Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тарасов, Свойства систем образующих универсальных алгебр, порожденных булевыми биконкативными функциями, *Матем. вопр. криптогр.*, 2012, том 3, выпуск 2, 117–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk57>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:39:18

УДК 519.571

Свойства систем образующих универсальных алгебр, порождаемых булевыми биюнктивными функциями

А. В. Тарасов

Московский государственный технический университет радиотехники,
электроники и автоматики, г. Москва

Получено 20.V.2011

В работе исследуются два подхода к описанию систем образующих универсальных алгебр, порождаемых булевыми биюнктивными функциями. Основными множествами этих алгебр являются множества выполняющих векторов булевых функций, представимых в виде 2-КНФ; алгебры имеют одну тернарную операцию, определяемую по координатным применением функции голосования от трех переменных к тройкам двоичных n -мерных векторов. Первый подход состоит в исследовании графов соответствующих 2-КНФ, второй основан на применении задачи о покрытиях множеств.

Ключевые слова: 2-КНФ, биюнктивная функция, универсальная алгебра

Properties of generator systems of universal algebras generated by Boolean bijunctive functions

A. V. Tarasov

*Moscow State Technical University of Radio Engineering, Electronics and Automatics,
Moscow*

Abstract. Two approaches to the description of generator systems of universal algebras generated by Boolean bijunctive functions are considered. Basic sets of these algebras are sets of satisfying vectors of Boolean functions having 2-CNF form; a ternary operation of these algebras is defined by coordinate-wise application of the voting function to triples of Boolean n -dimensional vectors. The first approach is based on the graphs of corresponding 2-CNF, the second is based on the set cover problem.

Key words: 2-CNF, bijunctive function, universal algebra

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2012, vol. 3, no. 2, pp. 117–130 (Russian).

© 2012 А. В. Тарасов

Введение

Пусть V_n — множество двоичных векторов длины n . Элементы этого множества будем обозначать греческими буквами $\alpha, \beta, \dots$, а их компоненты — через $\alpha(1), \dots, \alpha(n), \beta(1), \dots, \beta(n)$ и т. д. Через 0_n и 1_n обозначим векторы, состоящие из одних нулей или одних единиц соответственно.

Определим класс бионктивных функций Bi как класс функций, представимых в виде 2-КНФ:

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{j=1}^l x_{r_j}^{b_j} \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_i}); \quad (0.1)$$

пусть $Bi(n)$ — множество бионктивных функций, зависящих от n переменных. Через WP обозначим класс слабо положительных функций, т. е. функций, представимых КНФ вида

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{j=1}^l x_{r_j}^{b_j} \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_i} \vee x_{s_{i2}} \vee \dots \vee x_{s_{ik_i}}). \quad (0.2)$$

Для $\alpha, \beta \in V_n$ через $\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \oplus \beta, \bar{\alpha}$ обозначим векторы, получающиеся из α, β покоординатным применением соответствующих операций. Например,

$$\gamma = \alpha \vee \beta \Leftrightarrow \gamma(1) = \alpha(1) \vee \beta(1), \dots, \gamma(n) = \alpha(n) \vee \beta(n).$$

Определим тернарное преобразование ν пространства V_n равенством

$$\nu(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma \in V_n. \quad (0.3)$$

Универсальную алгебру с основным множеством V_n и операций ν обозначим через Ω_n .

Через E_f обозначим множество выполняющих векторов булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, т. е. $E_f = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = 1\}$. Введем обозначения: f_M — такая булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, что $E_{f_M} = M \subseteq V_n$, $f_{i_1 \dots i_k}^{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_n)$ — подфункция функции $f(x_1, \dots, x_n)$, полученная фиксацией переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, значениями $a_1, \dots, a_k \in \{0, 1\}$,

$$M_{ij}^{ab} = \{\alpha = (c_1, \dots, c_n) \in M : c_i = a, c_j = b\}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad a, b \in \{0, 1\}, \quad M \subseteq V_n,$$

$$M \oplus \beta = \{\alpha \oplus \beta : \alpha \in M\}, \quad M \subseteq V_n, \quad \beta \in V_n,$$

$$\Lambda = \{(i, j, a, b) : 1 \leq i < j \leq n; a, b \in \{0, 1\}\}.$$

Теорема (см. [2]). Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ биунктивна тогда и только тогда, когда для любых трех векторов $\alpha, \beta, \gamma \in E_f$ вектор $\delta = v(\alpha, \beta, \gamma)$ является выполняющим вектором функции f .

