Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов, Условия сходимости к распределению Пуассона для чисел решений случайных включений, *Матем. вопр. криптогр.*, 2012, том 3, выпуск 3, 35–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk60>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 06:09:02

Условия сходимости к распределению Пуассона для чисел решений случайных включений

В. А. Копытцев¹, В. Г. Михайлов²

¹Академия криптографии Российской Федерации, Москва

²Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Получено 20.V.2011

Пусть F — случайное отображение n -мерного пространства V^n над конечным полем $GF(q)$ в T -мерное пространство V^T над тем же полем, и $D \subset V^n$, $B \subset V^T$. Выведены новые достаточные условия сходимости при $n, T \rightarrow \infty$ распределения числа решений системы включений $x \in D$, $F(x) \in B$ к распределению Пуассона.

Ключевые слова: случайные включения, системы случайных уравнений, число решений, предельная теорема Пуассона

Conditions of convergence to the Poisson distribution for the number of solutions of random inclusions

V. A. Kopytcev¹, V. G. Mikhailov²

¹Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow

²Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow

Abstract. Let F be a random mapping of n -dimensional space V^n over the finite field $GF(q)$ into T -dimensional space V^T over the same field; let $D \subset V^n$, $B \subset V^T$. For the number of solutions of random inclusions $x \in D$, $F(x) \in B$ we find new sufficient conditions of weak convergence to the Poisson law as $n, T \rightarrow \infty$.

Key words: random inclusions, systems of random equations, number of solutions, Poisson convergence

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2012, vol. 3, no. 3, pp. 35–55 (Russian).

§ 1. Введение

В работе исследуется распределение числа $\xi(D, F, B)$ решений системы включений

$$x \in D, \quad F(x) \in B, \quad (1.1)$$

где $F(x) = (F_1(x), \dots, F_T(x)) : V^n \rightarrow V^T$ — случайное отображение пространства n -мерных векторов V^n над полем $K = GF(q)$ в пространство V^T , а D и B — некоторые множества n -мерных и T -мерных векторов над полем K .

Рассмотрим класс включений вида (1.1) с функцией

$$F(x) = A_1 x + A_2 f(x) + S(x), \quad (1.2)$$

где A_1 и A_2 — независимые случайные матрицы (над полем K) размеров $T \times n$ и $T \times m$ соответственно, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ — заданное отображение, удовлетворяющее условию $f(0^n) = 0^m$, а $S(x) = (S_1(x), \dots, S_T(x))$ — случайное отображение, не зависящее от матриц A_1, A_2 . Случай, когда $S(x) \equiv 0^T$, был исследован ранее в работах [1, 2].

Нетрудно заметить, что класс включений с функцией $F(x)$ вида (1.2) с $S(x) \not\equiv 0^T$ содержит системы полиномиальных уравнений над полем $K = GF(q)$ вида

$$\sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \in \{0, \dots, q-1\} \\ 1 \leq d_1 + \dots + d_n \leq g_t}} a_{d_1 \dots d_n}^{(t)} x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} = b_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.3)$$

где $a_{d_1 \dots d_n}^{(t)}$ — независимые в совокупности случайные величины, а параметры g_t зависят от номеров уравнений и удовлетворяют условиям $2 \leq g_t \leq n(q-1)$, $t = 1, \dots, T$. Возможность исследования случайных систем из полиномиальных уравнений разных степеней является главным отличием нынешней постановки задачи от [1, 2].

Сформулируем результаты работы. Далее предполагаем, что от параметров n, T зависят числа $m = m(n)$, множества $D = D(n)$, $B = B(T)$, матрицы $A_s = A_s(n, T)$, $s = 1, 2$, и отображения $f(x), S(x)$.

Всюду далее элементы случайной матрицы $A = (A_1, A_2)$ независимы в совокупности и

$$\mathbf{P}\{a_{t,j} = k\} = \frac{1 + \Delta_{t,j}(k)}{q}, \quad k \in K, \quad (1.4)$$

где $\sum_{k \in K} \Delta_{t,j}(k) = 0$, $t = 1, \dots, T$, $j = 1, \dots, n+m$. Пусть

$$\Delta = \max_{t,j,k} |\Delta_{t,j}(k)| < 1. \quad (1.5)$$

Обозначим через $N(k_1, k_2, k_3, c, D)$ число решений уравнения $k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3 = c$ относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in D^3$, где $k_1, k_2, k_3 \in K \setminus \{0\}$, $c \in V^n$. Пусть

$$N(D) = \max_{k_1, k_2, k_3, c} N(k_1, k_2, k_3, c, D), \quad \rho(D) = N(D)/|D|^2. \quad (1.6)$$

Очевидно, что $\rho(D) \leq 1$. Так как уравнение $k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3 = c$ при $c \in D$ и $k_1 = k_2 = 1, k_3 = -1$ имеет решения $(u^1, u^2, u^3) = (c, u, u)$, то

$$|D|^{-1} \leq \rho(D) \leq 1. \quad (1.7)$$

Ниже будет играть важную роль условие $\rho(D(n)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (заметим, что тогда $|D(n)| \rightarrow \infty$).

Сначала обратимся к случаю, когда отображение $f(x) \equiv 0^T$, и исследуем предельное поведение числа решений системы

$$x \in D, \quad Ax + S(x) \in B, \quad (1.8)$$

где A — случайная матрица размера $T \times n$, а $S(x)$ — случайное отображение, не зависящее от матрицы A .

Векторы x и sx , $s \neq 0$, будем называть *подобными*.

