Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Пичкур, Описание класса подстановок, представимых в виде произведения двух подстановок с фиксированным числом мобильных точек, *Матем. вопр. криптогр.*, 2012, том 3, выпуск 2, 79–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk55>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:20:50

УДК 512.542.74

**Описание класса подстановок,
представимых в виде произведения
двух подстановок с фиксированным числом
мобильных точек**

А. Б. Пичкур

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 20.V.2011

В работе полностью описано строение класса подстановок степени N , представимых в виде произведения двух подстановок с q мобильными и $N - q$ неподвижными точками, $4 \leq q \leq \frac{N}{2}$.

Ключевые слова: симметрическая группа, мультипликативные представления, неподвижные точки

Description of the set of permutations represented as a product of two permutations with fixed number of mobile points

A. B. Pichkur

LLC "Certification Research Center", Moscow

Abstract. We describe completely the structure of the set of permutations representable by the product of two permutations with q mobile and $N - q$ fixed points, $4 \leq q \leq \frac{N}{2}$.

Key words: symmetric group, multiplicative representations, fixed points

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2012, vol. 3, no. 2, pp. 79–95 (Russian).

© 2012 А. Б. Пичкур

Пусть подстановка $G \in S_N$, $\Gamma(G) \subseteq \{1, \dots, N\}$ — множество мобильных точек подстановки G , $2 \leq q \leq N$ — натуральное число. Обозначим через

$$\Gamma_N(q) = \{G \in S_N \mid |\Gamma(G)| = q\}$$

множество всех подстановок степени N , имеющих ровно q мобильных (и, значит, $N - q$ неподвижных) точек.

В данной работе описано множество всех подстановок из $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$, т. е. всех подстановок, представимых в виде произведения двух подстановок с q мобильными точками. Эта задача связана с приложениями в криптографии.

В научной литературе рассматривается схожая задача описания множества подстановок, принадлежащих произведению двух или более классов сопряженных элементов из S_N (или из A_N). При этом основное внимание уделяется вычислению двух параметров: числу покрытия (covering number) и расширенному числу покрытия (extended covering number) S_N (или A_N).

Под *числом покрытия* группы G понимается наименьшее натуральное число k , удовлетворяющее условию: для любого нетривиального класса C сопряженных элементов группы G выполняется равенство $C^k = G$.

Под *расширенным числом покрытия* группы G понимается наименьшее натуральное число k , удовлетворяющее условию: для любых нетривиальных классов $C_1, \dots, C_k$ сопряженных элементов группы G выполняется равенство $C_1 \cdot \dots \cdot C_k = G$.

Также для фиксированного класса сопряженных элементов C изучалось значение *экспоненты* C , т. е. наименьшего натурального k со свойством $C^k = G$.

В списке литературы приведен неполный перечень публикаций по указанной теме. Ряд важных результатов можно найти в монографии [10].

Так как $\Gamma_N(q)$ является объединением классов сопряженных элементов из S_N , то для решения поставленной задачи можно использовать некоторые из известных результатов. В частности, в [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $G \in A_N$, $c(G)$ — число неединичных циклов в G , $q > 0$ и $\frac{c(G) + |\Gamma(G)|}{2} \leq q \leq N$. Тогда существуют такие q -циклы P_1, P_2 , что $G = P_1 \cdot P_2$.

Следующая теорема, справедливая и для нечетных подстановок, была опубликована автором в 1990 г. в ведомственном издании.

Теорема 2. Пусть $N \geq 5$, $4 \leq q \leq N$, $G \in S_N$. Если $|\Gamma(G)| \leq \left\lceil \frac{4}{3}q \right\rceil + 1$, то существуют q -цикл P_1 и подстановка $P_2 \in \Gamma_N(q)$, для которых выполняется равенство $G = P_1 \cdot P_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 2, в частности, следует, что при $N \geq 5$, $4 \leq q \leq N$ в $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$ содержатся все множества $\Gamma_N(r)$, где $2 \leq r \leq \left\lceil \frac{4}{3}q \right\rceil + 1$. Однако этот результат описывает строение множества $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$ лишь частично.

Ниже строение множества $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$ будет изучено полностью. Сначала докажем важное для дальнейших рассуждений вспомогательное утверждение.

Утверждение 3. Если $N \geq 6$, $2 \leq q_1 < q_2 \leq \frac{N}{2}$, то имеет место включение $\Gamma_N(q_1) \cdot \Gamma_N(q_1) \subseteq \Gamma_N(q_2) \cdot \Gamma_N(q_2)$.

Доказательство. Пусть $H \in \Gamma_N(q_1) \cdot \Gamma_N(q_1)$, т. е. для некоторых $H_1, H_2 \in \Gamma_N(q_1)$ имеет место равенство $H = H_1 \cdot H_2$. Так как $|\Gamma(H_1) \cup \Gamma(H_2)| \leq 2 \cdot q_1$, то

$$|\Omega \setminus (\Gamma(H_1) \cup \Gamma(H_2))| = N - |\Gamma(H_1) \cup \Gamma(H_2)| \geq N - 2q_1 \geq 2q_2 - 2q_1 \geq 2(q_2 - q_1).$$

1. Если $q_2 - q_1 \geq 2$, то в множестве $\Omega \setminus (\Gamma(H_1) \cup \Gamma(H_2))$ можно выбрать $t = q_2 - q_1$ элементов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ и получить равенство

$$H = (H_1 \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_t)) \cdot (H_2 \cdot (\alpha_t, \dots, \alpha_2, \alpha_1)).$$