Данная теорема дает возможность при исследовании биунктивных функций перейти к исследованию универсальных алгебр вида $\Omega_n = (V_n, v)$. В [1] изучен ряд свойств алгебр Ω_n и их обобщений: определены их множества эндоморфизмов и элементарных трансляций.

В связи с результатами работ [2–5] возникает вопрос о «минимальных» множествах, порождающих биунктивные функции с помощью операции v . Основная задача, решаемая в настоящей статье, — построение систем образующих подалгебр алгебры Ω_n , которые являются множествами выполняющих векторов булевых биунктивных функций на основе задания их в виде 2-КНФ.

§ 1. Полученные ранее результаты

Как показано в [3], с помощью подходящего «навешивания отрицаний» на переменные любую биунктивную функцию можно преобразовать в функцию из класса $Bi \cap WP$, представимую в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{j=1}^l x_{r_j}^{b_j} \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_i}). \quad (1.1)$$

В дальнейшем будем полагать, что функция f не имеет имплицента, существенно зависящих от одной переменной, т. е. что в (1.1) $l = 0$:

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_i}). \quad (1.2)$$

Функции вида (1.1) и (1.2) лежат в классе $Bi \cap WP$. В [4] показано, что множество выполняющих векторов таких функций, а следовательно и функций вида (1.2), замкнуто относительно операции покоординатной дизъюнкции и образует нижнюю полурешетку на множестве V_n (см. [9]). Для нижних полурешеток определены (см. [5]) понятия минимальных и неразложимых векторов, которыми мы будем далее пользоваться. Через R_f обозначим множество неразложимых векторов множества E_f . Это множество обладает тем свойством, что каждый вектор из E_f представим в виде покоординатной дизъюнкции векторов из R_f .

Теорема 1.1 ([1]). Пусть $f \in WP$ не имеет имплицента вида x_i^a , $1 \leq i \leq n$, $a \in \{0, 1\}$, и $R_f \subset V_n$ — множество неразложимых векторов функции f . Тогда верно включение $E_f \subset \langle R_f \cup \{1_n\} \rangle$, обращающееся в равенство при

$f \in \text{WP} \cap \text{Bi}$. Если же $f \in \text{WP} \cap \text{Bi}$ и $1_n \in R_f$, то для некоторого $i \in 1, \dots, n$ выполняется условие

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq \bigwedge_{j \neq i} (\bar{x}_i \vee x_j). \quad (1.3)$$

Определим множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ и для 2-КНФ вида (0.1) определим ориентированный граф $G = (V, \varepsilon)$:

$$V = X \cup \bar{X}, \quad \varepsilon = \{(x_{s_{i1}}^{a_{i1} \oplus 1}, x_{s_{i2}}^{a_{i2}}), (x_{s_{i2}}^{a_{i2} \oplus 1}, x_{s_{i1}}^{a_{i1}}), i = 1, \dots, t\}.$$

Напомним, что наличие аффинных имплицентов функции f однозначно определяется наличием сильно связанных компонент в графе G (см. [3]).

В соответствии с [6] класс $\text{WP} \cap \text{WN}$ является подклассом класса Bi , содержащим функции вида

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{t_1} x_{s_i}^{a_i} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=t_1+1}^t (\bar{x}_{s_{i1}} \vee x_{s_{i2}}) \right). \quad (1.4)$$

Множество выполняющих векторов E_f такой функции образует дистрибутивную решетку. Для такой решетки можно сравнительно легко описать как множества неразложимых векторов R_f , так и множества конеразложимых векторов $\text{co-}R_f$ ([6, 9]). Наиболее наглядно эти множества описываются, когда функция f не имеет аффинных имплицентов. Тогда ее можно записать в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i1}} \vee x_{s_{i2}}). \quad (1.5)$$

В графе 2-КНФ такой функции нет дуг, соединяющих вершины множеств X и $\bar{X}$, и можно рассматривать его подграф G_1 , порожденный множеством вершин X : $G_1 = G(f)(X)$. Множество дуг такого графа обозначим через ε_1 .

