_r}^s = \frac{1}{i^s} \frac{d^s}{dt^s} \Psi(e^{it}; r) \Big|_{t=0} = r^{s-1} \sum_{d \mid r} \frac{1}{d^s} \varphi(d), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

где $\frac{d^s}{dt^s} \Psi(e^{it}; r)$ — s -я производная функции $\Psi(e^{it}; r)$.

Пусть r имеет каноническое разложение

$$r = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \dots r_v^{\gamma_v}. \quad (2.8)$$

Тогда

$$\varphi(r) = r \left(1 - \frac{1}{r_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{r_v}\right),$$

и с использованием формулы (2.7) моменты $\mathbf{M}_{\xi_r}^s$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\mathbf{M}_{\xi_r}^s = \theta_s(r) r^{s-1}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

где

$$\theta_1(r) = \prod_{i=1}^v \left(1 + \gamma_i \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)\right), \quad (2.10)$$

$$\theta_s(r) = \prod_{i=1}^{\nu} \left(1 + \frac{1}{r_i^{s-1}} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \frac{1 - 1/r_i^{(s-1)\gamma_i}}{1 - 1/r_i^{(s-1)}} \right), \quad s = 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

Отметим, что в соответствии с (2.8) $\tau(r)$ — число делителей r определяется формулой

$$\tau(r) = \prod_{i=1}^{\nu} (1 + \gamma_i). \quad (2.12)$$

Для последующих асимптотических оценок потребуются три леммы.

Лемма 2. Если при $r \rightarrow \infty$ для канонических разложений выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \rightarrow 0, \quad (2.13)$$

то имеет место сходимость

$$\frac{\mathbf{M}\xi_r}{\tau(r)} \rightarrow 1. \quad (2.14)$$

Действительно, из формул (2.10) и (2.12) имеем:

$$1 - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \leq \frac{\mathbf{M}\xi_r}{\tau(r)} \leq 1,$$

из этих неравенств следует лемма 2.

Лемма 3. При $r \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\frac{\mathbf{M}\xi_r}{r} \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Соотношение (2.15) следует из неравенств

$$\prod_{i=1}^{\nu} \left(\frac{1 + \gamma_i}{r_i^{\gamma_i}} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right) \leq \frac{\mathbf{M}\xi_r}{r} \leq \prod_{i=1}^{\nu} \left(\frac{1 + \gamma_i}{r_i^{\gamma_i}} \right),$$

вытекающих из формул (2.10) и (2.12) и соотношения

$$\prod_{i=1}^{\nu} \left(\frac{1 + \gamma_i}{r_i^{\gamma_i}} \right) \rightarrow 0, \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Для оценки моментов $\mathbf{M}\xi_r^s$ при $r \rightarrow \infty$ будем использовать следующую лемму.

Лемма 4. Если при $r \rightarrow \infty$ выполнено условие (2.13), то имеют место асимптотические оценки

$$\theta_s(r) = 1 + O\left(\sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i^{s-1}}\right), \quad s \geq 2, \quad (2.17)$$

и, следовательно, существуют пределы

$$\theta_s(r) \rightarrow 1, \quad s = 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

Лемма 4 следует из формул (2.11) и вытекающих из них неравенств

$$1 - \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i^s + r_i} \leq \frac{\theta_s(r)}{\prod_{i=1}^v \left(1 + \frac{1}{r_i^{s-1}}\right)} \leq 1, \quad s \geq 2. \quad (2.19)$$

Очевидно, что из условия (2.13) следует, что

$$\sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i^{s-1}} \rightarrow 0, \quad s = 2, 3, \dots$$

Из формул (2.9), (2.13) и леммы 4 следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$\frac{\mathbf{M}\xi_r^s}{r^{s-1}} \rightarrow 1, \quad s = 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

Рассмотрим теперь характеристическую функцию случайной величины ξ_r/r , которая в силу условий (2.20) для достаточно больших r в некоторой окрестности точки $t = 0$ может быть представлена в виде сходящегося ряда

$$\Psi(e^{it}; r) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}\xi_r^s}{r^s} \frac{(it)^s}{s!}. \quad (2.21)$$

Из равенства (2.21) имеем:

$$\Psi(e^{it/r}; r) = 1 + \frac{\theta_1(r)}{r} \frac{it}{1!} + \frac{1}{r} \sum_{s=2}^{\infty} \theta_s(r) \frac{(it)^s}{s!}. \quad (2.22)$$