Теорема 1. Пусть $D \subseteq V^n \setminus \{0^n\}$, причем в этом множестве нет подобных векторов, $F(x) = Ax + S(x)$ и выполнены условия $n, T \rightarrow \infty, T\Delta \rightarrow 0, |D| \rightarrow \infty$,

$$\rho(D) \rightarrow 0, \quad \frac{\ln |B|}{\ln \rho(D)} \rightarrow 0, \quad (1.9)$$

$$q^{-T} |D| |B| \rightarrow \lambda, \quad 0 \leq \lambda < \infty. \quad (1.10)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, F, B)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Теперь перейдем к системам общего вида

$$x \in D, \quad A_1 x + A_2 f(x) + S(x) \in B. \quad (1.11)$$

Заменой переменных

$$y = (x, f(x)) = (y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n, y_{n+1} = f_1(x), \dots, y_{n+m} = f_m(x))$$

эта система сводится к системе

$$y \in D_f, \quad Ay + S^*(y) \in B, \quad (1.12)$$

где $S^*(y) = S(y_1, \dots, y_n)$,

$$D_f = \{(x, f(x)) | x \in D\} \subseteq V^{n+m},$$

а матрица $A = (A_1, A_2)$ получена объединением столбцов матриц A_1 и A_2 . Число решений системы (1.11) совпадает с числом решений системы (1.12). Используя этот факт, мы выведем из теоремы 1 следующее утверждение.

Обозначим через D'_f множество всех векторов из D_f , не имеющих в D_f подобных себе векторов.

Теорема 2. Пусть $D \subseteq V^n \setminus \{0^n\}$, $F(x) = A_1x + A_2f(x) + S(x)$ и выполнены условия $n, T \rightarrow \infty$, $T\Delta \rightarrow 0$, $|D| \rightarrow \infty$,

$$\frac{|D'_f|}{|D|} \rightarrow 1, \quad (1.13)$$

$$\rho(D_f) \rightarrow 0, \quad \frac{\ln |B|}{\ln \rho(D_f)} \rightarrow 0, \quad (1.14)$$

а также условие (1.10). Тогда распределение случайной величины $\xi(D, F, B)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [1] было показано (см. доказательства следствий 4 и 2 в [1]), что условие (1.13) выполнено, если $D = V^n \setminus \{0^n\}$, а для множества $Q(f) = \{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ справедливо хотя бы одно из условий $Q(f) \supseteq Q_n^{(2)}$ и $Q(f) \supseteq Q_n^{(t_1)} \cup Q_n^{(t_2)}$, где

$$Q_n^{(t)} = \bigcup_{\substack{d_1, \dots, d_n \in \{0, \dots, q-1\} \\ d_1 + \dots + d_n = t}} \{x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}\}$$

и $2 < t_1 < t_2$, $\text{НОД}(t_1 - 1, t_2 - 1) = 1$.

Пусть мощность множества $D \subseteq V^n \setminus \{0^n\}$ при переходе к пределу сравнима с мощностью пространства V^n . В этом случае условие $T\Delta \rightarrow 0$, использованное в теоремах 1 и 2, можно заменить менее ограничительным условием $\Delta \rightarrow 0$.

Теорема 3. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x) + S(x)$, $D \subseteq V^n \setminus \{0^n\}$, $q^{-n}|D| \geq c > 0$ и выполнены условия теоремы 2 с заменой условия $T\Delta \rightarrow 0$ условием $\Delta \rightarrow 0$. Тогда распределение случайной величины $\xi(D, F, B)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $K = GF(2)$, то в V^n нет подобных векторов. Поэтому $D'_f = D_f$, а условие (1.13) в теоремах 2 и 3 можно опустить.

Дальнейший порядок изложения материала в статье следующий. Теоремы 1–3 доказываются в параграфах 2–4. В параграфе 5 теоремы 2 и 3 используются для исследования асимптотических свойств распределения числа решений систем включений из специального класса, содержащего заведомо совместные системы. В параграфе 6 рассматривается случай $K = GF(2)$. Здесь для $\xi(D, F, B)$ доказывается предельная теорема Пуассона, условия которой допускают асимптотическое вырождение распределений элементов матрицы A . Она распространяет теорему 3 работы [1] на случай $S(x) \neq 0^T$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 проведем по схеме доказательства теоремы 6 в [3]. Мы рассматриваем случай, когда $F(x) = Ax + S(x)$. Пусть $I\{E\}$ обозначает индикатор случайного события E , а $J = D \times B$. Тогда

$$\xi(D, F, B) = \sum_{(x,b) \in J} I\{F(x) = b\}. \quad (2.1)$$

В отличие от доказательства теоремы 6 в [3], которая доказывалась с помощью «многомерной» версии теоремы Б. А. Севастьянова о предельном распределении Пуассона суммы зависимых индикаторов (см. [4]), мы воспользуемся традиционной («одномерной») версией этой теоремы (см. [5, 6]). Для ее применения потребуются ряд определений. Как и в [3], введем множества

$$D_{k,j} = \{(x^1, \dots, x^k) \in D^k : \text{rank}(x^1, \dots, x^k) = j\}, \\ D_k = \bigcup_{j=1}^{k-1} D_{k,j}.$$

Отметим, что

$$|D_{k,j}| \leq C_k^j q^{j(k-j)} |D|^j. \quad (2.2)$$

Положим

$$J_k = \left\{ ((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k)) \in J^k : (x^\alpha, b^\alpha) \neq (x^\beta, b^\beta) \ (\alpha \neq \beta) \right\}.$$

Определим исключительные множества $I_k \subset J_k$ равенством

$$I_k = \left\{ ((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k)) \in J_k : (x^1, \dots, x^k) \in D_k \right\}. \quad (2.3)$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условий (они отличаются от аналогичных условий в [3] лишь заменой Ax на $F(x)$)

$$\sum_{(x,b) \in J} \mathbf{P}\{F(x) = b\} \rightarrow \lambda, \quad (2.4)$$

$$\max_{(x,b) \in J} \mathbf{P}\{F(x) = b\} \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

и при всех $k = 2, 3, \dots$ (далее для краткости используем обозначение $v^i = (x^i, b^i)$)

$$\max_{(v^1, \dots, v^k) \in J_k \setminus I_k} \left| \frac{\mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\}}{\mathbf{P}\{F(x^1) = b^1\} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}\{F(x^k) = b^k\}} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \prod_{i=1}^k \mathbf{P}\{F(x^i) = b^i\} \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Проверка аналогов условий (2.4)–(2.8) в [3] опиралась на следующее утверждение (лемма 1 в [3]).