Утверждение 1.2 ([1]). Пусть $f \in \text{WP} \cap \text{WN}$ и граф G_1 не имеет сильно связанных компонент. Тогда множество R_f состоит из $n+1$ векторов $R_f = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, где $\alpha_0 = 0_n$, а векторы $\alpha_i, i = 1, \dots, n$, построены по принципу $\alpha_i(i) = 1$ и $\alpha_i(j) = 1$ для всех таких j , что вершина x_j достижима из вершины x_i , т. е. в графе G_1 существует ориентированный путь из вершины x_i в вершину x_j , и $\alpha_i(j) = 0$ — в противном случае.

Утверждение 1.3 ([1]). Пусть $f \in \text{WP} \cap \text{WN}$ и граф G_1 не имеет сильно связанных компонент. Положим

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 \oplus 1, \dots, x_n \oplus 1) \in \text{WP} \cap \text{WN}.$$

Тогда множества неразложимых и конеразложимых векторов функций f и g связаны соотношениями

$$R_f = (\text{co-}R_g) \oplus 1_n, \text{ co-}R_f = R_g \oplus 1_n.$$

Пусть $f \in WP \cap WN$, граф $G_1 = G(f)(X)$ минимальной 2-КНФ не имеет сильно связных компонент. Обозначим через $\deg^+(x_i)$ и $\deg^-(x_i)$ соответственно полустепени захода и исхода вершины x_i , и пусть $R_f = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ определено как в лемме 1. В силу того, что граф G_1 не имеет сильно связных компонент, для каждой его вершины x_i , $i = 1, \dots, n$, можно рассмотреть подграф $T(x_i)$, построенный на вершинах, достижимых из x_i . Данный граф, очевидно, имеет единственную начальную вершину x_i и не имеет контуров. Для дальнейшего изложения важное значение имеет следующая теорема.

Теорема 1.4 ([1]). Пусть в определенных выше условиях для некоторой вершины x_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, графа G_1 полустепень захода удовлетворяет условию $\deg^+(x_i) \geq 2$. Тогда, если в графе существуют такие вершины x_j , x_k , что $(x_j, x_i), (x_k, x_i) \in E_1$ и при этом выполнено условие $T(x_j) \cap T(x_k) = T(x_i)$, то $\langle R_f \rangle = \langle R_f \setminus \{\alpha_i\} \rangle$.

§ 2. Системы образующих алгебр и графы 2-КНФ

Определение 2.1. Вектор $\delta \in E_f$, для которого существуют отличные от него векторы $\alpha, \beta, \gamma \in E_f$, удовлетворяющие условию $\delta = v(\alpha, \beta, \gamma)$ (см. (0.3)), называется производным вектором функции f .

Определение 2.2. Булевы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ называются подобными, если найдутся такие подстановка $\sigma \in S_n$ и вектор $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv g(x_{\sigma(1)} \oplus a_1, \dots, x_{\sigma(n)} \oplus a_n).$$

Следующая теорема дает полное описание биунктивных функций, не имеющих производных векторов.

Теорема 2.3. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n) \in \text{Bi}(n)$ не имеет аффинных импликант и существенно зависит от всех переменных. Функция f не имеет производных векторов тогда и только тогда, когда она подобна функции

$$g(x_1, \dots, x_n) = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3) \dots (\bar{x}_{n-1} \vee x_n).$$

Доказательство. Утверждение теоремы эквивалентно утверждению о том, что граф минимальной 2-КНФ функции f является ориентированным путем. По условию теоремы в данном графе нет циклов.

Докажем теорему в прямую сторону от противного. Пусть в графе минимальной 2-КНФ есть вершина с полустепенью захода (или исхода) не меньше 2. Без ограничения общности считаем, что это вершина x_3 . Предположим, что x_1 и x_2 — вершины графа, из которых выходят дуги в вершину x_3 . В силу того, что рассматривается граф минимальной 2-КНФ, возможен только один вариант, а именно когда вершины x_1 и x_2 взаимно не достижимы. Тогда простыми имплицентами функции f являются функции $\bar{x}_1 \vee x_3$ и $\bar{x}_2 \vee x_3$. Поэтому в E_f найдутся такие векторы $\alpha = (0, 0, 0, \dots)$, $\beta = (1, 0, 1, \dots)$, $\gamma = (0, 1, 1, \dots)$, что $\delta = v(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1, \dots) \in E_f$. Это означает, что функция f подобна произведению функций вида

$$h_k(x_1, \dots, x_k) = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3) \dots (\bar{x}_{k-1} \vee x_k),$$

зависящих от непересекающихся наборов переменных, т. е.

$$f(x_1, \dots, x_n) = h_{k_1}(x_{s_1^{(1)}}, \dots, x_{s_{k_1}^{(1)}}) \cdot \dots \cdot h_{k_r}(x_{s_1^{(r)}}, \dots, x_{s_{k_r}^{(r)}}),$$

где $\{s_1^{(i)}, \dots, s_{k_i}^{(i)}\} \cap \{s_1^{(j)}, \dots, s_{k_j}^{(j)}\} = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq r$.