Действительно, так как

$$\Gamma((\alpha_1, \dots, \alpha_t)) \cap \Gamma(H_1) = \emptyset, \quad \Gamma((\alpha_1, \dots, \alpha_t)) \cap \Gamma(H_2) = \emptyset,$$

то

$$\begin{aligned} & (H_1 \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_t)) \cdot (H_2 \cdot (\alpha_t, \dots, \alpha_2, \alpha_1)) = \\ & = H_1 \cdot H_2 \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \cdot (\alpha_t, \dots, \alpha_2, \alpha_1) = H_1 \cdot H_2 = H, \end{aligned}$$

$$|\Gamma(H_1 \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_t))| = |\Gamma(H_1)| + t = q_1 + t = q_2,$$

$$|\Gamma(H_2 \cdot (\alpha_t, \dots, \alpha_1))| = |\Gamma(H_2)| + t = q_1 + t = q_2.$$

Итак, доказано, что $H \in \Gamma_N(q_2) \cdot \Gamma_N(q_2)$.

2. Пусть теперь $q_2 - q_1 = 1$.

2а. Если при этом $\Gamma(H_1) \neq \Gamma(H_2)$, то существуют $\alpha_1 \in \Gamma(H_1) \setminus \Gamma(H_2)$ и $\beta_1 \in \Gamma(H_2) \setminus \Gamma(H_1)$. Рассмотрим соответствующие циклы из цикловой записи подстановок H_1, H_2 :

$$H_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1', \quad H_2 = (\beta_1, \dots, \beta_s) \cdot H_2'.$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\begin{aligned} & ((\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1) \cdot H_1')((\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \cdot H_2') = \\ & = ((\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1')((\beta_1, \dots, \beta_s) \cdot H_2') = H_1 \cdot H_2 = H. \end{aligned}$$

Так как

$$|\Gamma((\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1) \cdot H_1')| = q_1 + 1 = q_2,$$

$$|\Gamma((\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \cdot H_2')| = q_1 + 1 = q_2,$$

то полученное равенство означает, что $H \in \Gamma_N(q_2) \cdot \Gamma_N(q_2)$.

2б. Рассмотрим оставшийся случай $\Gamma(H_1) = \Gamma(H_2)$. В этом случае $\Gamma(H) \subseteq \Gamma(H_1)$ и, значит, $|\Gamma(H)| \leq q_1$. Тогда

$$|\Omega \setminus (\Gamma(H_1) \cup \Gamma(H_2))| = N - |\Gamma(H_1)| = N - q_1 > N - \frac{N}{2} = \frac{N}{2} \geq 3.$$

Полученное условие означает, что можно выбрать точку $\delta \in \Omega \setminus \Gamma(H_1)$.

Если при этом $q_1 = 2$, то сразу получаем, что $H_1 = H_2$ — транспозиция. Тогда $H = H_1 \cdot H_2 = E$ — тождественная подстановка. В этом случае включение $H \in \Gamma_N(q_2) \cdot \Gamma_N(q_2)$ очевидно.

Пусть теперь $q_1 \geq 3$. Рассмотрим два возможных случая.

Сначала предположим, что $\Gamma(H) \neq \Gamma(H_1)$. Это означает, что существует $\alpha \in \Gamma(H_1)$ со свойством $H(\alpha) = \alpha$. Отсюда следует, что для некоторого $\beta \neq \alpha$, $\beta \in \Gamma(H_1)$ выполняются равенства $H_1(\alpha) = \beta$, $H_2(\beta) = \alpha$. Тогда выберем $\delta \in \Omega \setminus \Gamma(H_1)$ и положим

$$H_1'(x) = \begin{cases} \delta, & x = \alpha, \\ \beta, & x = \delta, \\ H_1(x), & x \in \Gamma(H_1) \setminus \{\alpha\}, \end{cases} \quad H_2'(x) = \begin{cases} \delta, & x = \beta, \\ \alpha, & x = \delta, \\ H_2(x), & x \in \Gamma(H_1) \setminus \{\beta\}. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $H = H_1' \cdot H_2'$. Так как при этом

$$|\Gamma(H_1')| = q_1 + 1 = q_2, \quad |\Gamma(H_2')| = q_1 + 1 = q_2,$$

то полученное равенство означает, что $H \in \Gamma_N(q_2) \cdot \Gamma_N(q_2)$.

Наконец, пусть $\Gamma(H) = \Gamma(H_1)$. Это означает, что для любого $\alpha \in \Gamma(H_1)$ $H_1(\alpha) = \beta$, $\beta \neq \alpha$ и $H_2(\beta) = \gamma$, $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \neq \beta$. Зафиксируем некоторый $\alpha \in \Gamma(H_1)$, выберем $\delta \in \Omega \setminus \Gamma(H_1)$ и положим

$$H_1'(x) = \begin{cases} \delta, & x = \alpha, \\ \beta, & x = \delta, \\ H_1(x), & x \in \Gamma(H_1) \setminus \{\alpha\}, \end{cases} \quad H_2'(x) = \begin{cases} \delta, & x = \beta, \\ \gamma, & x = \delta, \\ H_2(x), & x \in \Gamma(H_1) \setminus \{\beta\}. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $H = H_1' \cdot H_2'$. Так как при этом

$$|\Gamma(H_1')| = q_1 + 1 = q_2, \quad |\Gamma(H_2')| = q_1 + 1 = q_2,$$

то полученное равенство означает, что $H \in \Gamma_N(q_2) \cdot \Gamma_N(q_2)$.