Лемма 1. Пусть $(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j}$, $b^1, \dots, b^k \in V^T$ и выполнено условие (1.5). Тогда при всех $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} \leq \left(\frac{1 + \Delta}{q} \right)^{iT}, \quad (2.9)$$

если $j \leq k - 1$, а если $j = k$, то

$$\left(\frac{1 - \Delta}{q} \right)^{kT} \leq \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} \leq \left(\frac{1 + \Delta}{q} \right)^{kT}. \quad (2.10)$$

Мы будем использовать лемму 1а — следствие леммы 1 и независимости случайного отображения S и случайной матрицы A .

Лемма 1а. Пусть $F(x) = Ax + S(x)$ (или $F(x) = A_1x + A_2f(x) + S(x)$), $(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j}$, $b^1, \dots, b^k \in V^T$ и выполнено условие (1.5). Тогда при всех $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} \leq \left(\frac{1 + \Delta}{q} \right)^{iT}, \quad (2.11)$$

если $j \leq k - 1$, а если $j = k$, то

$$\left(\frac{1 - \Delta}{q}\right)^{kT} \leq \mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} \leq \left(\frac{1 + \Delta}{q}\right)^{kT}. \quad (2.12)$$

Соотношения (2.4)–(2.7) можно доказать, повторяя соответствующие рассуждения работы [3] с заменой Ax на $F(x)$ и используя лемму 1а вместо леммы 1. Эти выкладки мы не приводим.

Проверка же условия (2.8) требует использования нового хода рассуждений и нового условия (см. (1.9)), поскольку из-за наличия слагаемого S в отображении F некоторые леммы, использованные при доказательстве аналога (2.8) в [3], не применимы.

Итак, проверим соотношение (2.8). Введем множества

$$\bar{D}_{k,j} = \{(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j} : x^\alpha \neq x^\beta (\alpha \neq \beta)\}. \quad (2.13)$$

Заметим, что $\bar{D}_{k,1} = \emptyset$, $k = 2, 3, \dots$. Положим $\bar{D}_k = \bigcup_{j=2}^{k-1} \bar{D}_{k,j}$. Тогда

$$I_k \subseteq \{(v^1, \dots, v^k) : (x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_k, b^1, \dots, b^k \in B\}. \quad (2.14)$$

Так как $\bar{D}_2 = \bar{D}_{2,1} = \emptyset$, то $I_2 = \emptyset$. При $k \geq 3$, используя (2.14), получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} = \\ & \leq \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_{k,j}} \sum_{(b^1, \dots, b^k) \in B^k} \mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

К выражению в правой части (2.15) применим оценку (2.9). Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} \leq \\ & \leq \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_{k,j}} |B|^k \left(\frac{1 + \Delta}{q}\right)^{jT} \leq \\ & \leq \sum_{j=2}^{k-1} \frac{|\bar{D}_{k,j}|}{|D|^j} |B|^{k-j} \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{(1 + \Delta)^T |D| |B|}{q^T}\right)^j. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Так как в D нет подобных векторов, то из (2.14) следует равенство

$$\overline{D}_{k,j} = \{(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j} : x^\alpha \neq cx^\beta (c \in K \setminus \{0\}, \alpha \neq \beta)\}. \quad (2.17)$$

В [3] (см. лемму 6 и текст после нее) было показано, что для множества, указанного в правой части (2.17), выполнено неравенство

$$|\overline{D}_{k,j}| \cdot |D|^{-j} \leq q^{k(k-j)} \rho(D). \quad (2.18)$$

Из этой оценки, условий (1.9), (1.10) и $T\Delta \rightarrow \infty$ следует, что выражение в правой части цепочки неравенств (2.16) стремится к нулю. Значит, условие (2.8) тоже выполнено. Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Теперь $F(x) = A_1x + A_2f(x) + S(x)$, а $\xi(D, F, B)$ — число решений системы (1.11). Как мы уже отмечали, это число совпадает с числом решений системы (1.12).

Обратившись к определению функции $\rho(D)$, нетрудно проверить, что из равенства $|D_f| = |D|$, условий $\rho(D_f) \rightarrow 0$ и $|D'_f| = |D|(1 + o(1))$ следует соотношение $\rho(D'_f) \rightarrow 0$. Поэтому из теоремы 1 и условий теоремы 2 выводим, что распределение числа решений $\xi(D'_f, Ay + S^*(y), B)$ системы

$$y \in D'_f, \quad Ay + S^*(y) \in B, \quad (3.1)$$

сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Осталось показать, что $\mathbf{P}\{\xi(D'_f, Ay + S^*(y), B) = \xi(D, F, B)\} \rightarrow 1$. Учитывая, что по лемме 1а для любых $y \in V^{n+m} \setminus \{0^{n+m}\}$ и $b \in B$ выполнено неравенство $\mathbf{P}\{Ay + S^*(y) = b\} \leq ((1 + \Delta)/q)^T$, а $|D_f| = |D|$, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\xi(D, F, B) - \mathbf{E}\xi(D'_f, Ay + S^*(y), B) = \\ &= \mathbf{E}\xi(D_f, Ay + S^*(y), B) - \mathbf{E}\xi(D'_f, Ay + S^*(y), B) \leq \\ &\leq q^{-T}|B||D| \left(1 - \frac{|D'_f|}{|D|}\right) (1 + \Delta)^T. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Согласно условиям (1.13), (1.14), $T\Delta \rightarrow 0$ правая часть в цепочке соотношений (3.2) стремится к нулю. Так как

$$\mathbf{P}\{\xi(D, F, B) \geq \xi(D'_f, Ay + S^*(y), B)\} = 1,$$

то из (3.2) следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi(D'_f, Ay + S^*(y), B) \neq \xi(D, F, B)\} \rightarrow 0.$$

Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 3

По условию $F(x) = A_1x + A_2f(x) + S(x)$. Пусть

$$D' = \{x \in D: (x, f(x)) \in D'_f\},$$

а J и J' обозначают множества $D \times B$ и $D' \times B$ соответственно. Тогда

$$\xi(D, F, B) = \sum_{(x,b) \in J} I\{F(x) = b\}, \quad \xi(D', F, B) = \sum_{(x,b) \in J'} I\{F(x) = b\}. \quad (4.1)$$

Доказательство проведем по схеме доказательства теорем 1 и 2 с использованием некоторых вспомогательных результатов из работы [2].