Пусть $r \geq 2$. Без ограничения общности будем считать, что $s_1^{(1)} = 1$, $s_2^{(1)} = 2$, $s_1^{(2)} = 3$, $s_2^{(2)} = 4$. Рассмотрим следующие выполняющие векторы функции f :

$$\alpha = (0, 0, 0, 1, 1, \dots, 1), \quad \beta = (0, 1, 0, 0, 1, \dots, 1), \quad \gamma = (1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1).$$

Вектор $\delta = v(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 0, 1, 1, \dots, 1)$ является, очевидно, выполняющим вектором функции f и является производным вектором. Следовательно, наше допущение неверно, а значит, $r = 1$.

В обратную сторону утверждение теоремы очевидно. ■

Следствие 2.4. В условиях теоремы 2.3 мощность системы образующих равна мощности множества выполняющих векторов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция f существенно зависит от всех переменных и удовлетворяет условию теоремы 2.3, то ее вес, а следовательно, и мощность системы образующих алгебры E_f равны $n + 1$. Следующая теорема устанавливает верхнюю оценку мощности минимальной системы образующих для всех функций из $WP \cap WN$, исходя из мощности множеств неразложимых и ко-неразложимых векторов.

Обозначим через m_f минимальную мощность системы образующих множества выполняющих векторов бионктивной функции f .

Теорема 2.5. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in WP \cap WN$, граф $G(f)(X)$ не имеет сильно связанных компонент. Пусть p — число начальных вершин в графе $G(f)(X)$, а q — число конечных вершин этого графа. Если $p = 1$ или $q = 1$, то $m_f \leq n + 1$. Если же $p > 1$ и $q > 1$, то $m_f \leq n + 2$.

Доказательство. Пусть $p=1$. Тогда $1_n \in R_f$ по утверждению 1.2, и очевидно, что $E_f = \langle R_f \rangle$.

Пусть $p \neq 1$, но $q=1$. Если $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 \oplus 1, \dots, x_n \oplus 1)$, то $g \in WP \cap WN$ и граф $G(g)(X)$ минимальной 2-КНФ этой функции является обратным к графу $G(f)(X)$. Тогда легко показать, что $E_g = E_f \oplus 1_n$, $1_n \in R_g$, $R_f \oplus 1_n = \text{co-}R_g$, $E_g = \langle R_g \rangle$. Следовательно, $E_f = \langle \text{co-}R_f \rangle$, и мощность порождающего множества не превосходит $n+1$.

Если $p \neq 1$, $q \neq 1$, то, очевидно, $E_f = \langle R_f \cup \{1_n\} \rangle = \langle \text{co-}R_f \cup \{0_n\} \rangle$. ■

Если теорема 2.5 дает оценку на мощность системы образующих *любой* функции из $WP \cap WN$, то следующая теорема дает оценку минимальной мощности системы образующих путем построения примера функции с такой системой.

Теорема 2.6. Верно неравенство

$$\min_{f \in \text{Bi}(n)} m_f \leq \lceil \sqrt{2n+1} \rceil.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно построить функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in WP \cap WN$, для которой $m_f \leq \lceil \sqrt{2n+1} \rceil$. Для этого воспользуемся теоремой 1.4. Будем строить граф $G_1 = G(f)(X)$ минимальной 2-КНФ без проходных вершин. Пусть $P = \{x_1, \dots, x_k\}$ — множество начальных вершин графа, а $Q = \{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ — множество его конечных вершин. Проиндексируем элементы множества Q неупорядоченными парами чисел $\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq k$ и в каждую вершину из Q вида $y_{i,j}$ проведем дуги из вершин x_i и x_j . В результате мы получаем двудольный граф, не содержащий проходных вершин. При этом должно выполняться неравенство

$$n - k = |Q| \leq \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2},$$

т. е.