Утверждение доказано полностью.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 4. Пусть $N \geq 8$, $4 \leq q \leq \frac{N}{2}$, $G \in S_N$. Если $|\Gamma(G)| \leq 2q - 2$, то существуют подстановки $H_1, H_2 \in \Gamma_N(q)$, для которых выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$.

Прежде чем приступать к доказательству этой теоремы, проверим ее выполнение для небольших значений $q \in \{4, 5, 6\}$.

Сначала отметим один очевидный факт: если $H \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$, то любая подстановка, сопряженная с H , также лежит в $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$. Действительно, если $H = H_1 \cdot H_2$, $H_1, H_2 \in \Gamma_N(q)$ и $G = X^{-1} \cdot H \cdot X$, то

$$G = (X^{-1}H_1X) \cdot (X^{-1}H_2X), \quad X^{-1}H_1X \in \Gamma_N(q), \quad X^{-1}H_2X \in \Gamma_N(q).$$

Значит, множество $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$ является объединением некоторых классов сопряженных в группе S_N подстановок.

1. Пусть $q = 4$. Согласно теореме 4 должно выполняться включение

$$\Gamma_N(2) \cup \Gamma_N(3) \cup \Gamma_N(4) \cup \Gamma_N(5) \cup \Gamma_N(6) \subseteq \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(4).$$

С учетом сделанного выше замечания для проверки этого свойства необходимо выписать все возможные цикловые структуры подстановок из

$\Gamma_N(2) \cup \Gamma_N(3) \cup \Gamma_N(4) \cup \Gamma_N(5) \cup \Gamma_N(6)$ и в каждом случае указать подстановки из $\Gamma_N(4)$, произведение которых дает подстановку с нужной цикловой структурой. Выпишем результаты расчетов в виде таблицы.

	Цикловые структуры	Представление в виде произведения двух подстановок из $\Gamma_N(4)$
$\Gamma_N(2)$	$[2^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 2)(3, 4) = (2, 4)$
$\Gamma_N(3)$	$[3^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (3, 2, 1, 5) = (3, 4, 5)$
$\Gamma_N(4)$	$[2^2]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 2, 3, 4) = (1, 3)(2, 4)$
	$[4^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 3)(2, 4) = (1, 4, 3, 2)$
$\Gamma_N(5)$	$[2^1, 3^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 3)(2, 5) = (1, 5, 2)(3, 4)$
	$[5^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 2, 3, 5) = (1, 3, 4, 2, 5)$
$\Gamma_N(6)$	$[2^3]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 3)(5, 6) = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$
	$[2^1, 4^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (3, 5, 4, 6) = (1, 2, 5, 4)(3, 6)$
	$[3^2]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (3, 4, 5, 6) = (1, 2, 4)(3, 5, 6)$
	$[6^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 6)(3, 5) = (1, 2, 5, 3, 4, 6)$

2. Пусть $q = 5$. В силу утверждения 3

$$\Gamma_N(2) \cup \Gamma_N(3) \cup \Gamma_N(4) \cup \Gamma_N(5) \cup \Gamma_N(6) \subseteq \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(4) \subseteq \Gamma_N(5) \cdot \Gamma_N(5).$$

Поэтому осталось только проверить включение $\Gamma_N(7) \cup \Gamma_N(8) \subseteq \Gamma_N(5) \cdot \Gamma_N(5)$. Снова выпишем результаты расчетов в виде таблицы.

	Цикловые структуры	Представление в виде произведения двух подстановок из $\Gamma_N(5)$
$\Gamma_N(7)$	$[7^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5) \cdot (1, 2, 3, 6, 7) = (1, 3, 4, 5, 2, 6, 7)$
	$[2^1, 5^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 6)(4, 5, 7) = (1, 6, 2, 3, 5)(4, 7)$
	$[2^2, 3^1]$	$(1, 2)(3, 4, 5) \cdot (3, 4, 5)(6, 7) = (1, 2)(3, 5, 4)(6, 7)$
	$[3^1, 4^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 5)(1, 6, 7) = (1, 5, 6, 7)(2, 3, 4)$

Окончание таблицы

	Цикловые структуры	Представление в виде произведения двух подстановок из $\Gamma_N(5)$
$\Gamma_N(8)$	$[8^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 6, 7)(5, 8) = (1, 6, 7, 2, 3, 4, 8, 5)$
	$[2^1, 6^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 6, 1, 7, 8) = (1, 6)(2, 3, 4, 5, 7, 8)$
	$[2^2, 4^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5) \cdot (1, 2, 6)(7, 8) = (1, 6)(2, 3, 4, 5)(7, 8)$
	$[2^4]$	$(1, 2)(3, 4, 5) \cdot (3, 4, 6)(7, 8) = (1, 2)(3, 6)(4, 5)(7, 8)$
	$[2^1, 3^2]$	$(1, 2, 3, 4, 5) \cdot (3, 5)(6, 7, 8) = (1, 2, 5)(3, 4)(6, 7, 8)$
	$[3^1, 5^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5) \cdot (1, 3, 6, 7, 8) = (1, 2, 6, 7, 8)(3, 4, 5)$
	$[4^2]$	$(1, 2, 3, 4, 5) \cdot (1, 2, 6, 7, 8) = (1, 6, 7, 8)(2, 3, 4, 5)$

3. Пусть теперь $q = 6$. В силу утверждения 3

$$\Gamma_N(2) \cup \dots \cup \Gamma_N(8) \subseteq \Gamma_N(5) \cdot \Gamma_N(5) \subseteq \Gamma_N(6) \cdot \Gamma_N(6).$$

Поэтому осталось проверить включение $\Gamma_N(9) \cup \Gamma_N(10) \subseteq \Gamma_N(6) \cdot \Gamma_N(6)$.

