Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков, Статистический критерий типа критерия пустых ящиков, *Матем. вопр. криптогр.*, 2010, том 1, выпуск 1, 101–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk6>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:43:29

УДК 519.237.32

Статистический критерий типа критерия пустых ящиков

М. И. Тихомирова¹⁾, В. П. Чистяков²⁾

¹⁾ Академия криптографии Российской Федерации, Москва

²⁾ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Получено 22.IV.2010

Рассматриваются два статистических критерия для проверки простых статистических гипотез о последовательности независимых испытаний с конечным числом исходов: критерий со статистикой, равной числу непооявившихся сплошных цепочек одинаковых исходов, и критерий со статистикой, равной числу испытаний до появления заданного числа разных цепочек одинаковых исходов. Критерии могут быть полезными для обнаружения зависимостей между результатами испытаний.

Ключевые слова: критерий пустых ящиков, статистические критерии.

The statistical test of the empty cells type

M. I. Tikhomirova¹⁾, V. P. Chistyakov²⁾

¹⁾ Academy of Cryptography of Russian Federation, Moscow

²⁾ Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow

Abstract. Two tests for testing simple hypotheses on a sequence of independent trials with finite number of outcomes are considered. The first test is based on the number of non-appeared tuples consisting of repeated outcome. The second test is based on the number of trials until the appearance of a given number of different tuples of such type. These tests may be used to detect dependencies between observations.

Key words: empty cells test, simple hypotheses.

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2010, vol. 1, no. 1, pp. 101–108 (Russian).

1. Постановка задачи

Рассмотрим последовательность

$$x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, \quad x_t \in \aleph = \{1, \dots, N\}, \quad (1)$$

независимых одинаково распределенных случайных величин. По гипотезе H_0

$$\mathbf{P}\{x_t = k\} = \frac{1}{N}, \quad k = 1, \dots, N; \quad (2)$$

по конкурирующей гипотезе H_1

$$\mathbf{P}\{x_t = k\} = p_k > 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad \sum_{k=1}^N p_k = 1. \quad (3)$$

Обозначим через $\mu_0(n, B_0)$ число не появившихся s -цепочек из множества

$$B_0 = \{(i_1, \dots, i_s) : i_1 = \dots = i_s = i, \quad i \in \aleph\} \quad (4)$$

в выборке

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+s-1}, \quad (5)$$

образованной $n + s - 1$ первыми членами последовательности (1). Используем статистику $\mu_0(n, B_0)$ для построения критерия, различающего гипотезы H_0 и H_1 .

При $s = 1$ статистика $\mu_0(n, B_0)$ является статистикой известного критерия пустых ящиков (см. [1]). Обобщения этого критерия при $s > 1$ со статистикой $\mu_0(n, B)$, где B является множеством всех s -цепочек, рассматривались в работе [2]. Результаты работ [3, 4] позволяют исследовать критерий со статистикой $\mu_0(n, B_0)$.

Будем исследовать этот критерий в схеме серий, когда при $n, N \rightarrow \infty$ выполняются следующие условия:

$$p_k = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{b_k(N)}{\sqrt[4]{N}} \right), \quad |b_k(N)| \leq B < \infty, \quad k \in \aleph, \\ b_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b_k^2(N) \rightarrow b^2, \quad (6)$$

$$\alpha_N = \frac{n}{N^s} \rightarrow \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad s = \text{const}, \quad s \geq 2. \quad (7)$$

Величина $b^2 = 0$ при гипотезе H_0 и $b^2 > 0$ при гипотезе H_1 .

В условиях (6) исследуется также статистика $\nu_k(N)$, равная числу первых членов последовательности (1), среди которых впервые появилось k различных s -цепочек из множества B_0 .

Зависимость статистик $\mu_0(n, N)$ и $\nu_k(N)$ от цепочек длины s позволяет предположить, что соответствующие критерии могут выявлять зависимости, появляющиеся на цепочках длины s . Для вычисления $\mu_0(n, N)$ и $\nu_k(N)$ требуется значительно меньший объем памяти по сравнению с аналогичными статистиками, определяемыми по полному множеству возможных значений s -цепочек. Это позволяет увеличить s и выявлять зависимости, проявляющиеся на более длинных цепочках.