$$k^2 + k - 2n \geq 0.$$

Найдем минимальное целое значение $k = k(n)$, удовлетворяющее данному неравенству. Положительным корнем уравнения $k^2 + k - 2n = 0$ является значение

$$k_0 = \frac{\sqrt{8n+1}}{2} - \frac{1}{2} < \sqrt{2n+1} \leq \lceil \sqrt{2n+1} \rceil.$$

Поэтому $\min_{f \in \text{Bi}(n)} m_f \leq \lceil \sqrt{2n+1} \rceil$, что и требовалось доказать. ■

§ 3. Построение систем образующих на основе задачи о покрытии множеств

Пусть $M \subset V_n$. Упорядоченный набор

$$\lambda = (i_1, \dots, i_r, a_1, \dots, a_r), 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n, a_1, \dots, a_r \in \{0, 1\}$$

будем называть *недопустимой r -граммой* множества M , если $M_{i_1 \dots i_r}^{a_1 \dots a_r} = \emptyset$. В частности, можно говорить о недопустимых биграммах, триграммах и т. д. Далее рассматривается случай $r = 2$. Если $M_{i_1 i_2}^{a_1 a_2} \neq \emptyset$, будем говорить о *допустимой биграмме*.

Каждый вектор $\alpha \in V_n$, рассматриваемый как одноэлементное множество, имеет в точности $3 \cdot \binom{n}{2}$ недопустимых и $\binom{n}{2}$ допустимых биграмм. Обозначим множество недопустимых биграмм вектора α через $Z(\alpha)$. Очевидно, что $\bigcup_{\alpha \in V_n} Z(\alpha) = \Lambda$. По определению $|\Lambda| = 4 \cdot \binom{n}{2}$. Пусть $U(\alpha)$ — множество допустимых биграмм для α , т. е. $U(\alpha) = \Lambda \setminus Z(\alpha)$. Ясно, что $|U(\alpha)| = \binom{n}{2}$. Для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ положим

$$U(f) = \bigcup_{\alpha \in E_f} U(\alpha), \quad Z(f) = \bigcap_{\alpha \in E_f} Z(\alpha).$$

Легко видеть, что для любых булевых функций f_1 и f_2 выполнены равенства

$$\begin{aligned} U(f_1 \wedge f_2) &= U(f_1) \cap U(f_2), \\ U(f_1 \vee f_2) &= U(f_1) \cup U(f_2), \\ Z(f_1 \wedge f_2) &= Z(f_1) \cup Z(f_2), \\ Z(f_1 \vee f_2) &= Z(f_1) \cap Z(f_2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Очевидно также, что если $f_1 \leq f_2$, то

$$U(f_1) \subset U(f_2), \quad Z(f_2) \subset Z(f_1). \tag{3.2}$$

Следующая теорема является вариантом теоремы, доказанной в [1].

Булеву бионктивную функцию f назовем *наилучшим верхним бионктивным аналогом* функции g , если $E_g \subseteq E_f$ и для любой бионктивной функции f' из условия $E_g \subseteq E_{f'}$ следует, что $E_f \subseteq E_{f'}$. Методы построения наилучших верхних бионктивных аналогов обсуждались в статье [5].

Теорема 3.1. *Булева бионктивная функция f является наилучшим верхним бионктивным аналогом функции g тогда и только тогда, когда $U(f) = U(g)$, $Z(f) = Z(g)$.*

Доказательство. В силу теоремы 3 из [1] бионктивная функция f является наилучшим верхним бионктивным аналогом функции g тогда и только тогда, когда $\langle E_g \rangle = E_f$. Пусть f — наилучший верхний бионктивный аналог g . Тогда $g \leq f$ и $Z(f) \subset Z(g)$. Докажем обратное включение. Предположим, что $\lambda = (i, j, c, d) \in Z(g) \setminus Z(f)$. Это означает, что $g_{ij}^{c \oplus 1, d \oplus 1} \equiv 0$, но найдется такой вектор $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_f$, что $f_{ij}^{c \oplus 1, d \oplus 1}(\alpha) = 1$ и $a_i = c$, $a_j = d$. Для удобства дальнейших рассуждений будем считать, что $c = d = 0$, $i = 1$, $j = 2$.