Снова выпишем результаты расчетов в виде таблицы.

	Цикловые структуры	Представление в виде произведения двух подстановок из $\Gamma_N(6)$
$\Gamma_N(9)$	$[9^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \cdot (1, 2, 3, 7, 8, 9) = (1, 3, 4, 5, 6, 2, 7, 8, 9)$
	$[2^1, 7^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \cdot (1, 2, 3, 7)(8, 9) = (1, 3, 4, 5, 6, 2, 7)(8, 9)$
	$[2^2, 5^1]$	$(1, 2, 3, 4)(5, 6) \cdot (1, 3)(5, 7)(8, 9) = (1, 2)(3, 4)(5, 6, 7)(8, 9)$
	$[2^3, 3^1]$	$(1, 2, 3, 4)(5, 6) \cdot (1, 2, 3, 7)(8, 9) = (1, 3, 4, 2, 7)(5, 6)(8, 9)$
	$[2^1, 3^1, 4^1]$	$(1, 2, 3, 4)(5, 6) \cdot (1, 8, 2, 9)(5, 7) = (1, 9)(5, 6, 7)(2, 3, 4, 8)$
	$[3^1, 6^1]$	$(1, 2, 3, 4)(5, 6) \cdot (1, 8)(5, 7)(2, 9) = (1, 9, 2, 3, 4, 8)(5, 6, 7)$
	$[3^3]$	$(1, 2, 3)(4, 5, 6) \cdot (4, 5, 6)(7, 8, 9) = (1, 2, 3)(4, 6, 5)(7, 8, 9)$
	$[4^1, 5^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \cdot (1, 7, 8, 9)(2, 6) = (1, 6, 7, 8, 9)(2, 3, 4, 5)$

Окончание таблицы

	Цикловые структуры	Представление в виде произведения двух подстановок из $\Gamma_N(6)$
$\Gamma_N(10)$	$[10^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \cdot (1, 7, 8)(2, 9, 10) = (1, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$
	$[2^1, 8^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \cdot (1, 8, 9, 10, 2, 7) = (1, 7)(2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10)$
	$[2^2, 6^1]$	$(1, 2, 3, 4)(5, 6) \cdot (1, 7)(2, 8)(9, 10) = (1, 8, 2, 3, 4, 7)(5, 6)(9, 10)$
	$[2^3, 4^1]$	$(1, 2, 3, 4)(5, 6) \cdot (1, 7, 2, 8)(9, 10) = (1, 8)(2, 3, 4, 7)(5, 6)(9, 10)$
	$[2^5]$	$(1, 2, 3, 4)(5, 6) \cdot (1, 3)(7, 8)(9, 10) = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)$
	$[2^2, 3^2]$	$(1, 2, 3)(4, 5, 6) \cdot (4, 5, 7)(8, 9, 10) = (1, 2, 3)(4, 7)(5, 6)(8, 9, 10)$
	$[2^1, 3^1, 5^1]$	$(1, 2, 3, 4)(5, 6) \cdot (5, 7)(2, 8)(9, 10) = (1, 8, 2, 3, 4)(5, 6, 7)(9, 10)$
	$[2^1, 4^2]$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \cdot (1, 5)(7, 8, 9, 10) = (1, 2, 3, 4)(5, 6)(7, 8, 9, 10)$
	$[3^1, 7^1]$	$(1, 2, 3, 4)(5, 6) \cdot (1, 8, 9, 10)(5, 7) = (1, 2, 3, 4, 8, 9, 10)(5, 6, 7)$
	$[3^2, 4^1]$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \cdot (1, 4)(7, 8, 9, 10) = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9, 10)$
	$[4^1, 6^1]$	$(1, 2, 3, 4)(5, 6) \cdot (1, 9, 10)(5, 7, 8) = (1, 2, 3, 4, 9, 10)(5, 6, 7, 8)$
	$[5^2]$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \cdot (1, 2, 7, 8, 9, 10) = (1, 7, 8, 9, 10)(2, 3, 4, 5, 6)$

Доказательство теоремы 4.

1. Выше было показано, что теорема 4 верна при $q \in \{4, 5, 6\}$. Далее доказательство теоремы проводится индукцией по q .

Пусть $q > 6$. Если $G \in S_N$ и $|\Gamma(G)| \leq 2q - 4$, то по предположению индукции $G \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q-1)$. Тогда $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$ по утверждению 3.

2. Рассмотрим случай $G \in S_N$ и $|\Gamma(G)| = 2q - 3$.

2а. Пусть в цикловой записи G имеются циклы одинаковой длины

$$G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(\beta_1, \dots, \beta_r)G_1,$$

$|\Gamma(G_1)| = 2(q-r)-3$, $2 \leq r < q-1$. Обозначим $\Omega' = \{1, \dots, N\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r\}$, $|\Omega'| = N' = N - 2r$, $q' = q - r < q$, $G_1 \in S(\Omega')$. При этом выполнено неравенство $q' \leq \frac{N'}{2}$.

