Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Малышев, Метрические свойства вложений множества целых чисел в цилиндр, *Матем. вопр. криптогр.*, 2012, том 3, выпуск 3, 57–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk61>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:33:05

УДК 512.543.7+512.552.5

Метрические свойства вложений множества целых чисел в цилиндр

Ф. М. Малышев

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 20.V.2011

В статье рассматриваются вопросы, связанные с однородными равномерными дискретными вложениями конечнопорождённых абелевых групп в римановы пространства. Дана исчерпывающая классификация гомоморфных вложений множества целых чисел в двумерный цилиндр.

Ключевые слова: гиперболическая геометрия, решётки, абелевы группы

Metric properties of embeddings of the set of integers into the cylinder

F. M. Malyshev

Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow

Abstract. We consider questions connected with the uniform discrete embeddings of finitely generated Abelian groups into the Riemann spaces. A comprehensive classification of the homomorphic embeddings of the set of integers into the two-dimensional cylinder is given.

Key words: hyperbolic geometry, lattices, Abelian groups

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2012, vol. 3, no. 3, pp. 57–79 (Russian).

© 2012 Ф. М. Малышев

§1. Введение

Для решения некоторых задач дискретной математики, связанных с конечными или счётными множествами, бывает полезно подключать геометрическую интуицию, вкладывая эти множества в римановы многообразия небольшой размерности, локально устроенные как обычные евклидовы пространства. Примеры таких вложений использованы, например, в работах [1, 2].

Естественными неформальными требованиями к таким вложениям множеств в римановы многообразия являются, прежде всего, равномерность, дискретность и разумная плотность. При качественном уточнении этих требований элементы вкладываемых множеств будем называть вершинами, а элементы многообразий — точками. При такой терминологии в шарах достаточно больших одинаковых радиусов должно быть примерно одинаковое число вершин, асимптотически не зависящее от положений шаров на многообразии. Максимальные радиусы шаров, не содержащих внутри себя вершин, кроме вершин центра, должны иметь общую положительную нижнюю границу и быть примерно одинаковыми. Совокупность таких шаров с центрами во всех вершинах при незначительном увеличении их радиусов должна целиком покрывать многообразие. Желательно также, чтобы вложение было однородным, т. е. транзитивным относительно подгруппы, которая состоит из изометрий многообразия, оставляющих вкладываемое множество инвариантным. Сформулированные требования навеяны опытом, возникшим у автора при решении конкретных прикладных задач. В более жёсткой форме эти требования формулировать не разумно: в зависимости от приложений они могут уточняться.

Примерами подобных вложений являются вершины решёток в евклидовых пространствах [3]. Серию интересных примеров вложений конечных множеств в двумерную риманову сферу можно построить объединением орбит групп симметрии правильных многогранников в 3-мерном евклидовом пространстве.

Вложение множества C в многообразие M можно задавать инъективным отображением $\iota: C \rightarrow M$. Далее, как правило, множество C отождествляется с $\iota(C)$.

Если C — группа, то желательна ещё согласованность её умножения с римановой метрикой на M . Это требует наличия специального действия C на M с помощью изометрий. Формально действие $C \times M \rightarrow M$ задаётся гомоморфизмом $\varphi: C \rightarrow \text{Iso } M$, а именно: $c \cdot m = \varphi(c)(m)$, $c \in C$, $m \in M$. Согласованность подразумевает равенства $c \cdot m = \iota(ct^{-1}(m))$ для $m \in \iota(C)$. Другими словами, в случае отождествления C с $\iota(C)$ результат действия $c \cdot m$ для $m \in C$ должен совпадать с произведением cm в груп-

пе C . При такой согласованности однородность вложения выполняется автоматически.

Дальнейшее изложение разбито на два параграфа. В §2 приводятся примеры общих конструкций вложения конечнопорождённых абелевых групп в римановы пространства постоянной кривизны. Основным в работе является §3. Он относится к дискретным гомоморфным вложениям множества целых чисел $\mathbb{Z}$ в двумерный цилиндр $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ со стандартной метрикой на нём. Такие вложения $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ однозначно задаются значением $\iota(1) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

§2. Примеры общих конструкций вложений конечнопорождённых абелевых групп в римановы многообразия постоянной кривизны

Пусть C — конечнопорождённая абелева группа и $B = \{0, c_1, \dots, c_r\}$ — её конечное подмножество. Некоторые приложения накладывают на вложения C дополнительные требования, заключающиеся в минимизации (по возможности) диаметра $d = d(cB) = d(B) = \max_{b', b'' \in B} \rho(b', b'')$, где $c \in C$ — произвольное, $cB = \{cb \mid b \in B\}$, а $\rho(b', b'')$ — длина минимальной геодезической, соединяющей точки b' и b'' [4]. Заметим, что в случае согласованности групповой операции на C с метрикой на M имеем $d(cB) = d(B)$ для всех $c \in C$. Формально равномерность размещения C на M при заданном d состоит в максимизации (насколько это возможно) величины $\min_{b', b'' \in B: b' \neq b''} \rho(b', b'')$, вплоть до, вообще говоря, до $d(B)$.

Через $\{c_{r+1}, \dots, c_{r+\kappa}\}$ обозначим такое минимальное множество элементов C , что вместе с B они порождают всю группу C : $\langle c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_{r+\kappa} \rangle = C$. Так как $\mathbb{Z}^{r+\kappa}$ — свободная абелева группа, то существует такой гомоморфизм $\psi: \mathbb{Z}^{r+\kappa} \rightarrow C$, что $\psi(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = c_i$, $i = 1, \dots, r + \kappa$. По теореме о гомоморфизме $C = \text{Im } \psi \cong \mathbb{Z}^{r+\kappa} / \Gamma$, где $\Gamma = \ker \psi \subset \mathbb{Z}^{r+\kappa}$ — решётка некоторого ранга m (см. [3]). Естественное вложение $\mathbb{Z}^{r+\kappa} / \Gamma \subset \mathbb{R}^{r+\kappa} / \Gamma$ порождает вложение $C \subset \mathbb{R}^{r+\kappa} / \Gamma \cong \mathbb{R}^{r+\kappa-m} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$.