Рассмотрим последовательность множеств $N_0 = E_f$, $N_{m+1} = \langle N_m \rangle_1$, $m \geq 0$. Так как $\langle E_g \rangle = E_f$, $\alpha \in E_f$, то существует такое k , что множество N_{k-1} не содержит векторов, у которых первые 2 координаты равны 0, а множество N_k содержит такие векторы. Пусть первые координаты вектора α равны 0. Тогда в N_{k-1} найдутся такие векторы β, γ, δ , что $\alpha = v(\beta, \gamma, \delta)$. Положим $\beta = (b_1, b_2, \dots)$, $\gamma = (y_1, y_2, \dots)$, $\delta = (z_1, z_2, \dots)$. Тогда выполняется система булевых равенств:

$$\begin{cases} b_1 \vee b_2 = 1, \\ y_1 \vee y_2 = 1, \\ z_1 \vee z_2 = 1, \\ b_1 y_1 \vee b_1 z_1 \vee y_1 z_1 = 0, \\ b_2 y_2 \vee b_2 z_2 \vee y_2 z_2 = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что система (3.3) несовместна. Следовательно, исходное предположение неверно и $Z(f) = Z(g)$.

Пусть теперь $Z(f) = Z(g)$ и f — бионктивная функция. Покажем, что $\langle E_g \rangle = E_f$. Пусть h — такая бионктивная функция, что $E_h = \langle E_g \rangle$. Тогда h — наилучший верхний бионктивный аналог g , и $Z(h) = Z(g) = Z(f)$ в силу доказательства первой части теоремы. Докажем, что $h \equiv f$.

В самом деле, $\lambda = (i, j, a, b) \in Z(h)$ тогда и только тогда, когда функция $\psi = x_i^a \vee x_j^b$ — имплицента h . Тогда ψ — имплицента f . Аналогично, верно обратное. Следовательно, бионктивные функции f и h имеют одинаковые наборы имплицентов. Значит, $h \equiv f$. ■

Следствие 3.2. Пусть $M \subset V_n$, $N = \langle M \rangle$. Тогда $U(M) = U(N)$.

Доказательство. Для доказательства следствия достаточно положить $f = f_M$, $g = f_N$ и применить теорему 3.1. ■

С помощью теоремы 3.1 легко получается следующее утверждение.

Теорема 3.3. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — бионктивная функция. Для множества векторов $M \subset E_f$ условие $\langle M \rangle = E_f$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$U(f) = \bigcup_{\alpha \in M} U(\alpha).$$

Доказательство. Если $M \subset E_f$, то $\langle M \rangle = E_f$ тогда и только тогда, когда f — такой наилучший верхний аналог функции g , что $E_g = M$. В силу (3.1) $U(g) = \bigcup_{\alpha \in M} U(\alpha)$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой 3.1. ■

Фактически теорема 3.3 говорит о том, что множество векторов M является системой образующих алгебры $E_f < \Omega_n$ тогда и только тогда, когда множества $U(\alpha)$ образуют покрытие множества $U(f)$. Естественно возникает задача построения минимального покрытия — минимальной системы образующих.

Если бионктивная функция f задана сокращенной 2-КНФ вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \big\&_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_{i2}}), \quad (3.4)$$

то положим $\lambda_i = (s_{i1}, s_{i2}, a_{i1} \oplus 1, a_{i2} \oplus 1)$, $i = 1, \dots, t$. Ясно, что при этом $Z(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$. Тогда $U(f) = \Lambda \setminus Z(f)$. По 2-КНФ (3.4) легко получить множество $U(f)$. Ясно, что если $\lambda = (i, j, c, d) \in U(f)$, то $\|f_{ij}^{cd}\| \geq 1$. Кроме того, поскольку функция f_{ij}^{cd} — бионктивная, можно с линейной сложностью от длины ее 2-КНФ найти выполняющий вектор α' и по нему построить такой вектор $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_f$, что $a_i = c$, $a_j = d$. Проведя подобные построения

для всех $\lambda \in U(f)$, построим систему образующих для алгебры E_f . Проведенные рассуждения доказывают следующее утверждение.