Если при этом $q' \geq 4$, то по предположению индукции существуют две подстановки $H_1, H_2 \in S(\Omega')$, $H_1, H_2 \in \Gamma_{N'}(q')$, для которых имеет место равенство $G_1 = H_1 \cdot H_2$. Тогда

$$G = [(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1] \cdot [(\beta_1, \dots, \beta_r) \cdot H_2],$$

причем $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1, (\beta_1, \dots, \beta_r) \cdot H_2 \in \Gamma_N(q)$. Значит, $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

Если $q-r=3$, то $|\Gamma(G_1)|=3$, и подстановка G_1 является 3-циклом: $G_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Тогда имеет место равенство

$$G = [(\alpha_1, \dots, \alpha_{q-3}) \cdot (\gamma_1, \gamma_2)] \cdot [(\beta_1, \dots, \beta_{q-3}) \cdot (\gamma_1, \gamma_3)],$$

из которого следует, что $G \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q-1)$. С учетом утверждения 3 получаем включение $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

Если $q-r=2$, то получаем противоречие $|\Gamma(G_1)|=1$.

26. Пусть теперь в цикловой записи G длины всех неединичных циклов различны. Поскольку число $2q-3$ нечетно, то один из этих циклов имеет нечетную длину $r = 2t+1 \geq 3$:

$$G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2t+1}) G_1, \quad |\Gamma(G_1)| = 2(q-t-1) - 2.$$

Обозначим $\Omega' = \{1, \dots, N\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_{2t+1}\}$, $|\Omega'| = N' = N - 2t - 1$, $q' = q - t - 1 < q$, $G_1 \in S(\Omega')$. При этом выполнено неравенство $q' \leq \frac{N}{2} - t - 1 = \frac{N - 2t - 2}{2} = \frac{N' - 1}{2} < \frac{N'}{2}$.

Если при этом $q' \geq 4$, то по предположению индукции существуют подстановки $H_1, H_2 \in S(\Omega')$, $H_1, H_2 \in \Gamma_{N'}(q')$, для которых выполняется равенство $G_1 = H_1 \cdot H_2$. Тогда

$$G = [(\alpha_1, \dots, \alpha_{t+1}) \cdot H_1] \cdot [(\alpha_1, \alpha_{t+2}, \dots, \alpha_{2t+1}) \cdot H_2],$$

причем $(\alpha_1, \dots, \alpha_{t+1}) \cdot H_1, (\alpha_1, \alpha_{t+2}, \dots, \alpha_{2t+1}) \cdot H_2 \in \Gamma_N(q-t-1+t+1) = \Gamma_N(q)$.

Если $q - t - 1 = 3$, то $|\Gamma(G_1)| = 4$, и возможны два случая: либо G_1 является произведением двух независимых транспозиций, либо G_1 – 4-цикл.

В первом случае $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2q-7})(\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2)$, откуда следует равенство $G = [(\alpha_1, \dots, \alpha_{q-3})(\beta_1, \beta_2)] \cdot [(\alpha_1, \alpha_{q-2}, \dots, \alpha_{2q-7})(\gamma_1, \gamma_2)]$, означающее, что $G \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q-1)$. С учетом утверждения 3 получаем включение $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

Во втором случае при $q \geq 6$ подстановка G сопряжена с подстановкой

$$\tilde{G} = (1, 2, \dots, q-5, q, q+1, \dots, 2q-3)(q-4, q-3, q-2, q-1),$$

которая представима в виде произведения

$$\tilde{G} = (1, 2, \dots, q) \cdot [(q-4, q)(1, q+1, \dots, 2q-3)] \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q).$$

Значит, и в этом случае $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

Если $q - t - 1 = 2$, то $|\Gamma(G_1)| = 2$, и подстановка G_1 является транспозицией. При $q \geq 6$ подстановка G сопряжена с подстановкой

$$\tilde{G} = (1, 2, \dots, q-2, q, q-1, q+1, \dots, 2q-5)(2q-4, 2q-3),$$

которая представима в виде произведения

$$\tilde{G} = (1, 2, \dots, q) \cdot [(2q-4, 2q-3)(1, q-1, \dots, 2q-5)] \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q).$$

Значит, $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

Если $q - t - 1 = 1$, то $|\Gamma(G_1)| = 0$, т. е. $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2q-3})$. Тогда $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}) \cdot (\alpha_1, \alpha_q, \dots, \alpha_{2q-3}) \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q-1)$. С учетом утверждения 3 и здесь получаем включение $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

3. Осталось рассмотреть случай $G \in S_N$ и $|\Gamma(G)| = 2q - 2$.

3а. Пусть в цикловой записи G имеются циклы одинаковой длины

$$G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(\beta_1, \dots, \beta_r)G_1, \quad |\Gamma(G_1)| = 2(q-r)-2, \quad 2 \leq r \leq q-1.$$

Снова обозначим $\Omega' = \{1, \dots, N\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r\}$, $|\Omega'| = N' = N - 2r$,

$q' = q - r < q$, $G_1 \in S(\Omega')$. При этом выполнено неравенство $q' \leq \frac{N'}{2}$.

Если при этом $q' \geq 4$, то существуют две подстановки $H_1, H_2 \in S(\Omega')$, $H_1, H_2 \in \Gamma_N(q')$, для которых имеет место равенство $G_1 = H_1 \cdot H_2$. Тогда

$$G = [(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1] \cdot [(\beta_1, \dots, \beta_r) \cdot H_2],$$

причем $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1, (\beta_1, \dots, \beta_r) \cdot H_2 \in \Gamma_N(q)$.