Из лемм 3 и 4 и формулы (2.22) следует, что для любого t при условии (2.13) и $r \rightarrow \infty$

$$\Psi(e^{it/r}; r) \rightarrow 1. \quad (2.23)$$

3. Производящие функции и моменты для числа циклов в случайно выбранном решении

Обозначим через $\xi(r^k)$ случайную величину, равную числу циклов в случайно выбранном решении уравнения (1.1), когда подстановка A при-

надлежит цикловому классу $[r^k]$. Рассмотрим производящую функцию величины $\xi(r^k)$:

$$f(t; r^k) = \sum_{s=1}^{rk} \mathbf{P}(\xi(r^k) = s) t^s. \quad (3.1)$$

Лемма 5. Производящая функция $f(t; r^k)$ имеет следующее выражение:

$$f(t; r^k) = \frac{\Gamma(\Psi(t; r) + k)}{\Gamma(\Psi(t; r)) \Gamma(k + 1)}, \quad (3.2)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Действительно, если $\xi(r^k; \nu_1, \dots, \nu_k)$ — случайная величина, равная числу циклов в случайно выбранном решении уравнения (1.1), когда A принадлежит цикловому классу $[r^k]$, а фактор-подстановка выбрана из циклового класса $[1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots k^{\nu_k}]$, $\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + k\nu_k = k$, то для производящей функции этой случайной величины имеем:

$$f(t; r^k, \nu_1, \dots, \nu_k) = \sum_{s=1}^{rk} \mathbf{P}(\xi(r^k, \nu_1, \dots, \nu_k) = s) t^{ks} = [\Psi(t; r)]^{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k},$$

где $\Psi(t; r)$ задана формулой (2.5).

Производя усреднение по всем цикловым классам, которым может принадлежать фактор-подстановка, получаем:

$$f(t; r^k) = \sum_{\sum_{i=1}^k i\nu_i = k} \frac{1}{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots k^{\nu_k} \nu_1! \nu_2! \dots \nu_k!} [\Psi(t; r)]^{\nu_1 + \dots + \nu_k}.$$

Отсюда следует, что

$$f(t; r^k) = \frac{1}{k!} C_k(\Psi(t; r), \dots, \Psi(t; r)),$$

где $\frac{1}{k!} C_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ — циклический индекс симметрической группы S_k [2].

Следовательно,

$$f(t; r^k) = \frac{1}{k!} \Psi(t; r) (\Psi(t; r) + 1) \dots (\Psi(t; r) + k - 1). \quad (3.3)$$

Из формулы (3.3) следует формула (3.2).

Обозначим через $\xi(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n})$ число циклов в случайно выбранном решении уравнения (1.1), когда A принадлежит цикловому классу $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$,

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$. Тогда в соответствии с алгоритмом построения решений уравнения (1.1) $\xi(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n})$ представляет собой сумму независимых случайных величин:

$$\xi(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) = \sum_{r=1}^n \xi(r^{\alpha_r}), \quad (3.4)$$

и, следовательно, в соответствии с формулой (3.2) для производящей функции

$$f(t; 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) = \sum_{s=1}^n \mathbf{P}(\xi(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) = s) t^s$$

имеет место формула

$$f(t; 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) = \prod_{r=1}^n \frac{\Gamma(\Psi(t; r) + \alpha_r)}{\Gamma(\Psi(t; r)) \Gamma(\alpha_r + 1)}, \quad \sum_{r=1}^n r\alpha_r = n. \quad (3.5)$$

Путем отыскания первых двух производных функций $f(t; r^k)$ с использованием формулы (3.3) находим выражения для среднего и дисперсии $\xi(r^k)$:

$$m(r^k) = \mathbf{M}\xi(r^k) = \sum_{d|r} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}, \quad (3.6)$$

$$\sigma^2(r^k) = \mathbf{D}\xi(r^k) = r \sum_{d|r} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} - \left[\sum_{d|r} \frac{\varphi(d)}{d} \right]^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2}. \quad (3.7)$$

Если r имеет каноническое разложение вида (2.8), то из формул (3.6) и (3.7) с учетом равенств (2.10) и (2.11) следует, что

$$m(r^k) = \theta_1(r) \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}, \quad (3.8)$$

$$\sigma^2(r^k) = r\theta_2(r) \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} - \theta_1^2(r) \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2}. \quad (3.9)$$