Утверждение 3.4. *Задача построения системы образующих M для подалгебры E_f для любой 2-КНФ f вида (0.1) имеет сложность не более $O(n^4)$, мощность множества M не превосходит $n(n-1)$.*

Обратимся теперь к теореме 1.1. Если $f \in \text{WP}$, то мы можем представить функцию f в виде произведения $f = g \cdot h$, где $g \in \text{Bi} \cap \text{WP}$, $h \in \text{WP}$ и функция h не имеет имплицент длины, меньшей 3. Пусть, далее, R_f — множество неразложимых векторов функции f . Положим также $U(M) = U(f_M)$, $Z(M) = Z(f_M)$ для произвольного множества $M \subset V_n$.

Теорема 3.5. *Во введенных выше условиях верны равенства*

$$U(R_f \cup \{1_n\}) = U(g), \quad Z(R_f \cup \{1_n\}) = Z(g).$$

В частности, функция f не имеет имплицент длины, меньшей 3, тогда и только тогда, когда $U(R_f \cup \{1_n\}) = \Lambda$, $Z(R_f \cup \{1_n\}) = \emptyset$.

Доказательство теоремы следует из следствия 3.2. ■

Лемма 3.6. *Длина сокращенной 2-КНФ биюнктивной функции от n переменных не превосходит величины $n(n-1)$.*

Доказательство. Пусть f задана формулой (3.4). Для каждой из $\binom{n}{2}$ пар i, j таких, что $1 \leq i < j \leq n$, в (3.4) подсчитаем число k_{ij} элементарных дизъюнкций от переменных x_i и x_j . Очевидно, что $0 \leq k_{ij} \leq 2$. В противном случае функция f имеет имплицент длины 1. Следовательно, $t = \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_{ij} \leq 2 \binom{n}{2} = n(n-1)$. С другой стороны, данная оценка достижима на функции

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} ((x_i \vee \bar{x}_j)(\bar{x}_i \vee x_j)) = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \oplus x_j \oplus 1). \blacksquare$$

Для получения верхних оценок мощности систем образующих воспользуемся следующим подходом. Пусть функция f биюнктивна и представлена в виде сокращенной 2-КНФ (3.4). Рассмотрим множества $U(f)$ и $Z(f)$. Пусть выполнено условие: если $\lambda = (i, j, c, d) \in U(f)$, то $\|f_{ij}^{cd}\| \geq m > 1$, где m — параметр.

Теорема 3.7. В приведенных условиях существует система образующих алгебры E_f , содержащая не более

$$\left\lceil \frac{\|f\|}{m} \ln \left(\frac{2mn(n-1)}{\|f\|} \right) \right\rceil + \frac{\|f\|}{m}$$

векторов.

Доказательство. Построим $(0,1)$ -матрицу A по следующему правилу. В матрице будет $p = \|f\|$ строк и $s = |U(f)|$ столбцов. В соответствии с леммой 3.6 для величины s верна оценка

$$n(n-1) \leq s \leq 2n(n-1).$$

Строки матрицы A проиндексированы векторами из E_f , а столбцы — элементами $\lambda \in U(f)$. Для каждого $\alpha \in E_f$ в соответствующей строке матрицы A поставим единицы на местах, соответствующих комбинациям $\lambda \in U(\alpha)$. На остальных местах поставим нули. В итоге, матрица A обладает следующими свойствами:

- вес каждой строки равен $\binom{n}{2}$;
- вес каждого столбца не меньше m ;
- число столбцов $T \geq \frac{3}{2} \cdot n(n-1)$ (по лемме 3.6);
- число строк равно $\|f\|$.

В такой трактовке задача построения минимальной по мощности системы образующих преобразуется в задачу построения минимального покрытия матрицы A строками. Для получения оценок воспользуемся подходом, изложенным в [7] и [8]. В основу положим использование градиентного («жадного») алгоритма. На каждом шаге алгоритма будем выбирать строку, покрывающую наибольшее из оставшихся количество столбцов. Если таких строк несколько, то берем любую из них.

Предположим, что для получения покрытия алгоритму необходимо сделать q шагов. Пусть на первых k шагах ($k \in 1, \dots, q$) были выбраны строки с номерами $i_1, \dots, i_k$. Пусть, далее, A_k — матрица, полученная из A путем удаления этих строк и покрываемых ими столбцов. Данная матрица будет иметь $p_k = p - k$ строк и s_k столбцов. Будем считать, что $p_0 = p$, $s_0 = s$.