2. Статистический критерий с $\mu_0(n, B_0)$

Распределения вероятностей при гипотезах H_0 и H_1 будем обозначать через $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ соответственно. Из результатов работы [4] следует, что при $n, N \rightarrow \infty$ в схеме серий (6), (7)

$$\mathbf{P}_1 \left\{ \frac{\mu_0(n, B_0) - Na_1(N)}{\sigma_1(N)\sqrt{N}} < x \right\} \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (8)$$

где

$$a_1(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{-\alpha_N (Np_k)^s}, \quad \sigma_1^2(N) = \sigma^2(N) = e^{-\alpha_N} (1 - e^{-\alpha_N}). \quad (9)$$

Отсюда следует, что при гипотезе H_0 статистика $\mu_0(n, B_0)$ асимптотически нормальна с параметрами $(Na_0(N), N\sigma_0^2(N))$, где

$$a_0(N) = e^{-\alpha_N}, \quad \sigma_0^2(N) = \sigma^2(N). \quad (10)$$

Будем принимать гипотезу H_1 , если

$$\mu_0(n, B_0) > C, \quad (11)$$

где

$$C = Ne^{-\alpha_N} + u_{e_0} \sigma \sqrt{N}, \quad \sigma^2 = e^{-\alpha} (1 - e^{-\alpha}), \quad (12)$$

$$1 - \Phi(u_\varepsilon) = \varepsilon; \quad (13)$$

в противном случае принимается гипотеза H_0 .

Вероятности $\varepsilon_0(N), \varepsilon_1(N)$ ошибок первого и второго родов критерия (11) определяются равенствами

$$\varepsilon_0(N) = \mathbf{P}_0\{\mu_0(n, B_0) > C\}, \quad \varepsilon_1(N) = \mathbf{P}_1\{\mu_0(n, B_0) \leq C\}. \quad (14)$$

Найдем предельные значения вероятностей (14) при $n, N \rightarrow \infty$ в схеме серий (6), (7). Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма 1. При $n, N \rightarrow \infty$ в схеме серий (6), (7)

$$a_1(N) = e^{-\alpha_N} \left(1 + \frac{s\alpha_N(1 + \alpha_N s - s)}{2\sqrt{N}} - b_N^2 \right) + O\left(\frac{1}{N^{3/4}}\right).$$

Доказательство. Используя (6), представим $a_1(N)$ в следующем виде:

$$a_1(N) = \frac{1}{N} e^{-\alpha_N} \sum_{k=1}^N e^{-\alpha_N} \left(\left(1 + \frac{b_k(N)}{\sqrt[4]{N}} \right)^s - 1 \right).$$

Отсюда и из равенств

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{b_k(N)}{\sqrt[4]{N}} \right)^s - 1 &= \frac{s b_k(N)}{\sqrt[4]{N}} + \frac{s(s-1)b_k^2(N)}{2\sqrt{N}} + O\left(\frac{1}{N^{3/4}}\right) \\ \sum_{k=1}^N b_k(N) &= 0 \end{aligned}$$

следует утверждение леммы.

Теорема 1. При $n, N \rightarrow \infty$ в схеме серий (6), (7) существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_0(N) = \varepsilon_0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_1(N) = \varepsilon_1,$$

где ε_1 определяется из равенства

$$u_{\varepsilon_0} + u_{\varepsilon_1} = \frac{\alpha s(1 + s\alpha - s)}{2\sigma} e^{-\alpha} b^2,$$

$u_{\varepsilon_0}, u_{\varepsilon_1}$ определены равенством (13), $\sigma^2 = e^{-\alpha}(1 - e^{-\alpha})$.