Если $q - r = 3$, то $|\Gamma(G_1)| = 4$, и возможны два случая: либо G_1 является произведением двух независимых транспозиций, либо G_1 — 4-цикл. В первом случае $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(\beta_1, \dots, \beta_r)(\gamma_1, \gamma_2)(\delta_1, \delta_2)$, очевидно, лежит в $\Gamma_N(r+2) \cdot \Gamma_N(r+2) = \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q-1)$. С учетом утверждения 3 получаем включение $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

Во втором случае при $q \geq 7$ подстановка G сопряжена с подстановкой

$$\begin{aligned} \tilde{G} = & (1, 2, \dots, q-3)(q-2, q-1, q, 2q-6, 2q-7, \dots, q+1) \times \\ & \times (2q-5, 2q-4, 2q-3, 2q-2), \end{aligned}$$

которая представима в виде произведения

$$\begin{aligned} \tilde{G} = & (1, 2, \dots, q) \cdot [(1, 2q-6, \dots, q+1, q-2)(2q-5, 2q-4, 2q-3, 2q-2)] \in \\ & \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q). \end{aligned}$$

Значит, и в этом случае $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

Если $q - r = 2$, то $|\Gamma(G_1)| = 2$, и подстановка G_1 является транспозицией. Тогда подстановка G сопряжена с подстановкой

$$\tilde{G} = (1, 2, \dots, q-2)(q+1, \dots, 2q-2)(q-1, q),$$

которая представима в виде произведения

$$\tilde{G} = (1, 2, \dots, q) \cdot [(1, q-1)(q+1, \dots, 2q-2)] \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q).$$

Значит, и в этом случае $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

Если $q - r = 1$, то $|\Gamma(G_1)| = 0$, и подстановка G_1 является произведением двух циклов длины $q-1$. Значит, $G \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q-1) \subseteq \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

3б. Осталось рассмотреть случай, когда $|\Gamma(G)| = 2q - 2$, и все неединичные циклы подстановки G имеют различную длину. Пусть G является произведением r циклов, длины которых равны $1 < l_1 < l_2 < \dots < l_r$, $\sum_{i=1}^r l_i = 2q - 2$.

Тогда G сопряжена с подстановкой

$$\tilde{G} = (1, \dots, l_1)(l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2) \dots (l_1 + \dots + l_{r-1} + 1, \dots, 2q - 2).$$

Если $r = 1$, то при $q \geq 5$ подстановка

$$(1, 2, \dots, q) \cdot [(1, q + 1, \dots, 2q - 4)(2, 2q - 3, 2q - 2)] = \\ = (1, 2q - 3, 2q - 2, 2, \dots, q, q + 1, \dots, 2q - 4),$$

с одной стороны, лежит в $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$, а с другой стороны, сопряжена с $\tilde{G}$. Значит, в рассматриваемом случае $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

Пусть теперь $r \geq 2$. Тогда существует такое $2 \leq s \leq r$, что

$$\sum_{i=1}^{s-1} l_i < q, \quad \sum_{i=1}^s l_i \geq q.$$

Умножим подстановку $\tilde{G}$ слева на цикл длины $s - 1$ $(l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})$, а справа — на цикл длины $r - s + 1$ $(l_1 + \dots + l_{s-1} + 1, l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)$. Если $s - 1$ или $r - s + 1$ равны единице, то соответствующие циклы равны тождественной подстановке. В результате имеем подстановку

$$H = (l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1}) \cdot \tilde{G} \cdot (l_1 + \dots + l_{s-1} + 1, l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1) = \\ = (1, 2, \dots, l_1, l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})(l_1 + \dots + l_{s-1} + 1, \dots, 2q - 2).$$

Обозначим $l_1 + \dots + l_{s-1} + 1 = m \leq q$. Можно заметить, что подстановка H представима в виде произведения

$$H = (1, 2, \dots, q) \cdot (m, 1, q + 1, \dots, 2q - 2) \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q).$$

Тогда

$$\tilde{G} = (l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})^{-1} \cdot H \cdot (l_1 + \dots + l_{s-1} + 1, l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)^{-1} = \\ = [(l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})^{-1} \cdot (1, 2, \dots, q)] \times \\ \times [(m, 1, q + 1, \dots, 2q - 2) \cdot (l_1 + \dots + l_{s-1} + 1, l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)^{-1}].$$

Рассмотрим подстановки

$$T_1 = (l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})^{-1} \cdot (1, 2, \dots, q),$$

$$T_2 = (m, 1, q+1, \dots, 2q-2) \cdot (m, l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)^{-1}.$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$\begin{aligned} T_1 &= (l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})^{-1} \cdot (1, 2, \dots, q) = \\ &= (1, 2, \dots, l_1, l_1 + \dots + l_{s-1} + 1, \dots, q)(l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2) \dots (l_1 + \dots + l_{s-2} + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1}). \end{aligned}$$

Значит, $T_1 \in \Gamma_N(q)$. (Если $s = 2$, то $T_1 = (1, 2, \dots, q)$ также лежит в $\Gamma_N(q)$.)

Так как $\sum_{i=1}^s l_i \geq q$, то $\sum_{i=1}^s l_i + 1 \geq q + 1$.