Так как на каждом шаге алгоритма добавляется покрытие хотя бы одного столбца, то

$$q \leq k + s_k.$$

Кроме того, в каждом столбце матрицы A_k будет не менее m единиц, поскольку в эту матрицу входят еще не покрытые столбцы. Тогда общее число единиц в матрице A_k не меньше ms_k . Выбирая на $(k+1)$ -м шаге строку максимального веса, получаем, что в ней должно быть не менее ms_k / p_k единиц. Значит, эта строка покрывает не менее ms_k / p_k столбцов, и

$$s_{k+1} \leq s_k - \frac{ms_k}{p_k} = s_k \left(1 - \frac{m}{p_k} \right).$$

Положим $\gamma = m / p$, $\delta_k = s_k / s$. Тогда полученное неравенство можно переписать в виде

$$\delta_{k+1} \leq \delta_k \left(1 - \frac{\gamma p}{p - k} \right).$$

Поскольку $\delta_0 = 1$, по индукции находим, что

$$\delta_k \leq \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\gamma p}{p - i} \right) \leq (1 - \gamma)^k \leq e^{-\gamma k}, \quad k = 0, \dots, q.$$

Тогда, с учетом неравенства $q \leq k + s_k$,

$$q \leq k + se^{-\gamma k}, \quad k = 0, \dots, q.$$

Функция $k + se^{-\gamma k}$ достигает минимума при $k = \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma s)$. Подставив значение $k = \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma s) \right\rceil$, получим неравенство

$$q \leq \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma}.$$

Воспользовавшись условиями $s \leq 2n(n-1)$, $\gamma = \frac{m}{p}$, получим

$$q \leq \left\lceil \frac{p}{m} \ln \left(\frac{ms}{p} \right) \right\rceil + \frac{p}{m} \leq \left\lceil \frac{p}{m} \ln \left(\frac{2mn(n-1)}{p} \right) \right\rceil + \frac{p}{m},$$

что и требовалось доказать. ■

Непосредственно из доказанных теорем вытекает метод построения систем образующих для множеств выполняющих векторов биюнктивных функций, основанный на задаче о покрытии множеств. С целью проверки эффективности этого метода М. А. Киввой были построены системы образующих M_f множеств выполняющих векторов биюнктивных функций f от 3, 4 и 5 переменных. Построение покрытий проводилось с помощью градиентного алгоритма. После построения указанных систем были подсчитаны E_1 — средняя

мощность системы образующих и E_2 — среднее отношение мощности полученной системы образующих к мощности всего множества выполняющих векторов:

$$E_1 = \frac{1}{|\text{Bi}(n)|} \sum_{[f]} |[f]| |M_f|, \quad E_2 = \frac{1}{|\text{Bi}(n)|} \sum_{[f]} |[f]| \frac{|M_f|}{\|f\|}.$$

Полученные результаты приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

n	E_1	E_2
3	2,77	0,8
4	4,56	0,86
5	5,46	0,6

Список литературы

1. Тарасов А. В. Универсальные алгебры, порожаемые множествами выполняющих векторов бионктивных и r -юнктивных булевых функций // Математические вопросы криптографии. — 2011. — Т. 2. Вып. 3. — С. 75–98.
2. Aspvall B., Plass M. F., Tarjan R. E. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified Boolean formulas // Inform. Process. Lett. — 1979. — V. 8. — P. 121–123.
3. Тарасов А. В. О свойствах функций, представимых в виде 2-КНФ // Дискретная математика. — 2001. — Т. 13. Вып. 4. — С. 99–115.
4. Гориков С. П. Применение теории NP-полных задач для оценки сложности решения систем булевых уравнений // Обзор. прикл. и промышл. матем. — М.: ТВП, 1995. — Т. 2. Вып. 3. — С. 325–398.
5. Гориков С. П. О сложности распознавания мультиаффинности, бионктивности, слабой положительности и слабой отрицательности булевых функций // Обзор. прикл. и промышл. матем. — М.: ТВП, 1997. — Т. 4. Вып. 2. — С. 216–237.
6. Гориков С. П. О пересечении классов мультиаффинных, бионктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций // Обзор. прикл. и промышл. матем. — М.: ТВП, 1997. — Т. 4. Вып. 2. — С. 238–259.
7. Райгородский А. Системы общих представителей и их приложения в геометрии. — М.: МЦНМО, 2006.
8. Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторика неотрицательных матриц. — М.: ТВП, 2000. — 448 с.
9. Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982. — 452 с.