При $k \rightarrow \infty$ из формул (3.8) и (3.9) находим, что

$$m(r^k) = \theta_1(r) \ln k \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln k}\right) \right), \quad (3.10)$$

$$\sigma^2(r^k) = r\theta_2(r) \ln k \left(1 + O\left(\frac{r}{\ln k}\right) \right). \quad (3.11)$$

В соответствии с равенствами (3.4), (3.8) и (3.9) среднее и дисперсия $\xi(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n})$ имеют вид:

$$m(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) = \mathbf{M} \xi(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) = \sum_{r=1}^n \theta_1(r) \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{1}{j}, \quad (3.12)$$

$$\sigma^2(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) = \mathbf{D}(\xi(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n})) = \sum_{r=1}^n \left[r \theta_2(r) \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{1}{j} - \theta_2^2(r) \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{1}{j^2} \right], \quad (3.13)$$

где $\sum_{r=1}^n r \alpha_r = n$.

4. Предельная теорема

Предельное поведение при $k \rightarrow \infty$ случайной величины $\xi(r^k)$ описывается следующей теоремой.

Теорема. При $k \rightarrow \infty$ в зависимости от скорости роста r имеются три случая:

1⁰. Если $\frac{\ln k}{r} \rightarrow \infty$, то случайная величина $\xi' = (\xi(r^k) - m(r^k)) \sigma^{-1}(r^k)$ в пределе имеет нормальное распределение с параметрами (0,1).

2⁰. Если $\frac{\ln k}{r} \rightarrow \lambda > 0$ и каноническое разложение r вида (2.8) удовлетворяет условию (2.13), то функция распределения случайной величины $\xi'' = (\xi(r^k) - (\theta_1(r) - 1) \ln k) r^{-1}$ слабо сходится к функции распределения пуассоновского типа

$$F(x; \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{[x]} \frac{\lambda^j}{j!},$$

где $[x]$ — целая часть от x . В точках разрыва функции $F(x; \lambda)$ сходимость в общем случае не имеет места.

3⁰. Если $\frac{\ln k}{r} \rightarrow 0$ и выполнены соотношения (2.8) и (2.13), то предельное распределение случайной величины $\xi(r^k)/r$ вырожденное, а именно, для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} \left(\left| \frac{\xi(r^k)}{r} - \frac{(\theta_1(r) - 1) \ln k}{r} \right| < \varepsilon \right) \rightarrow 1. \quad (4.1)$$

Доказательство

1°. Пусть $\ln k / r \rightarrow \infty$. Положим $m = m(r^k)$ и $\sigma^2 = \sigma^2(r^k)$. Из формул (2.9), (3.10) и (3.11) следует, что

$$\frac{m}{\sigma} = \theta_1(r) \sqrt{\frac{\ln k}{r\theta_2(r)}} \left(1 + O\left(\frac{r}{\ln k}\right) \right), \quad (4.2)$$

$$\frac{\mathbf{M}\xi_r^2}{\sigma^2} \ln k = 1 + O\left(\frac{r}{\ln k}\right). \quad (4.3)$$

Кроме того,

$$\frac{\mathbf{M}\xi_r^3}{\sigma^3} \ln k = O\left(\sqrt{\frac{r}{\ln k}}\right). \quad (4.4)$$

У случайной величины ξ_r / σ существуют первые три момента, и для ее характеристической функции в окрестности нуля имеет место представление

$$\Psi(e^{it/\sigma}; r) = 1 + \mathbf{M}\xi_r \frac{it}{\sigma} - \frac{t^2}{2\sigma^2} \mathbf{M}\xi_r^2 + R(t; r), \quad (4.5)$$

где

$$|R(t; r)| \leq \frac{|t|^3}{6\sigma^3} \mathbf{M}\xi_r^3.$$

С использованием формулы (3.2) и формулы Стирлинга для Γ -функции найдем асимптотическое представление для логарифма характеристической функции $\chi(t; r^k)$ случайной величины $(\xi(r^k) - m)\sigma^{-1}$. Имеем:

$$\ln \chi(t; r^k) = -\frac{imt}{\sigma} + (\Psi(e^{it/\sigma}; r) - 1) \ln k - \ln \Gamma(\Psi(e^{it/\sigma}; r)) + O\left(\frac{r \ln k}{k}\right). \quad (4.6)$$