Доказательство. Из первого равенства (14) и равенства (12) следует, что

$$\varepsilon_0(N) = \mathbf{P}_0 \left\{ \frac{\mu_0(n, B_0) - N a_0(N)}{\sigma \sqrt{N}} < u_{\varepsilon_0} \right\}.$$

Отсюда и из асимптотической нормальности $\mu_0(n, B_0)$ с параметрами (10) при гипотезе H_0 получаем, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_0(N) = \varepsilon_0$.

Из второго равенства (14) получаем:

$$\varepsilon_0(N) = \mathbf{P}_1 \left\{ \frac{\mu_0(n, B_0) - Na_1(N)}{\sigma\sqrt{N}} > \frac{C - Na_1(N)}{\sigma\sqrt{N}} \right\}.$$

Используя лемму 1 и равенство (12), находим:

$$\begin{aligned} \frac{C - Na_1(N)}{\sigma\sqrt{N}} &= \frac{N(a_0(N) - a_1(N)) + u_{\varepsilon_0}\sigma\sqrt{N}}{\sigma\sqrt{N}} = \\ &= u_{\varepsilon_0} - e^{-\alpha_N} \frac{s\alpha_N(1 + s\alpha_N - s)}{2\sigma} b_N^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{N}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_1(N) = \varepsilon_1$, где

$$-u_{\varepsilon_1} = u_{\varepsilon_0} - e^{-\alpha} \frac{b^2}{2} \frac{s\alpha(1 + s(\alpha - 1))}{\sigma}.$$

Теорема доказана.

3. Предельное распределение статистики $\nu_k(N)$

Асимптотическая нормальность $\nu_k(N)$ при гипотезе H_0 установлена в работе [3]. В доказательстве использовалось представление $\nu_k(N)$ в виде суммы независимых слагаемых. В неравновероятном случае такого представления нет. Для доказательства асимптотической нормальности $\nu_k(N)$ в неравновероятном случае воспользуемся установленной в работе [4] асимптотической нормальностью $\mu_0(n, B_0)$ и равенством

$$\mathbf{P}\{\nu_k(N) \leq n\} = \mathbf{P}\{\mu_0(n, B_0) \leq N - k\}. \quad (15)$$

Будем предполагать, что при $N, k \rightarrow \infty$ выполняется условие

$$\gamma_N = \frac{k}{N} \rightarrow \gamma, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (16)$$

Выберем n так, чтобы при условии (16)

$$N - k = Na_1(N) + x_N\sigma(N)\sqrt{N}, \quad x_N \rightarrow x. \quad (17)$$

Лемма 2. Если при $N, k \rightarrow \infty$ выполнены условия (16), (6) и n изменяется так, что выполняется равенство (17), то

$$\alpha_N = \frac{n}{N^s} \rightarrow \alpha = -\ln(1 - \gamma), \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Доказательство. Отметим, что

$$e^{-\alpha_N} \leq 1, \quad \sigma^2(N) \leq 1, \quad e^{-\alpha_N (Np_k)^s} \leq 1. \quad (18)$$

Из равенства (17) следует равенство

$$a_1(N) = 1 - \gamma_N - x_N \frac{\sigma(N)}{\sqrt{N}}.$$

Отсюда, используя (18), получим:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{-\alpha_N \left(1 + \frac{b_k(N)}{\sqrt[4]{N}}\right)^s} = 1 - \gamma_N + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (19)$$

Если выполнены условия (16), то при $n, N \rightarrow \infty$ правая часть равенства (19) стремится к $1 - \gamma$. Таким образом, существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{-\alpha_N \left(1 + \frac{b_k(N)}{\sqrt[4]{N}}\right)^s} = 1 - \gamma.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 2. Если выполнены условия (6) и (16), то при $N, k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{v_k(N) - A(N)}{D(N)} < x\right\} \rightarrow \Phi(x),$$

где

$$\begin{aligned} A(N) &= N^s \ln \frac{1}{1 - \gamma_N} - \sqrt{N^{2s-1}} \frac{b^2}{2} \left(1 + (s-1) \ln \frac{1}{1 - \gamma_N}\right) \ln \frac{1}{1 - \gamma_N}, \\ D^2(N) &= N^{2s-1} \frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N}. \end{aligned} \quad (20)$$

Доказательство. Определим n равенством (17). Из леммы 2 следует, что выполнены условия асимптотической нормальности $\mu_0(n, B_0)$ и, следовательно, правая часть равенства (15) стремится к $\Phi(x)$. Найдем теперь асимптотическую формулу для n .