Описанное гомоморфное вложение отвечает приписыванию точкам $z \in \mathbb{R}^{r+\kappa}$ с целочисленными координатами элементов $\psi(z) \in C$. Возникаю-

шая при этом «помеха», состоящая в приписывании одного и того же элемента $\psi(z_1) = \psi(z_2) \in C$ различным точкам $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^{r+\kappa} \subset \mathbb{R}^{r+\kappa}$, устраняется после факторизации по ядру ψ . Точкам $\mathbb{R}^{r+\kappa} / \Gamma$ с целочисленными компонентами все элементы C будут приписаны по одному разу.

Условия равномерности, дискретности и плотности в этом случае легко проверяются, если евклидову метрику в $\mathbb{R}^{r+\kappa}$ задавать так, чтобы векторы $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, r + \kappa$, образовывали ортонормированный базис. Асимптотическое совпадение числа вершин в одинаковых увеличивающихся шарах следует из теоремы Минковского (см. [5]). Внутри шара радиуса 1 с центром в вершине нет других вершин. Шары с центром в вершинах и радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{r+\kappa}$ покрывают $\mathbb{R}^{r+\kappa} / \Gamma$ целиком. Согласованность операции в C с метрикой на $\mathbb{R}^{r+\kappa} / \Gamma$ следует из гомоморфности вложения. Наконец, $d(B) = \sqrt{r}$, а $\min_{b', b'' \in B: b' \neq b''} \rho(b', b'') = 1$. Для другого скалярного произведения на $\mathbb{R}^{r+\kappa}$, например, когда $e_i, i = 1, \dots, r + \kappa$, вместе с нулём являются вершинами правильного $(r + \kappa)$ -мерного симплекса, значения $\frac{1}{2}\sqrt{r+\kappa}$ и $\sqrt{r}$ могут быть уменьшены, но это вовсе не означает, что для конкретного приложения соответствующее вложение будет полезней.

Изложенный выше универсальный способ вложения конечнопорождённой абелевой группы в риманово многообразие не всегда является наиболее удовлетворительным. В качестве примера можно рассмотреть $C = \mathbb{Z}$ и $B = \{0, k, m - k, m\}$, $0 < k < m$, $(k, m) = 1$, когда $r = 3$, $\kappa = 0$. Описанный выше приём осуществляет вложение $\mathbb{Z}$ в 3-мерное многообразие, однако, используя вместо гомоморфизма $\psi: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ гомоморфизм $\psi': \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $\psi'(z_1, z_2) = z_1 k + z_2(m - k)$, аналогичным образом получаем вложение $\mathbb{Z}$ в двумерный цилиндр $\mathbb{R}^2 / \langle (k - m, k) \rangle$. Уменьшение размерности многообразия M порой является довольно важным обстоятельством. Наглядность представления задачи, как правило, помогает поиску её решения. Отметим ещё, что в данном примере, взятом из работы [2], числа $i, i + k, i + m - k, i + m$ при каждом $i \in \mathbb{Z}$ приписываются вершинам квадрата на цилиндре $\mathbb{R}^2 / \langle (k - m, k) \rangle$, если при задании евклидовой метрики в $\mathbb{R}^2$ базис e_1, e_2 является ортонормальным.

К сожалению, чаще приходится иметь дело не с выбором лучшего вложения среди имеющихся, а с дефицитом подходящих вложений. В связи с этим приведём одно обобщение описанной выше конструкции. Пусть задано дискретное действие группы G на одном из римановых односвязных пространств Λ постоянной кривизны (евклидово пространство, сфера Римана, пространство Лобачевского), обладающее фундаментальной областью конечного объёма (см. [6, 7]). Предположим также, что имеется нормальная подгруппа $\Gamma \triangleleft G$, свободно (без неподвижных точек) действующая на Λ и такая, что $G/\Gamma \cong C$. После этого можно рассмотреть риманово пространство $M = \Lambda/\Gamma$. Вложение $G/\Gamma \subset M$ задаётся орбитой внутренней точки фундаментальной области при действии G/Γ на M . Для минимизации диаметра $d = d(B)$, $B \subset C$, тройка (Γ, G, Λ) должна подбираться специальным образом. В исходной конструкции имели: $\Lambda = \mathbb{R}^{r+\kappa}$, $G = \mathbb{Z}^{r+\kappa}$, $\Gamma = \ker \psi$.

§3. Вложения множества целых чисел в цилиндр

3.1. В настоящем параграфе, в соответствии с учебником [7], цилиндр $\mathbb{R} \times T$ считаем прямым: направляющая $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, имеющая длину 1 в единицах измерения $\mathbb{R}$, перпендикулярна $\mathbb{R}$. Цилиндр может быть представлен в виде полосы на так называемой накрывающей плоскости, ограниченной двумя параллельными прямыми (образующими), находящимися друг от друга на расстоянии 1. Точки граничных прямых, находящиеся на общем к этим прямым перпендикуляре, отождествляются. Отрезок с отождествлёнными концами одного из таких перпендикуляров $[O, O_1]$ является одной из направляющих цилиндра. Такое представление позволяет геометрические построения на цилиндре осуществлять на накрывающей плоскости. Для этого дополнительно рассматриваются приставленные друг к другу полосы, получающиеся из означенной сдвигами на векторы $k \cdot \overline{OO_1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Точкой цилиндра в этом случае следует считать счётное подмножество точек накрывающей плоскости, по одной точке в каждой полосе. Эти точки получаются из любой из них сдвигами на указанные векторы. Цилиндр, тем самым, является результатом факторизации плоскости по группе сдвигов на эти векторы, когда точки из указанных счётных подмножеств — смежных классов — отождествляются. На цилиндре будут рассматриваться треугольники, круги и параллелограммы. При этом, если особо не оговаривается, отрезок $[A, B]$, соединяющий на цилиндре точки A и B , будет отвечать минимальному отрезку, соединяющему пару точек накрывающей плоскости из соответствующих A и B классов смежности.