Из соотношения (4.5) с учетом формул (4.2), (4.3) и (4.4) следует, что

$$\Psi(e^{it/\sigma}; r) \rightarrow 1,$$

а из равенства (4.6) получаем, что при любом t

$$\ln \chi(t; r^k) = -\frac{t^2}{2} + O\left(\sqrt{\frac{r}{\ln k}}\right). \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что при любом t

$$\chi(t; r^k) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

2⁰. Пусть $\frac{\ln k}{r} \rightarrow \lambda > 0$ и выполнено условие (2.13). Тогда, используя формулу (3.2) и применяя формулу Стирлинга для оценки Γ -функции при $k \rightarrow \infty$, получаем асимптотическое представление для логарифма характеристической функции $\tilde{\chi}(t; r^k)$ случайной величины ξ'' :

$$\ln \tilde{\chi}(t; r^k) = -\frac{it(\theta_1(r)-1)\ln k}{r} + (\Psi(e^{it/r}; r) - 1)\ln k - \ln \Gamma(\Psi(e^{it/r}; r)) + O\left(\frac{\ln k}{k}\right). \quad (4.8)$$

Из соотношения (2.23) следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$\ln \Gamma(\Psi(e^{it/r}; r)) \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

Используя равенство (2.22), из соотношения (4.8) получаем, что

$$\ln \tilde{\chi}(t; r^k) = \frac{\ln k}{r} it + \frac{\ln k}{r} \sum_{s=2}^{\infty} \theta_s(r) \frac{(it)^s}{s!} + O\left(\frac{\ln k}{k}\right). \quad (4.10)$$

При выполнении условия (2.13) для $s = 2, 3, \dots$ имеют место соотношения (2.17), из которых вытекает существование пределов (2.18). Это означает, что при достаточно больших r величины $\theta_s(r)$ ограничены и, следовательно, ряд в правой части равенства (4.10) сходится равномерно в некоторой ограниченной окрестности точки $t = 0$. Поэтому при выполнении условия 2⁰ теоремы при $k, r \rightarrow \infty$ получаем, что

$$\ln \tilde{\chi}(t; r^k) = \lambda(e^{it} - 1) \left(1 + O\left(\sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i}\right) \right) + O\left(\frac{\ln k}{k}\right). \quad (4.11)$$

Переходя к пределу при $k, r \rightarrow \infty$, с учетом условий 2⁰ получаем, что для любого t

$$\tilde{\chi}(t; r^k) \rightarrow e^{\lambda(e^{it} - 1)}. \quad (4.12)$$

3⁰. При $\frac{\ln k}{r} \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$ соотношение (4.1) следует из существования при этих условиях предела $\tilde{\chi}(t; r^k) \rightarrow 1$. Теорема доказана.

Пусть теперь A принадлежит цикловому классу $[r_1^{\alpha_1} \dots r_l^{\alpha_l}]$, $r_1 \alpha_1 + \dots + r_l \alpha_l = n$, и $\xi(r_1^{\alpha_1} \dots r_l^{\alpha_l})$ — число циклов в случайном выбранном решении X уравнения (1.1). Если числа $r_1, \dots, r_l$ имеют канонические разложения

$$r_j = r_{1j}^{\gamma_{1j}} \dots r_{v_j,j}^{\gamma_{v_j,j}}, \quad j = 1, 2, \dots, l,$$

то получаем следующие формулы для средних и дисперсий:

$$m_j = \mathbf{M}\xi(r_j^{\alpha_{r_j}}) = \prod_{i=1}^{v_j} \left[1 + \gamma_{ij} \left(1 - \frac{1}{r_{ij}} \right) \right] \ln \alpha_{r_j}, \quad (4.13)$$

$$\sigma_j^2 = \mathbf{D}\xi(r_j^{\alpha_{r_j}}) = r_j \prod_{i=1}^{v_j} \left[1 + \frac{1}{r_{ij}} \left(1 - \frac{1}{r_{ij}^{\gamma_{ij}}} \right) \right] \ln \alpha_{r_j},$$

$$j = 1, 2, \dots, l.$$

Из приведенной выше теоремы получаем два следствия.