Сначала покажем, что

$$\mathbf{P}\{\xi(D', F, B) = \xi(D, F, B)\} \rightarrow 1. \quad (4.2)$$

Введем множества

$$D_{k,j} = \{(x^1, \dots, x^k) \in (D)^k: \text{rank}((x^1, f(x^1)), \dots, (x^k, f(x^k))) = j\},$$

$$D'_{k,j} = D_{k,j} \cap \{(x^1, \dots, x^k) \in (D')^k\}.$$

Для величин $|D'_{k,j}|$ выполнены оценки, аналогичные оценкам (2.2):

$$|D'_{k,j}| \leq |D_{k,j}| \leq \sum_{s=1}^j C_k^s q^{s(k-s)} |D|^s < \sum_{s=1}^j C_k^s q^{s(k-s)} q^{ns}. \quad (4.3)$$

Положим

$$D'_k = \bigcup_{j=1}^{k-1} D'_{k,j}.$$

Для $x^1, \dots, x^k \in D$, $k \geq 2$, $\alpha = 1, \dots, k$, введем величины

$$\eta^\alpha(x^1, \dots, x^k) = \sum_{i=1}^n \eta_i^\alpha(x^1, \dots, x^k),$$

где

$$\eta_i^\alpha(x^1, \dots, x^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i^\alpha \neq 0 \text{ и } x_i^\beta = 0 \text{ при всех } \beta \in \{1, \dots, k\} \setminus \{\alpha\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для $k = 1$ положим $\eta^1(x^1) = \|x^1\|$ (напомним, что $\|x\|$ — число ненулевых элементов вектора x). При $0 \leq l \leq n$ определим множества

$$D_{k,j}(l) = \{(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j}: \exists s_1, \dots, s_j \in \{1, \dots, k\}, s_\alpha \neq s_\beta (\alpha \neq \beta),$$

$$\eta^s(x^{s_1}, \dots, x^{s_j}) \geq l \ \forall s \in \{s_1, \dots, s_j\}\}.$$

Пусть

$$D'_{k,j}(l) = D_{k,j}(l) \cap D'_{k,j}.$$

Положим

$$J'_k = \left\{ ((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k)) \in (J')^k : (x^\alpha, b^\alpha) \neq (x^\beta, b^\beta) (\alpha \neq \beta) \right\}.$$

Сформулируем два вспомогательных утверждения.

Лемма 2. Пусть $(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j}(l)$, $0 \leq l \leq n$, $b^1, \dots, b^k \in V^T$, и выполнено условие (1.5). Тогда при всех $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} \leq \left(\frac{1 + \Delta^l}{q} \right)^{jT}, \quad (4.4)$$

если $j \leq k - 1$, а если $j = k$, то

$$\left(\frac{1 - \Delta^l}{q} \right)^{kT} \leq \mathbf{P}\{F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k\} \leq \left(\frac{1 + \Delta^l}{q} \right)^{kT}. \quad (4.5)$$

Доказательство. Согласно лемме 1 из [2] соотношения (4.4), (4.5) выполнены (при указанных выше условиях и при любых $b^1, \dots, b^k \in V^T$), если $S(x) \equiv 0^T$ и отображение $F(x)$ задано равенством $F(x) = A_1x + A_2f(x)$. В силу независимости отображений $A_1x + A_2f(x)$ и $S(x)$ лемма 2 вытекает из леммы 1 работы [2].

Лемма 3. Существует такая функция $\varepsilon(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, что при всех $j = 1, \dots, k$ выполнено неравенство

$$|D_{k,j} \setminus D_{k,j}(\ln n)| \leq q^{jn} \exp \left\{ n \left(\ln \left(1 - \frac{q-1}{q^j} \right) + \varepsilon(n) \right) \right\}. \quad (4.6)$$

Лемма 3 является следствием леммы 2 из [2], в которой оценка (4.6) была доказана для $D = V^n \setminus \{0^n\}$.

Из (4.1) следует, что

$$\mathbf{E}(\xi(D, F, B) - \xi(D', F, B)) = \sum_{(x,b) \in J \setminus J^1} \mathbf{P}\{F(x) = b\}. \quad (4.7)$$

Разобьем сумму в правой части на две суммы:

$$\sum_{(x,b) \in J \setminus J^1} \mathbf{P}\{F(x) = b\} = \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{(x,b) \in J \setminus J', \|x\| \geq \ln n} \mathbf{P}\{F(x) = b\}, \\ \Sigma_2 &= \sum_{(x,b) \in J \setminus J', \|x\| < \ln n} \mathbf{P}\{F(x) = b\}.\end{aligned}$$

Используя оценку (4.5) (где $k = 1$), получаем

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &\leq |D \setminus D'| |B| \left(\frac{1 + \Delta^{\ln n}}{q} \right)^T = \\ &= \left(1 - \frac{|D'|}{|D|} \right) \frac{|D| |B|}{q^T} \left(1 + \Delta^{\ln n} \right)^T.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Из условий (1.10), (1.14), неравенств $q^{-n} |D| \geq c > 0$ и $\rho(D_i) \geq q^{-n}$ (см. (1.7)) следует, что при $n \rightarrow \infty$ выполнена оценка

$$T = n(1 + o(1)),\tag{4.10}$$

а из оценки (4.10) и условия $\Delta \rightarrow 0$ следует, что

$$T \Delta^{\ln n} \rightarrow 0.\tag{4.11}$$

Из (4.9), (1.13), (1.10) и соотношения (4.11) получаем, что $\Sigma_1 = o(1)$.

Вместе с этим, используя теперь оценку (2.10) (где $k = 1$) и соотношения (4.10), $\Delta \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &\leq \sum_{0 \leq i < \ln n} C_n^i (q-1)^i \cdot |B| \left(\frac{1 + \Delta}{q} \right)^T = \\ &= O \left((n(q-1))^{\ln n} |B| \right) \left(\frac{1 + \Delta}{q} \right)^T = \\ &= \exp \{ -n \ln q + T \ln(1 + \Delta) + O(\ln^2 n) \} = \\ &= \exp \{ -n \ln q(1 + o(1)) \} = o(1).\end{aligned}$$

Так как $\mathbf{P}\{\xi(D, F, B) \geq \xi(D', F, B)\} = 1$, то, подставив в (4.8) и (4.7) выведенные соотношения для Σ_1 и Σ_2 , получим:

$$\mathbf{P}\{\xi(D', F, B) \neq \xi(D, F, B)\} \leq \mathbf{E}(\xi(D, F, B) - \xi(D', F, B)) \rightarrow 0.\tag{4.12}$$

Итак, соотношение (4.2) доказано.