Положим $z_N = e^{-\alpha_N}$. Используя лемму 1 и равенство (17), получим:

$$z_N = 1 - \gamma_N - \frac{1}{\sqrt{N}} \left(-z_N \frac{b_N^2 s (1 - (s-1) \ln z_N) \ln z_N}{2} + x_N \sqrt{z_N (1 - z_N)} \right) + g_N(z_N), \quad (21)$$

$$g_N(z_N) = O\left(\frac{1}{N^{\frac{3}{4}}}\right),$$

где

$$g_N(z_N) = a_1(N) - z_N \left(1 + \frac{s\alpha_N (s\alpha_N - s + 1)}{2\sqrt{N}} b_N^2 \right).$$

Положим

$$F(z) = 1 - \gamma_N + \frac{1}{\sqrt{N}} \left(z \frac{1}{2} b_N^2 s (1 - (s-1) \ln z) \ln z - x_N \sqrt{z(1-z)} \right) + g_N(z_N).$$

Равенство (21) можно записать в виде $z_N = F(z_N)$ и, следовательно,

$$z_N = F(F(z_N)) =$$

$$= (1 - \gamma_N) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sqrt{\frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N}} + \frac{b_N^2}{2} \left(1 + (s-1) \ln \frac{1}{1 - \gamma_N} \right) s \ln \frac{1}{1 - \gamma_N} \right) \right) + O\left(\frac{1}{N^{\frac{3}{4}}}\right).$$

Отсюда

$$\alpha_N = \frac{n}{N^s} = \ln \frac{1}{1 - \gamma_N} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{b_N^2}{2} \left(1 + (s-1) \ln \frac{1}{1 - \gamma_N} \right) + \sqrt{\frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N}} \right) + O\left(\frac{1}{N^{\frac{3}{4}}}\right).$$

Используя это равенство, получим указанную нормировку и центрировку $\nu_k(N)$ в левой части равенства (15). Теорема доказана.

Критерий со статистикой $\nu_k(N)$ определим аналогично критерию (11): если

$$\nu_k(N) < C,$$

где

$$C = N^s \ln \frac{1}{1 - \gamma_N} - u_{\varepsilon_0} \sqrt{N^{2s-1} \frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N}},$$

то принимается гипотеза H_1 ; в противном случае принимается гипотеза H_0 .

Если выполнены условия (6) и (16), то вероятности ошибок $\varepsilon_0(N) = \mathbf{P}_{H_0}(v_k < C)$, $\varepsilon_1(N) = \mathbf{P}_{H_1}(v_k > C)$ критерия (22) при $N, k \rightarrow \infty$ сходятся:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_v(N) = \varepsilon_v, \quad v = 0, 1,$$

и

$$u_{\varepsilon_0} + u_{\varepsilon_1} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\left(1 + (s-1) \ln \frac{1}{1-\gamma}\right) \ln \frac{1}{1-\gamma}}{\sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}.$$

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. — М.: Наука, 1964.
2. Тихомирова М. И., Чистяков В. П. О статистических критериях отсутствующих s -грамм. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 7. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1997, с. 265–278.
3. Тихомирова М. И. Предельные распределения числа неоявившихся цепочек одинаковых исходов. — Дискрет. матем., 2008, т. 20, в. 3, с. 40–46.
4. Тихомирова М. И. Асимптотическая нормальность числа неоявившихся несплошных цепочек исходов независимых испытаний. — Дискрет. матем., 2009, т. 21, в. 2, с. 112–125.