Изучаемые в данном параграфе мономорфизмы

$$\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times T \quad (1)$$

однозначно задаются своими значениями $\iota(1) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times T$. (При $\iota(1) \in \{0\} \times T$, в случае инъективности ι , будет нарушаться требование дискретности соответствующего вложения $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \times T$.) Согласованность групповой операции с метрикой, как и однородность вложения, здесь очевидны. Далее это обстоятельство часто будет использоваться, иногда без оговорок.

Нас будет интересовать, какие вершины $\iota(i), \iota(j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, окажутся в результате вложения (1) близкими, соседними на цилиндре. С этой точки зрения мономорфизмы $\tau: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ для различных $\tau(1) \neq 0$ качественно не отличаются. Независимо от $\tau(1)$ соседними в $\mathbb{R}$ будут вершины $\tau(i)$, $\tau(i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$. В случае мономорфизмов (1), как ниже будет показано, ситуация существенно иная.

Далее множество $\iota(\mathbb{Z})$ обозначаем через $\mathbb{Z}$, а его элементы $\iota(i)$ — через i . Будем называть их вершинами (как ранее условились) или целочисленными точками на цилиндре. В накрывающей плоскости в каждой полосе выделяем целочисленные точки, рассматриваем весь класс смежности, отвечающий $\iota(i)$, для всех $i \in \mathbb{Z}$. В силу гомоморфности отображения (1) возникающая в результате совокупность вершин (целочисленных точек) образует двумерную решётку на накрывающей плоскости.

В конце параграфа будет доказано, в частности, что для любых $0 < k < m$, $(k, m) = 1$, можно так подобрать $\iota(1) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times T$, что для вложения (1) соседними на цилиндре будут числа $i, i+k, i+m$, $i \in \mathbb{Z}$. Соседи определяются по методу пустого шара работы [8]. В нашем случае это такой круг K на цилиндре $\mathbb{R} \times T$ без внутренних целочисленных точек, что любой содержащий его больший круг содержит внутри себя хотя бы одну целочисленную точку. Целочисленные точки на границе ∂K так определённого максимального «пустого» круга K по определению объявляем соседними.

Поскольку целочисленные точки накрывающей цилиндр плоскости образуют двумерную решётку, то граница максимального «пустого» круга на цилиндре, как нетрудно убедиться, содержит либо две, либо три, либо четыре целочисленные точки. В последнем случае они являются вершинами прямоугольника. Для остальных четырёхугольников (или при большем числе вершин на границе круга) нашлись бы три из них — i, j, l с тупым углом $\angle ij l$. Но тогда вершина $i+l-j$ была бы внутри круга.

Если K — максимальный «пустой» круг, $i \in \mathbb{Z} \cap \partial K$, $t \in \mathbb{Z}$, то (в силу однородности вложения (1)) $t+K = \{t+\kappa \mid \kappa \in K\}$ — тоже максимальный «пустой» круг, и $t+i \in \partial(t+K)$.

Если граница максимального «пустого» круга K на цилиндре содержит только две или три целочисленные точки, то через $\tilde{K}$ обозначаем один из кругов, центрально симметричный K относительно середины кратчайшего отрезка, соединяющего какую-либо пару $i, j \in \mathbb{Z}$, $i \neq j$, из этих целочисленных точек: $\tilde{K} = \left\{ \kappa + 2 \left(\frac{i+j}{2} - \kappa \right) = i + j - \kappa \mid \kappa \in K \right\}$. Круг $\tilde{K}$ тоже является максимальным «пустым».

Лемма 1. Пусть для вложения (1) граница некоторого максимального «пустого» круга K на цилиндре содержит ровно две целочисленные точки: $i < j$. Тогда:

$$j = i + 1;$$

если все целочисленные точки располагаются на одной образующей, то остальные максимальные «пустые» круги на цилиндре имеют вид $t + K$, $t \in \mathbb{Z}$;

если целочисленные точки располагаются не менее, чем на двух образующих, то различными максимальными «пустыми» кругами будут $t + K$, $t + \tilde{K}$, $t \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. На накрывающей плоскости граница K содержит либо 3 либо 4 вершины, соответственно с одной или с двумя парами отождествляемых. В последнем случае имеем прямоугольную решётку на накрывающей плоскости, целочисленные точки $\text{Im} t = \{i + n(j - i) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ располагаются на одной образующей цилиндра. В первом случае вершины i и j находятся на различных образующих. Три вершины на границе K являются вершинами остроугольного треугольника Δ . Вместе с аналогичным треугольником $\tilde{\Delta}$ в $\tilde{K}$ они образуют параллелограмм Q , который полностью охватывает цилиндр, причём $\mathbb{R} \times T = \bigcup_{\tau \in \mathbb{Z}} (\tau + Q)$. Тем самым, кроме указанных в формулировке леммы, других «пустых» кругов не существует, и $\text{Im} t = \{i + n(j - i) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. При $j - i > 1$ имели бы $\text{Im} t \neq \mathbb{Z}$.

Лемма 1 доказана.

Возникающие в лемме 1 два случая далее обозначаем через I_a , когда $\mathbb{Z}$ находится на одной образующей, и через I_b , когда $\mathbb{Z}$ находится на «винтовой» линии $\{x \cdot t(1) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Из всех пар соседних вершин $\{\tau, \tau + 1\} = \tau + \{0, 1\}$, $\tau \in \mathbb{Z}$, указанных в лемме 1, выделим $B_0 = \{0, 1\}$.

Лемма 2. Пусть для вложения (1) граница некоторого максимального «пустого» круга K на цилиндре содержит ровно три целочисленных

точки: $i < j < l$. Тогда, если треугольник $\Delta(i, j, l)$ с вершинами i, j, l прямоугольный, то:

$$l - i = 2;$$

$$d(K) = 1;$$

прямым является угол при вершине j ;

круг K целиком охватывает цилиндр — касается сам себя в точке j ;

все остальные максимальные «пустые» круги на цилиндре имеют вид $t + K$, $t \in \mathbb{Z}$, и содержат на своей границе целочисленные точки $t + i$, $t + i + 1$, $t + i + 2$.