Теперь докажем предельную теорему Пуассона для случайной величины $\xi(D', F, B)$ (см. (4.1)), что и завершит доказательство теоремы 3. Для этого опять воспользуемся теоремой Б. А. Севастьянова. Определим исключительные множества $I'_k \subset J'_k$ равенством

$$I'_k = \left\{ ((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k)) \in J'_k : (x^1, \dots, x^k) \in D'_k \cup (D'_{k,k} \setminus D'_{k,k}(\ln n)) \right\}.$$

Согласно этому определению в исключительное множество I'_k вошли все наборы $(v^1, \dots, v^k) \in J'_k$, для которых набор $(x^1, \dots, x^k)$ имеет ранг $j < k$, а в случае полного ранга $j = k$ — те наборы, в которых хотя бы один из векторов $x^1, \dots, x^k$ имеет относительно мало ненулевых элементов на тех местах, где остальные $k - 1$ векторов имеют нули.

Отметим сразу, что

$$I'_k \subseteq \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in D'_k \cup (D'_{k,k} \setminus D'_{k,k}(\ln n)) \right\} \cap \left\{ b^1, \dots, b^k \in B \right\}, \quad (4.13)$$

а

$$D'_k \cup (D'_{k,k} \setminus D'_{k,k}(\ln n)) = D'_k(\ln n) \cup (D'_k \setminus D'_k(\ln n)) \cup (D'_{k,k} \setminus D'_{k,k}(\ln n)). \quad (4.14)$$

Предельная теорема Пуассона для случайной величины $\xi(D', F, B)$ (см. (4.1)) будет доказана, если убедиться, что выполнены условия (2.4)–(2.8) для рассматриваемых в этом разделе отображения F и множеств I'_k . Приступим к проверке этих условий.

Соотношение (2.4) следует из (1.10) и (4.12), а соотношение (2.5) — из оценки (2.10) и условия $\Delta \rightarrow 0$. Соотношение (2.6) вытекает из определения исключительных множеств и неравенств (4.5).

Проверим соотношение (2.7) при $k \geq 2$. Из (4.14) следует равенство

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I'_k} \prod_{i=1}^k \mathbf{P} \{F(x^i) = b^i\} = S_1 + S_2, \quad (4.15)$$

где

$$S_1 = \sum_{\substack{(v^1, \dots, v^k) \in J'_k \\ (x^1, \dots, x^k) \in D'_k(\ln n)}} \prod_{i=1}^k \mathbf{P} \{F(x^i) = b^i\},$$

$$S_2 = \sum_{\substack{(v^1, \dots, v^k) \in J'_k \\ (x^1, \dots, x^k) \in (D'_k \setminus D'_k(\ln n)) \cup (D'_{k,k} \setminus D'_{k,k}(\ln n))}} \prod_{i=1}^k \mathbf{P} \{F(x^i) = b^i\}.$$

Используя условие $q^{-n}|D| \geq c > 0$ и оценки (4.3), (4.4) (при $k = 1$), (4.13), получаем

$$\begin{aligned} S_1 &\leq |B|^k \sum_{j=1}^{k-1} |D'_{k,j}| \left(\frac{1 + \Delta^{\ln n}}{q} \right)^{kT} \leq \\ &\leq \left(\frac{|D||B|}{q^T} \right)^k (1 + \Delta^{\ln n})^{kT} \frac{1}{|D|^k} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{s=1}^j C_k^s q^{s(n+k-s)} \leq \\ &\leq \left(\frac{|D||B|}{q^T} \right)^k (1 + \Delta^{\ln n})^{kT} \frac{1}{(cq^n)^k} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{s=1}^j C_k^s q^{s(n+k-s)}. \end{aligned}$$

Поэтому из (1.10), (4.11) и соотношения

$$\frac{1}{q^{nk}} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{s=1}^j C_k^s q^{s(n+k-s)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

следует, что $S_1 \rightarrow 0$.

Аналогичным образом с помощью соотношений $D'_{k,j} \setminus D'_{k,j}(\ln n) \subseteq D_{k,j} \setminus D_{k,j}(\ln n)$, (2.12) (в нем надо положить $k = 1$ и взять $F(x) = A_1 x + A_2 f(x) + S(x)$) и (4.6) получаем оценки

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \left(\frac{|D||B|}{q^T} \right)^k (1 + \Delta)^{kT} \frac{1}{|D|^k} \sum_{j=1}^k |D_{k,j} \setminus D_{k,j}(\ln n)| \leq \\ &= \frac{1}{(cq^n)^k} \sum_{j=1}^k q^{nj} \exp \left\{ n \ln \left(1 - \frac{q-1}{q^j} \right) + kT \ln(1 + \Delta) + \varepsilon(n) \right\} = o(1). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Подставив в (4.15) выведенные соотношения для S_1 и S_2 , получим (2.7).

Проверим соотношение (2.8). Опять $k \geq 2$. Введем множества

$$\begin{aligned} \overline{D}'_{k,j} &= \{(x^1, \dots, x^k) \in D'_{k,j} : x^\alpha \neq x^\beta (\alpha \neq \beta)\}, \\ \overline{D}'_{k,j}(\ln n) &= \{(x^1, \dots, x^k) \in D'_{k,j}(\ln n) : x^\alpha \neq x^\beta (\alpha \neq \beta)\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\overline{D}'_{k,1} = \emptyset$, $k = 2, 3, \dots$, и положим

$$\overline{D}'_k = \bigcup_{j=2}^{k-1} \overline{D}'_{k,j}, \quad \overline{D}'_k(\ln n) = \bigcup_{j=2}^{k-1} \overline{D}'_{k,j}(\ln n).$$

Так как $\overline{D}'_2 = \overline{D}'_{2,1} = \emptyset$, то $I'_k = \emptyset$. Далее полагаем $k \geq 3$.