Следствие 1. При $n \rightarrow \infty$ и выполнении условий

$$\frac{\ln \alpha_{r_j}}{r_j} \rightarrow \infty, j = 1, 2, \dots, l, \quad (4.14)$$

для предельного распределения случайной величины

$$\eta(r_1^{\alpha_{r_1}} \dots r_l^{\alpha_{r_l}}) = \sum_{j=1}^l \frac{\xi(r_j^{\alpha_{r_j}}) - m_j}{\sigma_j} \quad (4.15)$$

могут быть два случая:

а) если $0 < l \leq c < \infty$, то случайная величина $\eta(r_1^{\alpha_{r_1}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}})$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, l)$;

б) если $l \rightarrow \infty$ и выполнено условие

$$\sum_{j=1}^l \sqrt{\frac{r_j}{\ln \alpha_{r_j}}} \rightarrow 0, \quad (4.16)$$

то случайная величина $\eta(r_1^{\alpha_{r_1}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}}) / \sqrt{l}$ имеет в пределе нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$.

Условие а) следствия 1 следует из условия 1⁰ теоремы 1, так как сумма независимых нормально распределенных случайных величин имеет нормальное распределение.

При выполнении условий б) для логарифма характеристической функции величины $(\xi(r_j^{\alpha_{r_j}}) - m_j) \sigma_j^{-1}$ из соотношения (4.7) следует выражение

$$\ln \chi(t; r_j^{\alpha_{r_j}}) = -\frac{t^2}{2} + O\left(\sqrt{\frac{r_j}{\ln \alpha_{r_j}}}\right).$$

Поэтому для логарифма характеристической функции величины $\eta(r_1^{\alpha_{r_1}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}}) / \sqrt{l}$ имеем следующее представление:

$$\ln \chi(t; r_j^{\alpha_{r_j}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}}) = -\frac{t^2}{2} + O\left(\sum_{j=1}^l \sqrt{\frac{r_j}{\ln \alpha_{r_j}}}\right),$$

из которого в силу условия (4.16) находим, что

$$\ln \chi(t; r_j^{\alpha_{r_j}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}}) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Следствие 2. Если при $n \rightarrow \infty$ выполнены условия

$$\frac{\ln \alpha_{r_j}}{r_j} \rightarrow \lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (4.17)$$

и канонические разложения $r_1, r_2, \dots, r_l$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{\lambda_j} \frac{1}{r_{ij}} \rightarrow 0, \quad \sum_{j=1}^l \frac{\ln \alpha_{r_j}}{\alpha_{r_j}} \rightarrow 0, \quad (4.18)$$

то для предельных распределений случайной величины

$$\zeta(r_1^{\alpha_{r_1}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}}) = \sum_{j=1}^l \frac{\xi(r_j^{\alpha_{r_j}}) - (\theta_1(r_j) - 1) \ln \alpha_{r_j}}{r_j} \quad (4.19)$$

имеют место два случая:

а) если $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_l < \infty, 0 < l \leq c < \infty$, то функция распределения случайной величины $\zeta(r_1^{\alpha_{r_1}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}})$ слабо сходится к функции распределения пуассоновского типа с параметром $\lambda_1 + \dots + \lambda_l$;

б) если $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_l \rightarrow \infty, \quad l \rightarrow \infty$, то случайная величина $(\zeta(r_1^{\alpha_{r_1}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}}) - \lambda) / \sqrt{\lambda}$ асимптотически нормальна с параметрами (0,1).

Случай а) следствия 2 следует из условия 2⁰ теоремы 1, так как распределение суммы независимых случайных величин, распределение каждой из которых сходится к распределению пуассоновского типа, слабо сходится к свертке указанных распределений. При выполнении условий б) в соответ-

ствии с равенством (4.11) для логарифма характеристической функции величины $\left(\zeta(r_1^{\alpha_{r_1}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}}) - \lambda\right) / \sqrt{\lambda}$ имеем представление

$$\ln \tilde{\chi}(t; r_1^{\alpha_{r_1}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}}) = -it\sqrt{\lambda} \sum_{j=1}^l \ln \tilde{\chi}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}; r_j^{\alpha_{r_j}}\right) = -\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + O\left(\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{\lambda_j} \frac{1}{r_{ij}}\right) + O\left(\sum_{j=1}^l \frac{\ln \alpha_{r_j}}{\alpha_{r_j}}\right),$$

из которого следует, что для любого t

$$\tilde{\chi}(t; r_1^{\alpha_{r_1}}, \dots, r_l^{\alpha_{r_l}}) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Список литературы

1. Сачков В. Н. Трансляторы и трансляции дискретных функций. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 9. — М.: Гелиос, 2006, с. 253–268.
2. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977.