Если же треугольник $\Delta(i, j, l)$ остроугольный, то $(j - i, l - i) = 1$, причём различными максимальными «пустыми» кругами являются $t + K$, $t \in \mathbb{Z}$, с целочисленными точками на границе $t + i$, $t + j$, $t + l$, и $t + \tilde{K}$, $t \in \mathbb{Z}$, с целочисленными точками на границе $\tau + j$, $\tau + l$, $\tau + l + j - i$, $\tau \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть вначале треугольник $\Delta(i, j, l)$ прямоугольный. Тогда на границе круга K в накрывающей плоскости будет четвёртая вершина P , образующая вместе с i, j, l вписанный в K прямоугольник Q . Вершина P содержится в одном классе смежности с одной из вершин $p \in \{i, j, l\}$. Две вершины $\{i, j, l\} \setminus \{p\}$ принадлежат разным классам смежности, поэтому вершины p и P должны быть противоположными в прямоугольнике Q . В соответствии с упорядоченностью $i < j < l$ вершина P должна быть из одного смежного класса с j : $p = j$. Коль скоро $[P, j]$, как и $[i, l]$, — диагонали прямоугольника Q , то $l - j = j - i$. Прямоугольники $n(l - j) + Q$, $n \in \mathbb{Z}$, целиком покрывают цилиндр, поэтому $\text{Im} l = \{j + n(l - j) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$. Отсюда получаем равенства $l - j = j - i = 1$ и все остальные утверждения первой части леммы 2.

Пусть теперь треугольник $\Delta(i, j, l)$ остроугольный. Смежный ему остроугольный треугольник $\Delta(j, l, l + j - i)$, $j < l < l + j - i$, вписан в максимальный «пустой» круг $\tilde{K}$. Если i, j, l следуют вдоль границы K в порядке возрастания по часовой стрелке, то $j, l, l + j - i$ следуют вдоль границы $\tilde{K}$ в порядке возрастания против часовой стрелки, и наоборот. Таким образом, среди кругов $t + K$, $t \in \mathbb{Z}$, и $\tau + \tilde{K}$, $\tau \in \mathbb{Z}$, не может быть двух совпадающих. Далее, пусть Q — параллелограмм с вершинами $i, j, l + j - i, l$. Параллелограммы $n_1(j - i) + n_2(l - i) + Q$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, целиком покрывают цилиндр, поэтому $\text{Im} l = \{i + n_1(j - i) + n_2(l - i) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$. Откуда, рассуждая от противного, заключаем, что $(j - i, l - i) = 1$.

Лемма 2 доказана.

Выделенные в лемме 2 случаи далее обозначаем через Π_a , когда треугольник $\Delta(i, j, l)$ прямоугольный, и через Π_b , когда треугольник $\Delta(i, j, l)$ остроугольный. Из всех троек соседних вершин $\{i, i+1, i+2\} = i + \{0, 1, 2\}$, $i \in \mathbb{Z}$, в случае Π_a выделим $B_0 = \{0, 1, 2\}$. В случае Π_b среди троек соседних вершин $\{t+i, t+j, t+l\} = t+i + \{0, j-i, l-i\}$, $t \in \mathbb{Z}$, и $\{\tau+j, \tau+l, \tau+l+j-i\} = \tau+j + \{0, l-j, l-i\}$, $\tau \in \mathbb{Z}$, выделим одну: $B_0 = \{0, k, m\}$, $0 < k < m$, $(k, m) = 1$, $m = l-i$, $k \in \{j-i, l-j\}$. Из двух возможных претенденток $\{0, j-i, l-i\}$ и $\{0, l-j, l-i\}$ на роль B_0 , характеризующей вложение (1), выбирается та тройка, которая вдоль своей описанной окружности следует в порядке возрастания по часовой стрелке. При таком выборе $B_0 = \{0, k, m\}$ каждый раз следует иметь ввиду, что кроме $i + \{0, k, m\}$ тройки чисел $i + \{0, m-k, m\}$, $i \in \mathbb{Z}$, тоже являются соседними, но только на своих описанных окружностях они следуют в порядке возрастания против часовой стрелки. Тройку чисел $B_1 = \{0, m-k, m\}$ назовём двойственной B_0 .

Лемма 3. Пусть для вложения (1) граница некоторого максимального «пустого» круга K на цилиндре содержит ровно четыре целочисленных точки: $i < j < l < s$. Тогда:

четырёхугольник с этими вершинами является прямоугольным, вершины i, s в нём противоположные;

$$i + s = j + l;$$

все максимальные «пустые» круги имеют вид $t + K$, $t \in \mathbb{Z}$, целочисленными точками на их границе являются $t+i, t+j, t+l, t+s$; $(j-i, l-i) = 1$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в двух предыдущих леммах. Исходным моментом в данном случае является уже отмечавшееся выше отсутствие тупых углов соответствующего четырёхугольника Q : он является прямоугольником. После этого доказательство леммы 3 заканчивается так же, как и доказательство леммы 2.

Условием леммы 3 выделяется пятый последний вид вложений (1), обозначаемый далее как III. Прямоугольник Q здесь выступает аналогом для параллелограмма Q в случае Π_b . Каждой своей диагональю прямоугольник Q разбивается на два треугольника. Тогда, по аналогии со случаем Π_b , претендентами для характеристики вложения (1) в случае III выступают четыре тройки: $\{0, j-i, l-i\}$, $\{0, j-i, j+l-2i\}$, $\{0, l-j, l-i\}$,

$\{0, l-i, j+l-2i\}$. Две первые тройки вершин вдоль своих описанных окружностей следуют в порядке возрастания в одном и том же направлении, две других тройки – в противоположном.

Обозначая $j-i=k$, $l-i=m$ и опуская нуль, две первые тройки вершин будем представлять построчно в виде матрицы $\begin{pmatrix} k, & m \\ k, & m+k \end{pmatrix}$ так называемого *правого типа*. Аналогично, обозначая $l-j=\tilde{k}$, $l-i=\tilde{m}$, две других тройки вершин представляем в виде матрицы $\begin{pmatrix} \tilde{k}, & \tilde{m} \\ \tilde{m}, & 2\tilde{m}-\tilde{k} \end{pmatrix}$ так называемого *левого типа*. Обратим внимание, что $k+\tilde{k}=m=\tilde{m}$, $k+\tilde{m}=m+k=2\tilde{m}-\tilde{k}$, поэтому, как первые строки двух этих матриц, так и вторые их строки являются двойственными друг другу. Если в матрице правого типа обе строки заменить двойственными, то получим матрицу левого типа, и наоборот.