Из (4.14) следует равенство

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I'_k} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{S}_1 &= \sum_{\substack{(v^1, \dots, v^k) \in I'_k \\ (x^1, \dots, x^k) \in \overline{D}'_k(\ln n)}} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\}, \\ \overline{S}_2 &= \sum_{\substack{(v^1, \dots, v^k) \in I'_k \\ (x^1, \dots, x^k) \in (\overline{D}'_k \setminus \overline{D}'_k(\ln n)) \cup (D'_{k,k} \setminus D'_{k,k}(\ln n))}} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\}. \end{aligned}$$

Применим оценки (4.4) (при $l = \ln n$) к сумме $\overline{S}_1$. Получим

$$\begin{aligned} \overline{S}_1 &= \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in \overline{D}'_{k,j}(\ln n)} \sum_{(b^1, \dots, b^k) \in B^k} \mathbf{P} \left\{ F(x^1) = b^1, \dots, F(x^k) = b^k \right\} \leq \\ &\leq \sum_{j=2}^{k-1} |\overline{D}'_{k,j}| |B|^k \left(\frac{1 + \Delta \ln n}{q} \right)^{iT} \leq |B|^k \sum_{j=2}^{k-1} |D_{k,j}^*| \left(\frac{1 + \Delta \ln n}{q} \right)^{iT}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где мы воспользовались отсутствием подобных векторов в D'_f и вытекающими из этого свойствами соотношениями $\overline{D}'_{k,j} \subseteq D_{k,j}^*$,

$$D_{k,j}^* = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j} : (x^\alpha, f(x^\alpha)) \neq (cx^\beta, cf(x^\beta)), c \in K, \alpha \neq \beta \right\}.$$

Применив (2.18) (в данном случае в (2.18) в качестве D рассматривается D_f), получаем $|D_{k,j}^*| \leq q^{k(k-j)} \rho(D_f) |D|^j$. Используя эту оценку, условия теоремы и (4.11), от (4.18) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \overline{S}_1 &\leq \rho(D_f) |B|^k \sum_{j=2}^{k-1} q^{k(k-j)} |D|^j \left(\frac{1 + \Delta \ln n}{q} \right)^{iT} = \\ &= \rho(D_f) |B|^k \sum_{j=2}^{k-1} q^{k(k-j)} \left(\frac{|D| (1 + \Delta \ln n)^T}{q^T} \right)^j = O(\rho(D_f) |B|^k) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Аналогичным образом с помощью леммы 1 (см. (2.10)) и соотношений $\overline{D}'_{k,j} \setminus \overline{D}'_{k,j}(\ln n) \subseteq D_{k,j} \setminus D_{k,j}(\ln n)$ получаем

$$\overline{S}_2 \leq |B|^k \sum_{j=2}^k |D_{k,j} \setminus D_{k,j}(\ln n)| \left(\frac{(1+\Delta)^T}{q^T} \right)^j.$$

Используя оценку $\ln |B| = o(n)$ (она вытекает из (1.7), (1.14) и условия $q^{-n}|D| \geq c > 0$), (4.6) и (4.10), приходим к выводу, что $\overline{S}_2 = o(1)$. Подставив в (4.17) выведенные соотношения для $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, получим (2.8).

Таким образом, сходимость распределения случайной величины $\xi(D', F, B)$ к распределению Пуассона с параметром λ доказана. Значит, доказана и теорема 3.

§ 5. Класс включений, содержащий заведомо совместные системы

В этом параграфе рассматривается распределение случайной величины $\xi(D, F, B | x^0)$, $x^0 \in V^n$, равной количеству решений системы включений

$$x \in D, \quad F(x) \in F(x^0) + B. \quad (5.1)$$

В случае, когда $D = V^n$ и $B = \{0^T\}$, система включений (5.1) с $F(x) = (F_1(x), \dots, F_T(x))$ представляет собой заведомо совместную систему уравнений

$$F_j(x) = F_j(x^0), \quad j = 1, \dots, T,$$

относительно $x \in V^n$.

Заменой переменных $u = x - x^0$ включения (5.1) приводятся к виду (1.1):

$$u \in D - x^0, \quad F^{(x^0)}(u) \in B, \quad (5.2)$$

где $F^{(x^0)}(u) = F(u + x^0) - F(x^0)$. Поэтому между случайными величинами $\xi(D, F, B | x^0)$ и $\xi(D, F, B)$ существует связь, выраженная равенствами

$$\xi(D, F, B | x^0) = \xi(D - x^0, F^{(x^0)}, B). \quad (5.3)$$

При этом $\xi(D, F, B | 0^n) = \xi(D, F, B)$, если $F(0^n) = 0^T$.

Далее $F(x) = A_1 x + A_2 f(x) + S(x)$, где A_1 и A_2 — случайные матрицы (над полем K) размеров $T \times n$ и $T \times m$ соответственно, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ — заданное отображение, удовлетворяющее условию

$f(0^n) = 0^m$, а $S(x) = (S_1(x), \dots, S_T(x))$ — случайное отображение, не зависящее от матриц A_1, A_2 . Пусть матрица $A = (A_1, A_2)$ размера $T \times (n + m)$ получена объединением матриц A_1, A_2 ; далее считается, что $\Delta = \Delta(A)$ удовлетворяет условию (1.5).

Определим отображение $f^{(x^0)}: V^n \rightarrow V^m$ равенством $f^{(x^0)}(x) = f(x + x^0) - f(x^0)$, $x \in V^n$, и множество

$$(D - x^0)_{f^{(x^0)}} = \{(x, f^{(x^0)}(x)) | x \in D - x^0\} \subseteq V^{n+m}.$$

Заметим, что $|(D - x^0)_{f^{(x^0)}}| = |D|$. Построим множество $(D - x^0)'_{f^{(x^0)}} \subseteq (D - x^0)_{f^{(x^0)}}$ по такому же правилу, по какому для теоремы 2 из множества D_f строилось множество D'_f . Будем предполагать, что вектор $x^0 = x^0(n)$ зависит от параметра n .