Если $\sum_{i=1}^s l_i + 1 = q + 1$, то

$$\begin{aligned} T_2 &= (m, 1, q+1, \dots, 2q-2) \cdot (m, q+1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)^{-1} = \\ &= (1, m)(q+1, \dots, l_1 + \dots + l_{s+1})(l_1 + \dots + l_{s+1} + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{s+2}) \dots \\ &\quad \dots (l_1 + \dots + l_{r-1} + 1, \dots, 2q-2). \end{aligned}$$

При этом подстановка T_2 имеет

$$2 + l_{s+1} + \dots + l_r = 2q - 2 - (l_1 + \dots + l_s) + 2 = 2q - 2 - q + 2 = q$$

мобильных точек, т. е. $T_2 \in \Gamma_N(q)$.

Пусть теперь $\sum_{i=1}^s l_i + 1 > q + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} T_2 &= (m, 1, q+1, \dots, 2q-2) \cdot (m, l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)^{-1} = \\ &= (m, 1, q+1, \dots, l_1 + \dots + l_s)(l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{s+1}) \dots (l_1 + \dots + l_{r-1} + 1, \dots, 2q-2). \end{aligned}$$

При этом подстановка T_2 имеет

$$2 + (l_1 + \dots + l_s - q) + l_{s+1} + \dots + l_r = 2q - 2 - q + 2 = q$$

мобильных точек, т. е. $T_2 \in \Gamma_N(q)$.

Итак, во всех возможных случаях доказано, что любая подстановка $G \in \Gamma_N(2q-2)$ принадлежит множеству $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$.

Теорема 4 доказана полностью.

Следствие. Если $N \geq 8$, $4 \leq q \leq \frac{N}{2}$ и ε — тождественная подстановка, то

$$\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q) \supseteq \left(\bigcup_{r=2}^{2q-2} \Gamma_N(r) \right) \cup \{\varepsilon\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Совершенно очевидно, что полученный результат не выполняется при $q \in \{2, 3\}$. Действительно, множество $\Gamma_N(2)$ состоит из всех транспозиций, а множество $\Gamma_N(3)$ — из всех циклов длины 3. Поэтому при $q \in \{2, 3\}$ множество $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$ состоит только из четных подстановок. Следовательно, в нем не содержится множество $\Gamma_N(2)$.

Далее рассмотрим, какие подстановки из множеств $\Gamma_N(2q-1)$, $\Gamma_N(2q)$ принадлежат произведению $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$. Пусть G является произведением r неединичных циклов, длины которых равны $m_1, m_2, \dots, m_r$.

Утверждение 5. Пусть $N \geq 4$, $2 \leq q \leq \frac{N}{2}$, подстановка $G \in \Gamma_N(2q)$ является произведением r неединичных циклов, длины которых равны $m_1, m_2, \dots, m_r$, $\sum_{i=1}^r m_i = 2q$. Подстановка G представима в виде произведения двух подстановок из $\Gamma_N(q)$ в том и только в том случае, когда существует такое подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$, что $m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q$.

Доказательство. Если для некоторых подстановок $H_1, H_2 \in \Gamma_N(q)$ выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$, то $\Gamma(H_1) \cap \Gamma(H_2) = \emptyset$. Отсюда следует, что подстановки H_1, H_2 являются произведениями некоторых циклов из цикловой записи подстановки G . Пусть для подстановки H_1 длины этих циклов равны $m_{i_1}, \dots, m_{i_k}$. Поскольку $H_1 \in \Gamma_N(q)$, то $m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q$.

Обратно, пусть искомое подмножество $\{i_1, \dots, i_k\}$ существует. Обозначим $\{j_1, \dots, j_{r-k}\} \subseteq \{1, \dots, r\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. Тогда $m_{j_1} + \dots + m_{j_{r-k}} = 2q - q = q$. Построим подстановку H_1 как произведение циклов подстановки G , имеющих

длины $m_{i_1}, \dots, m_{i_k}$, а подстановку H_2 — как произведение циклов подстановки G , имеющих длины $m_{j_1}, \dots, m_{j_{r-k}}$. Тогда $H_1, H_2 \in \Gamma_N(q)$ и $G = H_1 \cdot H_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказанного утверждения вытекает, что $\Gamma_N(2q) \not\subseteq \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$. Действительно, $2q$ -циклы лежат в $\Gamma_N(2q)$, однако они не удовлетворяют условию утверждения 5.

Утверждение 6. Пусть $N \geq 4$, $2 \leq q \leq \frac{N}{2}$, подстановка $G \in \Gamma_N(2q-1)$ является произведением r неединичных циклов, длины которых равны $m_1, m_2, \dots, m_r$, $\sum_{i=1}^r m_i = 2q-1$. Подстановка G представима в виде произведения двух подстановок из $\Gamma_N(q)$ в том и только в том случае, когда выполнено условие: существуют $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ и такое подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\} \setminus \{i_0\}$, что $m_{i_0} > 2$ и $q - m_{i_1} + m_{i_2} \dots + m_{i_k} \in \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}$.

Доказательство. Если для некоторых подстановок $H_1, H_2 \in \Gamma_N(q)$ выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$, то $|\Gamma(H_1) \cap \Gamma(H_2)| = 1$. Пусть $\Gamma(H_1) \cap \Gamma(H_2) = \{\alpha_1\}$. Отсюда следует, что в подстановке H_1 существует цикл $(\alpha_1, \dots, \alpha_u)$, в подстановке H_2 существует цикл $(\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_v)$, а остальные циклы в H_1, H_2 являются циклами из цикловой записи подстановки G .