Вложение (1) в случае III будем характеризовать одной из двух представленных матриц в зависимости от того, какие тройки вдоль своих описанных окружностей следуют в порядке возрастания по часовой стрелке. Обозначим выбранную матрицу через B_{00} . Вершины прямоугольников $t+Q$ восстанавливаются по элементам B_{00} :

$$t+i+\{0, k, m, k+m\} = t+i+\{0, \tilde{m}-\tilde{k}, \tilde{m}, 2\tilde{m}-\tilde{k}\}.$$

Специально выделим четвёрку соседних вершин $B = \{0, k, m, k+m\}$. Если вложение (1) характеризуется матрицей правого (соответственно, левого) типа, то по периметру прямоугольника вершины B следуют по часовой стрелке в порядке $0, k, k+m, m$ (соответственно, $0, m, k+m, k$).

Какими именно являются подмножество B_0 или матрица B_{00} в зависимости от $i(1) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times T$, будет выявлено в последнем разделе 3.3, где приводится и доказывается соответствующая классификационная теорема. В следующем разделе 3.2 вводятся необходимые для формулировки теоремы понятия и обозначения, доказываются два вспомогательных предложения.

3.2. На рис. 1 представлена верхняя часть плоской развёртки нашего цилиндра $\mathbb{R} \times T$, на которой направляющая $[O, O_1] = [0, 1] = T$ и образующая прямая (линия разреза цилиндра) перпендикулярны. (Обозначения, использованные на рис. 1 и 2, вводятся ниже.) Данную часть развёртки цилиндра будем представлять точками верхней комплексной полуплоскости, расположенными над отрезком $[0, 1]$. В свою очередь, точки верхней комплекс-

ной полуплоскости считаем точками гиперболической плоскости (одной из моделей двумерной геометрии Лобачевского, см. [9, 10]).

Рис.1

Рис.2

Длины отрезков в гиперболической геометрии нам не потребуются, а угловая мера та же, что и в комплексной плоскости.

Бесконечная точка комплексной сферы, обозначаемая символом ∞ , и вещественные точки являются бесконечно удалёнными точками гиперболической плоскости. Бесконечно удалённые точки не входят в гиперболическую плоскость, но при конкретных построениях их приходится рассматривать.

Прямыми в гиперболической геометрии являются всевозможные полуокружности с центром на вещественной прямой и направленные вверх лучи — полупрямые, параллельные мнимой оси. Тем самым, вещественные точки вместе с бесконечностью оказываются как бы концами прямых гиперболической геометрии. Каждая пара различных точек «окружности» $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ однозначно задаёт гиперболическую прямую, она как бы соединяет эту пару точек.

Далее будут рассматриваться гиперболические прямые, соединяющие дроби рядов Фарея. Напомним (см., например, [11]), что первым рядом Фарея является $\mathcal{F}_1: \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$. Каждый следующий ряд Фарея получается из предыдущего вставкой между всеми парами соседних дробей

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ новой дроби, равной $\frac{a+c}{b+d}: \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Так,

$$\mathcal{F}_2: \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}; \mathcal{F}_3: \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}; \mathcal{F}_4: \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}.$$

Соединим каждую пару соседних несократимых правильных дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ в каждом ряду Фарея гиперболической прямой — сплошной дугой

окружности с центром на отрезке $[O, O_1]$, обозначаемой через $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ (см.

рис. 1). В результате образуются треугольники на гиперболической плоскости с бесконечно удалёнными вершинами. Треугольник, располагающийся непосредственно под дугой $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ обозначаем через $\widehat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$ (см.

рис. 2). Отметим, что на рис. 1 и 2 для таких треугольников используются более компактные обозначения $\widehat{\Delta}(k, m)$, где $k = d$, $m = b + d$. Их корректность обосновывается ниже, в начале п. 3.3.

Дугу $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}}$ будем называть *левой*, а дугу $\widehat{\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}}$ — *правой*.

Аналогично называем треугольники, находящиеся непосредственно под

этими дугами: треугольник $\hat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{2a+c}{2b+d}, \frac{a+c}{b+d}\right)$ — *левый*, треугольник

$\hat{\Delta}\left(\frac{a+c}{b+d}, \frac{a+2c}{b+2d}, \frac{c}{d}\right)$ — *правый*. К дуге $\widehat{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}}$ и к треугольнику $\hat{\Delta}\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$

эти названия не относятся. Дуга $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ является верхней для треугольника

$\hat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$. В частности, $\widehat{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}}$ является верхней дугой треугольника

$\hat{\Delta}\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$.

Треугольник над дугой $\widehat{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}}$ обозначаем через $\hat{\Delta}\left(\frac{1}{1}, \infty, \frac{0}{1}\right)$.

Каждая дуга $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ является стороной двух смежных треугольников:

нижнего с третьей вершиной $\frac{a+c}{b+d}$ и верхнего с третьей вершиной $\frac{c-a}{d-b}$

(если дуга $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ — левая) или $\frac{a-c}{b-d}$ (если дуга $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ — правая). Соединим

выделенную пару бесконечно удалённых вершин, противоположных сторо-

не $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$, пересекающей её дугой, называемой пока просто пунктирной. Так

они выделены на рис. 1 и 2. Для левой дуги $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ пунктирной дугой будет

$\widehat{\frac{a+c}{b+d}, \frac{c-a}{d-b}}$, а для правой дуги $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ — $\widehat{\frac{a-c}{b-d}, \frac{a+c}{b+d}}$.

При доказательстве двух приводимых ниже предложений будем пользоваться техникой, изложенной в последней лекции учебника [12].

Предложение 1. Левая дуга $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ пересекается с пунктирной дугой

$\widehat{\frac{a+c}{b+d}, \frac{c-a}{d-b}}$ под прямым углом. Аналогично, правая дуга $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ пересекается

со своей пунктирной дугой $\widehat{\frac{a-c}{b-d}, \frac{c+a}{d+b}}$ под прямым углом.