Теорема 2а. Пусть $D \subseteq V^n \setminus \{x^0\}$, $F(x) = A_1x + A_2f(x) + S(x)$ и выполнены условия $n, T \rightarrow \infty, |D| \rightarrow \infty, T\Delta \rightarrow 0$, (1.10),

$$\frac{|(D - x^0)'_{f^{(x^0)}}|}{|D|} \rightarrow 1, \quad (5.4)$$

$$\rho\left((D - x^0)_{f^{(x^0)}}\right) \rightarrow 0, \quad \frac{\ln |B|}{\ln \rho\left((D - x^0)_{f^{(x^0)}}\right)} \rightarrow 0. \quad (5.5)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, F, B|x^0)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Теорема 2а следует из теоремы 2, равенств (5.3) и

$$F^{(x^0)}(x) = F(x + x^0) - F(x^0) = A_1x + A_2f^{(x^0)}(x) + S^{(x^0)}(x), \quad (5.6)$$

где $S^{(x^0)}(x) = S(x + x^0) - S(x^0)$.

С помощью равенств (5.3) и (5.6) из теоремы 3 получается теорема 3а.

Теорема 3а. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x) + S(x)$, $D \subseteq V^n \setminus \{x^0\}$, $q^{-n}|D| \geq c > 0$ и выполнены условия теоремы 2а с заменой условия $T\Delta \rightarrow 0$ условием $\Delta \rightarrow 0$. Тогда распределение случайной величины $\xi(D, F, B|x^0)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Сразу приведем условия для множества координатных функций $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ отображения f , которые влекут условие $\rho((D - x^0)_{f(x^0)}) \rightarrow 0$ теорем 2а и 3а при $D = V^n \setminus \{x^0\}$. Пусть $\|z\|$ — число ненулевых элементов вектора z . Рассмотрим набор $d^s = (d_1^s, \dots, d_n^s) \in \{0, 1\}^n$, $s = 1, \dots, l$, где

$$\|d^s\| \geq 2, \quad s = 1, \dots, l, \quad (5.7)$$

$$\|(d_1^{s_1} d_1^{s_2}, \dots, d_n^{s_1} d_n^{s_2})\| = 0, \quad 1 \leq s_1 < s_2 \leq l, \quad (5.8)$$

и введем при $l = 2, 3, \dots$ множество функций

$$Q_n(d^1, \dots, d^l) = \bigcup_{s=1}^l \{x_1^{d_1^s} \dots x_n^{d_n^s}\}. \quad (5.9)$$

Отметим, что множество $Q_n(d^1, \dots, d^l)$ состоит из мономов $\varphi_s(x) = x_1^{d_1^s} \dots x_n^{d_n^s}$, $s = 1, \dots, l$, содержащих только первые степени переменных. Согласно условию (5.7), степени самих мономов $\varphi_s(x)$ больше единицы, а условие (5.8) означает, что множества существенных переменных мономов из набора $Q_n(d^1, \dots, d^l)$ попарно не пересекаются.

Условия, при которых $\rho((D - x^0)_{f(x^0)}) \rightarrow 0$, дает следующее утверждение, вытекающее непосредственно из оценки (3.10) в [1], полученной там при доказательстве теоремы 2.

Теорема А. Пусть $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq Q_n(d^1, \dots, d^l)$, $l \leq m$. Тогда при $D = V^n \setminus \{x^0\}$ для всех $x^0 \in V^n$

$$\rho((D - x^0)_{f(x^0)}) \leq 4 \prod_{s=1}^l (1 - q^{-2\|d^s\|}).$$

Эта теорема позволяет нам доказать следующее утверждение. Рассмотрим множество функций (см. замечание 1)

$$Q_n^{(2)} = \bigcup_{\substack{d_1, \dots, d_n \in \{0, \dots, q-1\} \\ d_1 + \dots + d_n = 2}} \{x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}\},$$

которое состоит из всех мономов степени 2.

Следствие 1. Пусть $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq Q_n^{(2)}$, $S(0^n) = 0^T$, выполнены условия $n, T \rightarrow \infty$, (1.10), $\Delta \rightarrow 0$,

$$|B| \leq q^{\delta T}, \quad \delta = \delta(n) = o(1). \quad (5.10)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(V^n \setminus \{x^0\}, F, B|x^0)$ (и в том числе распределение величины $\xi(V^n \setminus \{0^n\}, F, B)$) сходится к распределению Пуассона с параметром λ равномерно относительно векторов $x^0 \in V^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Класс случайных включений $F(x) \in F(x^0) + B$, где $F(x) = A_1x + A_2f(x) + S(x)$ и множество $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ удовлетворяет условию теоремы А, содержит «заведомо совместные» системы уравнений, в левых частях которых стоят полиномы степеней g_t , где $2 \leq g_t \leq n(q-1)$, $t = 1, \dots, T$ (см. (1.3)). Предельное распределение числа решений таких систем в случае, когда $K = GF(2)$, исследовалось в работе [7]. Предельная теорема Пуассона доказана в [7] при более слабых, чем у нас, условиях для параметра Δ , но при дополнительных ограничениях на вес $\|x^0\|$ вектора x^0 (не допускаются векторы, имеющие при $n \rightarrow \infty$ «малый» вес, в частности, не допускается вектор $x^0 = 0^n$). В связи с этим отметим, что в следствии 1 сходимость к предельному распределению выполняется равномерно относительно всех векторов $x^0 \in V^n$ (и в предположении, что K — произвольное конечное поле). Для числа решений системы уравнений (1.3) эта сходимость равномерна и относительно величин $2 \leq g_t \leq n(q-1)$, $t = 1, \dots, T$.

Доказательство следствия 1. Проверим, что условия (5.4) и (5.5) теоремы 2а выполнены равномерно по $x^0 \in V^n$. Положим $\varphi_{i,j}(x) = x_i x_j$, где $1 \leq i < j \leq n$. Тогда

$$\varphi_{i,j}^{(x^0)}(x) = \varphi_{i,j}(x + x^0) - \varphi_{i,j}(x^0) = x_i x_j + x_j^0 x_i + x_i^0 x_j.$$

Пусть $x_i, x_j \in K \setminus \{0\}$ и $k \in K \setminus \{0\}$. При этом условии равенство $\varphi_{i,j}^{(x^0)}(kx) = k\varphi_{i,j}^{(x^0)}(x)$ выполнено только в том случае, когда k — единица поля K . Из условия $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq Q_n^{(2)}$ следует, что множество $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ содержит все функции $\varphi_{i,j}(x)$, $1 \leq i < j \leq n$. Значит, $D'_{f(x^0)} \supseteq \{x \in V^n : \|x\| \geq 2\}$ при всех $x^0 \in V^n$. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ соотношение (5.4) выполнено равномерно относительно векторов $x^0 \in V^n$.