Пусть для подстановки H_1 длины этих циклов равны $m_{i_1}, \dots, m_{i_k}$. Поскольку $H_1 \in \Gamma_N(q)$, то $m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q - u$. При вычислении произведения $H_1 \cdot H_2$ получится цикл длины $u + v - 1$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_u)(\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_v) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u, \beta_2, \dots, \beta_v),$$

причем этот цикл есть в цикловой записи подстановки G . Тогда выберем такое $i_0 \in \{1, \dots, r\}$, что $m_{i_0} = u + v - 1$. Так как $u \geq 2$, $v \geq 2$, то $m_{i_0} > 2$. Кроме того, $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\} \setminus \{i_0\}$ и $q - m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = u \in \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}$.

Обратно, пусть исконое $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ и подмножество $\{i_1, \dots, i_k\}$ существуют. Обозначим $\{j_1, \dots, j_{r-k-1}\} \subseteq \{1, \dots, r\} \setminus \{i_0, i_1, \dots, i_k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} q - m_{i_1} + \dots + m_{i_k} &= u \in \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}, \\ m_{j_1} + \dots + m_{j_{r-k-1}} &= (2q-1) - m_{i_0} - (m_{i_1} + \dots + m_{i_k}) = \\ &= (2q-1) - m_{i_0} - q + u = q - (m_{i_0} + 1 - u). \end{aligned}$$

Обозначим $v = m_{i_0} + 1 - u \in \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}$. Тогда цикл $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m_{i_0}})$ из цикловой записи подстановки G можно представить в виде произведения двух циклов

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{m_{i_0}}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_u)(\alpha_1, \alpha_{u+1}, \dots, \alpha_{m_{i_0}})$$

длин u и v соответственно.

Построим подстановку H_1 как произведение циклов подстановки G , имеющих длины $m_{i_1}, \dots, m_{i_k}$, и цикла $(\alpha_1, \dots, \alpha_u)$. Подстановку H_2 построим как произведение циклов подстановки G , имеющих длины $m_{j_1}, \dots, m_{j_{r-k-1}}$, и цикла $(\alpha_1, \alpha_{u+1}, \dots, \alpha_{m_{i_0}})$. Тогда равенство $G = H_1 \cdot H_2$ выполнено, подстановка H_1 имеет $m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + u = q$ мобильных точек, а подстановка H_2 имеет $m_{j_1} + \dots + m_{j_{r-k-1}} + v = q$ мобильных точек.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказанного утверждения вытекает, что $\Gamma_N(2q-1) \not\subset \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$. Рассмотрим подстановки из $\Gamma_N(2q-1)$, являющиеся произведением двух циклов длины $m_1 = q$ и $m_2 = q-1$. Покажем, что такие подстановки не могут удовлетворять условию из утверждения 6.

Если $i_0 = 1$, то в случае $\{i_1, \dots, i_k\} = \{2\}$ имеем противоречие

$$q - m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q - (q-1) = 1 \notin \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}.$$

В случае $\{i_1, \dots, i_k\} = \emptyset$ снова имеем противоречие

$$q - m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q \notin \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}.$$

Если $i_0 = 2$, то в случае $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1\}$ имеем противоречие

$$q - m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q - q = 0 \notin \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}.$$

В случае $\{i_1, \dots, i_k\} = \emptyset$ снова имеем противоречие

$$q - m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q \notin \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}.$$

Итак, в теореме 4, утверждениях 5, 6 полностью описано строение множества $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$ при $4 \leq q \leq \frac{N}{2}$.

Список литературы

1. *Bertram E.* Even permutations as a product of two conjugate cycles // J. Combin. Theory (A). — 1972. — V. 12. No. 3. — P. 368–380.
2. *Bertram E., Wei, V. K.* Decomposing a permutation into two large cycles; an enumeration // SIAM J. Algebraic Discr. Meth. — 1980. — V. 1. No. 4. — P. 450–461.
3. *Boccara G.* Cycles commi produit de deux permutations de classes donnees // Discrete Math. — 1982. — V. 38. No. 3. — P. 129–142.
4. *Brenner J. L., Evans R. J.* Even permutations as a product of two elements of order five // J. Combin. Theory (A). — 1987. — V. 45. No. 2. — P. 196–206.
5. *Brenner J. L.* Covering theorems for FINANSIGS VIII — almost all conjugacy classes in A_N have exponent ≤ 4 // J. Austral. Math. Soc. — 1987. — V. 25. — P. 210–214.
6. *Herzog M., Reid K. B.* Representation of permutations as products of cycles of fixed length // J. Australian Math. Soc. (Ser. A). — 1976. — V. 22. No. 3. — P. 321–331.
7. *Moran G.* Reflection classes whose cubes cover the alternating group // J. Combin. Theory (A). — 1976. — V. 21. No. 1. — P. 1–19.
8. *Moran G.* Permutations as products of k conjugate involutions // J. Combin. Theory (A). — 1975. — V. 19. No. 2. — P. 240–242.
9. *Stanley R. P.* Factorization of permutation into n -cycles // Discrete Math. — 1981. — V. 37. No. 3. — P. 255–262.
10. *Arad Z., Herzog M. eds.* Product of conjugacy classes in groups // Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1985. — V. 1112. — 244 p.
11. *Goupil A.* On products of conjugacy classes of the symmetric group // Discrete Math. — 1990. — V. 79. No. 1. — P. 45–57.
12. *Dvir Y.* Covering properties of permutation groups // Lect. Notes Math. — 1985. — V. 1112. — P. 197–221.
13. *Тужилин М. Э.* О порождении знакопеременной группы полурегулярными инволюциями // Обозр. прикл. и промышл. матем. — 2004. — Т. 11. Вып. 4. — С. 938–939.