Доказательство. Ограничимся случаем пересечения левой дуги $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ со своей пунктирной дугой $\widehat{\frac{a+c}{b+d}, \frac{c-a}{d-b}}$. Конформное преобразование

$$w = \frac{z - \frac{a}{b}}{z - \frac{c}{d}} \cdot \frac{\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d}}{\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}}$$

переводит точки $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}$ соответственно в $0, \infty, 1$. Пользуясь равенством $bc - ad = 1$ для двух соседних дробей в ряду Фарея [11], убеждаемся, что при этом преобразовании $\frac{c-a}{d-b}$ переходит в -1 . Перпендикулярность гиперболических прямых $\widehat{0, \infty}$ и $\widehat{1, -1}$ очевидна. При конформных преобразованиях углы сохраняются, поэтому предложение 1 доказано.

Теперь пунктирную дугу, отвечающую дуге $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$, естественно называть общей высотой к стороне $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ в соответствующих смежных треугольниках.

Предложение 2. *Внутри каждого треугольника $\hat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$ три его высоты пересекаются в одной точке и образуют в ней углы по 60° .*

Доказательство. В треугольнике $\hat{\Delta}\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right) = \hat{\Delta}(1, 2)$ (см. рис. 1) высоты $\widehat{\frac{0}{1}, \frac{2}{3}}, \widehat{\frac{1}{2}, \infty}, \widehat{\frac{1}{3}, \frac{1}{1}}$ пересекаются в одной точке Q ; это следует из симметрии относительно полупрямой $\widehat{\frac{1}{2}, \infty}$. Пунктирная дуга $\widehat{\frac{0}{1}, \frac{2}{3}}$ имеет радиус $\frac{1}{3}$ и центр в точке $\frac{1}{3}$. В прямоугольном треугольнике (евклидовом) с вершинами $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, Q$ угол при вершине Q равен 30° , так как он лежит против катета, в два раза меньшего гипотенузы $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\right)$. Поэтому в точке Q дуга $\widehat{\frac{0}{1}, \frac{2}{3}}$ с лучом $\widehat{\frac{1}{2}, \infty}$ образуют угол в 60° . По симметрии дуга $\widehat{\frac{1}{3}, \frac{1}{1}}$ с лучом $\widehat{\frac{1}{2}, \infty}$ тоже образуют угол в 60° .

В общем случае ограничимся левыми треугольниками $\hat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$.

Тогда высотами в $\hat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$ (см. рис. 2) будут $\overline{\frac{a}{b}, \frac{a+2c}{b+2d}}, \overline{\frac{2a+c}{2b+d}, \frac{c}{d}},$
 $\overline{\frac{a+c}{b+d}, \frac{c-a}{d-b}}$. Конформное преобразование

$$w = \frac{z - \frac{a}{b}}{z - \frac{c-a}{d-b}} \cdot \frac{\frac{c}{d} - \frac{c-a}{d-b}}{\frac{c}{d} - \frac{a}{b}}$$

переводит точки $\frac{a}{b}, \frac{c-a}{d-b}, \frac{c}{d}$ соответственно в $0, \infty, 1$. Снова пользуясь равенством $bc - ad = 1$ для двух соседних дробей в ряду Фарея, убеждаемся в том, что при выписанном конформном преобразовании точки $\frac{2a+c}{2b+d}, \frac{a+c}{b+d},$
 $\frac{a+2c}{b+2d}$ переходят соответственно в $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. В результате общий случай свели к уже проверенному — к треугольнику $\hat{\Delta}\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$. Предложение 2 доказано.

3.3. В данном разделе одновременно имеем дело с гиперболической и евклидовой геометрией в верхней комплексной полуплоскости. Для гиперболических треугольников используется обозначение $\hat{\Delta}$, а для евклидовых — Δ . Гиперболическую прямую, в зависимости от контекста, называем также дугой или (если один из её концов направлен к точке ∞) полупрямой.

В формулируемой далее теореме утверждается реализуемость всех пяти случаев: $I_a, I_b, II_a, II_b, III$ для вложений (1), рассмотренных в п. 3.1. В частности, будет доказано, что если $\iota(1)$ — внутренняя точка в треугольнике $\hat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$, то имеет место случай II_b с $B_0 = (0, k, m)$, $0 < k < m$, $(k, m) = 1$,

$$\begin{aligned} k &= d, \\ m &= b + d, \end{aligned} \tag{2}$$

причём треугольник $\Delta(0, k, m)$ обязательно остроугольный.

Для соседних дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ в ряду Фарея $(b, d) = 1$ и, как уже неоднократно отмечалось,

$$bc - ad = 1, \quad (3)$$

при этом числители a, c однозначно определяются взаимно простыми знаменателями b, d [11]. С учётом этого обстоятельства далее в настоящем

разделе для треугольника $\widehat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$ и дуги $\widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$ будут использоваться

также более компактные обозначения $\widehat{\Delta}(k, m)$ и $\widehat{k, m} = \widehat{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}}$, от которых легко переходить к прежним обозначениям путём обращения равенств (2) —

$$\begin{aligned} d &= k, \\ b &= m - k, \end{aligned} \quad (4)$$

последующим довосстановлением числителей a, c из равенства (3).

В новых обозначениях удобно представляется структура смежности треугольников на рис. 1. Она задаётся двоичным деревом с корнем в виде

треугольника $\widehat{\Delta}(1, 2) = \widehat{\Delta}\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$, смежного ещё с треугольником

$\widehat{\Delta}\left(\frac{1}{1}, \infty, \frac{0}{1}\right)$. Локально структура этого дерева отвечает диаграммам

на рис. 3: при $k < \frac{m}{2}$ реализуется правый фрагмент (в этом случае треуголь-

ник $\widehat{\Delta}(k, m)$ и дуга $\widehat{k, m}$ являются правыми), а при $k > \frac{m}{2}$ реализуется левый

фрагмент (когда треугольник $\widehat{\Delta}(k, m)$ и дуга $\widehat{k, m}$ являются левыми).