Проверим соотношения (5.5). Выберем в качестве $Q(d^1, \dots, d^l)$ (см. (5.7)) множество функций $\varphi_s(x) = x_{2s-1}x_{2s}$, $s = 1, \dots, l$, где $l = [n/2]$ —

целая часть числа $n/2$. Для такого множества

$$\prod_{s=1}^l \left(1 - q^{-2\|d_s\|}\right) = \left(1 - q^{-4}\right)^{[n/2]} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, и по теореме А выполнено первое из соотношений (5.5) (равномерно относительно $x^0 \in V^n$). Кроме этого, отсюда и из теоремы А получаем, что

$$\left| \ln \left(\rho \left((D - x^0)_{f(x^0)} \right) \right) \right| \geq -\ln \left(4 \left(1 - q^{-4} \right)^{[n/2]} \right) \geq cn \quad (5.11)$$

при некотором $c > 0$. В свою очередь из условий (1.10) и (5.10) следует, что

$$\ln |B| = o(T), \quad T = n(1 + o(1)). \quad (5.12)$$

Из (5.11) и (5.12) вытекает, что второе соотношение в (5.5) выполнено равномерно относительно векторов $x^0 \in V^n$. Таким образом, следствие 1 доказано.

§ 6. Случай $K = GF(2)$

Пусть

$$\overline{Q}_n^{(g)} = \bigcup_{t=2}^g \bigcup_{\substack{d_1, \dots, d_n \in \{0,1\} \\ d_1 + \dots + d_n = t}} \{x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}\}. \quad (6.1)$$

Для натуральных чисел r и g положим

$$l(r, g) = \sum_{i=1}^{\min(r, g)} C_r^i. \quad (6.2)$$

Далее предполагаем, что числа $r = r(n)$, $g = g(n)$ зависят от параметра n .

Теорема 4. Пусть $K = GF(2)$, $F(x) = A_1x + A_2f(x) + S(x)$, $D \subseteq V^n \setminus \{0^n\}$, $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq \overline{Q}_n^{(g)}$ и выполнены условия $n, T \rightarrow \infty$, $r, g \rightarrow \infty$, $|D| \rightarrow \infty$, $\rho(D_f) \rightarrow 0$,

$$\frac{\ln |B|}{\ln \rho(D_f)} \rightarrow 0, \quad (6.3)$$

$$2^{-T}|D||B| \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (6.4)$$

$$\frac{(1 + \Delta)^T |\{x \in D: \|x\| < r\}|}{|D|} \rightarrow 0, \quad (6.5)$$

$$T\Delta^{l(r-j, g-j)} \rightarrow 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (6.6)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, F, B)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Следствие 2. Пусть $K = GF(2)$, $F(x) = A_1x + A_2f(x) + S(x)$, $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq \overline{Q}_n^{(g)}$, $\log_2 n \leq g \leq n$, и выполнены условия $n, T \rightarrow \infty$,

$$2^{n-T}|B| \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (6.7)$$

$$|B| \leq 2^{\delta T}, \quad (6.8)$$

$$0 \leq \Delta \leq \left(2 \left(1 - n^{-1}\psi(n)\right)\right)^{1-\delta} - 1, \quad (6.9)$$

где $0 \leq \delta = \delta(n) = o(1)$, $0 < \psi(n) = o(n)$ и

$$\frac{\ln^2 n}{\psi(n)} = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(V^n \setminus \{0^n\}, F, B)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При выполнении условий (6.7), (6.8) и (6.10) следствия 2 правая часть в (6.9) стремится к единице, что означает возможность асимптотического вырождения распределений (1.4) элементов матрицы $A = (A_1, A_2)$.

Немного о доказательстве теоремы 4. Вспомним, что при выводе теоремы 3 для проверки большинства условий теоремы Б. А. Севастьянова мы использовали схему и фрагменты доказательства теоремы 3 работы [2], добавив к ним новую выкладку для проверки условия (2.8). Для теоремы 4 все делается аналогично. Только теперь вместо теоремы 3 из [2] используется теорема 3 из [1]. Проверка же условия (2.8) здесь проводится точно так же, как для теоремы 3. Поэтому мы доказательство теоремы 4 не приводим.

Доказательство следствия 2 сводится к проверке условий $\rho(D_f) \rightarrow 0$, (6.3), (6.5) и (6.6) теоремы 4 в случае, когда $D = V^n \setminus \{0^n\}$. Проверка условий $\rho(D_f) \rightarrow 0$ и (6.3) повторяет проверку (5.5) в доказательстве следствия 1 (см. раздел 4). Проверка условий (6.5) и (6.6) приведена в доказательстве следствия 5 работы [1]. Поэтому эти выкладки мы опускаем.

Авторы благодарны А. М. Зубкову за полезные замечания.

Список литературы

1. *Копытцев В. А., Михайлов В. Г.* О распределении чисел решений случайных включений // Математические вопросы криптографии. — 2011. — Т. 2. Вып. 2. — С. 55–80.
2. *Копытцев В. А., Михайлов В. Г.* Теоремы пуассоновского типа для числа решений случайных включений // Математические вопросы криптографии. — 2010. — Т. 1. Вып. 4. — С. 63–84.
3. *Копытцев В. А., Михайлов В. Г.* Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22. Вып. 2. — С. 3–21.
4. *Михайлов В. Г.* О предельной теореме Б. А. Севастьянова для сумм зависимых случайных индикаторов // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2003. — Т. 10. Вып. 3. — С. 571–578.
5. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. — М.: Наука, 1976. — 224 с.
6. *Севастьянов Б. А.* Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. — 1972. — Т. 17. Вып. 4. — С. 733–738.
7. *Масол В. И.* Теорема о предельном распределении числа ложных решений системы нелинейных случайных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. — 1998. — Т. 43. Вып. 1. — С. 41–56.