Рис. 3

Используя представленное на рис. 3 правило построения двоичного дерева с корнем $(1,2)$ и вершинами в виде пар (k,m) , $0 < k < m$, $(k,m)=1$, нетрудно проверить, что в этом дереве каждая такая пара появляется по одному разу. Продвижение по этому дереву вверх происходит однозначно и неминуемо закончится парой $(1,2)$.

В доказываемой ниже теореме по значению $\iota(1)$ мономорфизма $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times T$ определяется тип соответствующего вложения и характеризующие его совокупности соседних вершин B_0 , B , которые были введены в п. 3.1.

Теорема. Пусть верхняя часть плоской развёртки цилиндра $\mathbb{R} \times T$ рассматривается как область гиперболической плоскости между двумя представляющими разрез цилиндра сближающимися на бесконечности параллельными полупрямыми $\widehat{0,\infty}$ и $\widehat{1,\infty}$, и пусть эта область разбита на треугольники гиперболическими прямыми, соединяющими соседние дроби в каждой последовательности Фарея. Тогда имеют место следующие утверждения.

а) Если $\iota(1) \in \widehat{0,\infty}$, то реализуется тип I_a вложения с $B_0 = \{0,1\}$.

б) Если $\iota(1)$ – внутренняя точка треугольника $\widehat{\Delta}\left(\frac{1}{1}, \infty, \frac{0}{1}\right)$, то реализуется тип I_b вложения с $B_0 = \{0,1\}$.

в) Если $\iota(1) \in \widehat{k,m}$, $0 < k < m$, $(k,m)=1$, то при $m > 2$ реализуется тип III вложения с $B = \{0,k,m-k,m\}$, причём вершины $0,k,m,m-k$ являются вершинами прямоугольника Q и следуют в данном порядке по часовой стрелке вокруг центра Q . При $m=2$ реализуется тип II_a вложения с $B_0 = \{0,1,2\}$; прямоугольник Q с диагоналями длины 1 целиком охватывает цилиндр, точкой сцепления является вершина 1, которая противоположна самой себе в прямоугольнике. Отношение сторон прямоугольника Q при $m \geq 2$ может быть любым положительным числом, оно однозначно задаёт положение $\iota(1)$ на дуге $\widehat{k,m}$; прямоугольник Q является квадратом, когда $\iota(1)$ – основание высоты треугольника $\widehat{\Delta}(k,m)$.

г) Если $\iota(1)$ – внутренняя точка треугольника $\widehat{\Delta}(k,m)$, $0 < k < m$, $(k,m)=1$, то реализуется тип II_b вложения с $B_0 = \{0,k,m\}$, при этом треугольник $\Delta(0,k,m)$ с вершинами $0,k,m$, следующими по часовой стрелке, является остроугольным; он равнобедренный, если $\iota(1)$ находится на одной из высот треугольника $\widehat{\Delta}(k,m)$; треугольник $\Delta(0,k,m)$ правильный, если $\iota(1)$ является точкой пересечения высот треугольника $\widehat{\Delta}(k,m)$.

д) При каждом $0 < k < m$, $(k, m) = 1$, является биекцией отображение из множества внутренних точек треугольника $\widehat{\Delta}(k, m)$ в множество внутренних точек треугольника $\Delta = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi/2, \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$, ставящее в соответствие точке $\iota(1) \in \widehat{\Delta}(k, m)$ тройку величин углов соответственно при вершинах $0, k, m$ треугольника $\Delta(0, k, m)$. При этой биекции точки высот треугольника $\widehat{\Delta}(k, m)$ переходят в точки высот треугольника Δ ; каждая из шести областей, на которые внутренность треугольника $\widehat{\Delta}(k, m)$ разбивается своими высотами, переходит в аналогичную область треугольника Δ , разбиваемого его высотами.

Прежде чем переходить к доказательству, чтобы определять тип вложения (1), когда $\iota(1)$ находится в нижней части цилиндра, заметим, что сформулированные в теореме утверждения останутся в силе, если вместо $\iota(1)$ рассматривать $\iota(-1) = -\iota(1)$. Это следует из того, что точка $\iota(1)$ получается из $\iota(-1)$, сохраняющим ориентацию поворотом на 180° вокруг середины отрезка $[O, O_1]$ на рис. 1. Заметим ещё, что из доказательства теоремы следует, что вложение типа III, реализуемое мономорфизмом (1) с $\iota(1)$ на левой (соответственно, правой) дуге $\widehat{k, m}$, общей для верхнего треугольника $\widehat{\Delta}(2k - m, k)$ (соответственно, $\widehat{\Delta}(k, m - k)$) и нижнего треугольника $\widehat{\Delta}(k, m)$, характеризуется введенной в п.3.1 матрицей $B_{00} = \begin{pmatrix} 2k - m, k \\ k, m \end{pmatrix}$ (соответственно, $B_{00} = \begin{pmatrix} k, m - k \\ k, m \end{pmatrix}$).

Доказательство теоремы начнём с наиболее типичной ситуации. Пусть $\iota(1)$ – внутренняя точка в треугольнике $\widehat{\Delta}(k, m)$. Для определённости считаем $\widehat{\Delta}(k, m) = \widehat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$ левым треугольником. Тогда $k > \frac{m}{2}$, что равносильно неравенству $d > b$. Значения d, b, c, a восстанавливаются по k и m с помощью формул (4) и (3).

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ решётку ранга два $\Gamma = \langle \iota(1), 1 + 0 \cdot i \rangle_{\mathbb{Z}}$, введенную в начале п. 3.1. В соответствии с описанным там представлением цилиндра $\mathbb{R} \times T$ он является фактор-пространством накрывающей плоскости $\mathbb{C}$ по подгруппе введенной решётки — $\Gamma_0 = \langle 1 + 0 \cdot i \rangle_{\mathbb{Z}}$, порождённой вещественной единицей в $\mathbb{C}$ (нулевое слагае-

мое $0 \cdot i$ призвано подчеркнуть это обстоятельство). Множество соседей B_0 будет определяться точками решётки Γ на границе максимального «пустого» круга, внутри которого нет точек решётки.

Когда $\iota(1)$ пробегает треугольник $\hat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$, точка $d\iota(1)$ пробегает треугольник $\hat{\Delta}\left(\frac{a}{b}d, \frac{a+c}{b+d}d, c\right)$, а точка $(b+d)\iota(1)$ — треугольник $\hat{\Delta}\left(\frac{a}{b}(b+d), a+c, \frac{c}{d}(b+d)\right)$. Для нас важны результаты построений на цилиндре $\mathbb{R} \times T = \mathbb{C} / \Gamma_0$, поэтому данные треугольники можно сдвигать параллельно вещественной оси на целое число — на элементы Γ_0 . Передвинем два последних треугольника так, чтобы c и $a+c$ перешли соответственно в нуль.

Результат этих передвижений представлен на рис. 4, где

$$\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}\left(\frac{-1}{b}, \frac{-1}{b+d}, 0\right) = d\widehat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right) - c,$$

$$\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Delta}\left(\frac{-1}{b}, 0, \frac{1}{d}\right) = (b+d)\widehat{\Delta}\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right) - a - c,$$

$P = d\iota(1) - c$, $Q = (b+d)\iota(1) - a - c$. Поскольку $\begin{vmatrix} d & -c \\ b+d & -a-c \end{vmatrix} = 1$, имеем

$$\langle P, Q \rangle_{\mathbb{Z}} = \Gamma.$$

Рис. 4

Если на рис. 4 точку $C = C\left(\frac{-1}{b}\right)$ считать центром гомотетии, то, как нетрудно заметить, треугольники $\widehat{\Delta}_1$ и $\widehat{\Delta}_2$ будут гомотетичны с коэффициентом гомотетии $\frac{b+d}{d}$. Более того, точка Q получается из P при том же коэффициенте гомотетии, поскольку $Q + \frac{1}{b} = \left(P + \frac{1}{b}\right) \frac{b+d}{d}$.

Согласно выявленной гомотетичности получаем параллельности — $QS \parallel PO$ и $PR \parallel QO$, откуда следует, что все углы треугольника Δ_{OPQ} острые. Углы $\angle OPR$, $\angle RPC$ — острые как внешние к окружностям и опирающиеся на их диаметры. Угол $\angle QPO$ острый, так как опирается на дуги $\widehat{CU}$ и $\widehat{VO}$, объединение которых не даёт целой полуокружности.

Коль скоро Δ_{OPQ} — остроугольный треугольник и $\langle P, Q \rangle_z = \Gamma$, то в круге с границей, содержащей точки O, P, Q , нет других вершин Γ . Таким образом, $B_0 = \{0, k, m\}$.

Первые утверждения пп. г) и д) теоремы теперь следуют из того, что внутренность треугольника $\widehat{\Delta}\left(\frac{-1}{b}, \frac{-1}{b+d}, 0\right)$ это в точности геометрическое место точек P , для которых углы $\angle OPR$ и $\angle RPC$ по отдельности острые, а их сумма — угол $\angle CPO$ — тупой. Точка P , с одной стороны, должна быть ниже дуги $\widehat{\frac{-1}{b}, 0}$ и в то же время не ниже обеих дуг $\widehat{\frac{-1}{b}, \frac{-1}{b+d}}$ и $\widehat{\frac{-1}{b+d}, 0}$.

Для доказательства основных утверждений п. в) теоремы достаточно на рис. 4 точку P взять на дуге $\widehat{\frac{-1}{b}, 0}$. Тогда Q будет на дуге $\widehat{\frac{-1}{b}, \frac{1}{d}}$. Остаётся заметить, что угол, опирающийся на диаметр, является прямым.

Ввиду очевидности пп. а) и б) теоремы остаётся показать, что если точка P находится на одной из высот треугольника $\widehat{\Delta}\left(\frac{-1}{b}, \frac{-1}{b+d}, 0\right)$, то треугольник Δ_{OPQ} — равнобедренный. Этим будут проверены оставшиеся утверждения пп. в), г) и д).

Рис. 5, 6 и 7 отвечают трём возможным высотам треугольника $\hat{\Delta}\left(\frac{-1}{b}, \frac{-1}{b+d}, 0\right)$.

На рис. 5 $QS \parallel TO \parallel PR$ как перпендикуляры к одной прямой CQ . Далее, $OR = OS$, поэтому $PT = TQ$ и $OP = OQ$.

Рис.5

На рис. 6 $RP \parallel KQ$, $PO \parallel QS$, поэтому $PO \perp KQ$. Но точка K — центр дуги $\widehat{RO}$, поэтому $PT = TO$ и $QP = OQ$.

Рис.6

На рис. 7 $UP \parallel OQ$, $PS \parallel QR$, поэтому $OQ \perp PS$. Здесь точка S — центр дуги $\widehat{RO}$, поэтому $QT = TO$ и $OP = PQ$.

Рис.7

Теорема полностью доказана.

Автор признателен А.М. Зубкову за полезную критику.

Список литературы

1. Малышев Ф. М. Порождающие наборы элементов рекуррентных последовательностей // Труды по дискретной математике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — Т. 11. — С. 86–111.
2. Малышев Ф. М. Базисы множества целых чисел относительно многоместных операций сдвига // Математические вопросы криптографии. — 2011. — Т. 2. Вып. 1. — С. 29–73.
3. Рышков С. С., Барановский Е. П. Классические методы теории решётчатых упаковок // Успехи математических наук. — 1979. — Т. 34. № 4 (208). — С. 3–63.
4. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1965.
5. Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965.
6. Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНТИ, 1988. — Т. 29. — С. 147–264.
7. Никулин В. В., Шафаревич И. Р. Геометрии и группы. — М.: Наука, 1973.
8. Делоне Б. Н., Сандакова Н. Н. Теория стередров // Труды МИАН СССР им. В.А. Стеклова. — 1961. — Т. 64. — С. 28–51.

-
9. Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы. — М.: Наука, 1988.
 10. Постников М. М. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1973.
 11. Гашков С. Б., Чубариков В. Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. Популярное введение в теорию чисел и арифметическую теорию сложности. — М.: Наука, 1996.
 12. Постников М. М. Лекции по геометрии: семестр I. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1979.