Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Шойтов, Структурно эквивалентные цепочки в равновероятной полиномиальной схеме, *Матем. вопр. криптогр.*, 2012, том 3, выпуск 3, 129–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk64>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:51:57

Структурно эквивалентные цепочки в равновероятной полиномиальной схеме

А. М. Шойтов

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 20.V.2011

Для последовательности $X_1, \dots, X_n$ независимых случайных величин, имеющих равновероятное распределение на множестве $\{1, \dots, N\}$, получено описание предельных дискретных распределений чисел наборов из k структурно эквивалентных s -цепочек при $N, n, s \rightarrow \infty$, $sN^{-1} \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, $n(N)_s N^{-s} \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ и произвольном $k \geq 2$. Доказательства используют метод Чена – Стейна.

Ключевые слова: последовательности независимых испытаний, равновероятная полиномиальная схема, структурно эквивалентные цепочки, метод Чена – Стейна

Structurally equivalent tuples in the equiprobable polynomial scheme

A. M. Shoitov

Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow

Abstract. Let $X_1, \dots, X_n$ be a sequence of independent random variables with the uniform distribution on the set $\{1, \dots, N\}$. We describe limit discrete distributions of the number of k -element sets consisting of structurally equivalent s -tuples for $N, n, s \rightarrow \infty$, $sN^{-1} \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, $n(N)_s N^{-s} \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ and arbitrary $k \geq 2$. The proofs are based on the Chen – Stein method.

Key words: sequences of independent trials, equiprobable polynomial scheme, structurally equivalent s -tuples, Chen – Stein method

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2012, vol. 3, no. 3, pp. 129–151 (Russian).

§ 1. Введение и основные обозначения

Для произвольного натурального s две цепочки $(a_1, \dots, a_s)$ и $(b_1, \dots, b_s)$ символов алфавита $A = \{1, \dots, N\}$ называются структурно эквивалентными (см. [6]) $((a_1, \dots, a_s)S_N(b_1, \dots, b_s))$, если существует такая подстановка h на множестве символов алфавита A , при которой

$$b_i = h(a_i), \quad i = 1, \dots, s.$$

Под структурой цепочки понимается расположение пар одинаковых и разных символов в ней. Другими словами, две цепочки $(a_1, \dots, a_s)$ и $(b_1, \dots, b_s)$ обладают одинаковой структурой (пишут $S((a_1, \dots, a_s)) = S((b_1, \dots, b_s))$) тогда и только тогда, когда

$$a_i = a_j \iff b_i = b_j, \quad 1 \leq i < j \leq s.$$

Очевидно, что структурно эквивалентными являются цепочки с одинаковой структурой и только они. Отметим, что отношение структурной эквивалентности является частным случаем **H**-эквивалентности (см. монографию [1]).

Структурная эквивалентность цепочек является одним из интересных с точки зрения криптографических приложений видов зависимости. Наличие в псевдослучайной последовательности повышенного числа цепочек с одинаковой структурой снижает ее криптографическое качество. В связи с этим представляется актуальной задача изучения предельных распределений случайных величин, характеризующих структурную эквивалентность цепочек в случайных последовательностях.

Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n, \dots\}$ — случайная последовательность, полученная по равновероятной полиномиальной схеме испытаний с исходами в множестве $A = \{1, \dots, N\}$. Положим $Y_i(s) = (X_i, \dots, X_{i+s-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$, и для произвольного натурального k , $k \geq 2$, определим случайные величины

$$\xi_{n,k} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{I} \left\{ S(Y_{i_1}(s)) = S(Y_{i_2}(s)) = \dots = S(Y_{i_k}(s)) \right\},$$

равные числу наборов из k структурно эквивалентных s -цепочек в отрезке последовательности $\mathbf{X}$ длины $n + s - 1$. Асимптотическое поведение случайных величин $\xi_{n,k}$ будем исследовать в схеме серий при $n \rightarrow \infty$, для которой параметры s и N могут меняться, а параметр k фиксирован. Кроме того, вместо $\xi_{n,2}$ будем также писать ξ_n .

Достаточные условия сходимости распределения случайной величины ξ_n к закону Пуассона в равновероятной схеме впервые были получены С. М. Буравлевым в работе [2]. Было предпринято немало попыток обобщения результатов работы [2] и ослабления соответствующих достаточных условий (см. [4, 6, 8]). Наилучшие достаточные условия сходимости распределения случайной величины ξ_n к закону Пуассона в равновероятной схеме найдены в работе [9]. В ней была доказана следующая теорема.

Теорема 1 ([9]). Если при $n \rightarrow \infty$ параметры N, s стремятся к бесконечности так, что $\mathbf{E}\xi_n \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, и для некоторого числа ϵ , $0 < \epsilon < 1$, при достаточно больших n выполнено условие

$$sN^{-1} \geq 1 - s^{-\epsilon}, \quad (1)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [2] для сходимости распределения ξ_n к закону Пуассона требуется выполнение условия $sN^{-1} \geq \ln N + 1$, при котором с вероятностью, стремящейся к 1, в $Y_1(s), \dots, Y_n(s)$ отсутствуют s -цепочки, содержащие не все символы алфавита A . При условии $sN^{-1} - \frac{1}{4} \ln N \rightarrow \infty$ работы [4] в $Y_1(s), \dots, Y_n(s)$ с отделенной от 0 вероятностью существуют s -цепочки, не содержащие отдельных знаков. В свою очередь, при условии (1) в $Y_1(s), \dots, Y_n(s)$ с отделенной от 0 вероятностью существуют s -цепочки, которые не содержат долю знаков алфавита A , пропорциональную его мощности N .

Из теоремы 2, доказываемой ниже, следует, что условие (1) близко к необходимому условию для сходимости ξ_n к закону Пуассона в следующем смысле. Если при $n \rightarrow \infty$ параметры N, s меняются так, что $s, N \rightarrow \infty$ и выполнены условия

$$sN^{-1} \rightarrow \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2)$$

$$n(N)_s N^{-s} \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (3)$$

то распределение случайной величины ξ_n сходится к свертке двух дискретных распределений пуассоновского типа.

В настоящей работе дано описание асимптотического поведения случайных величин $\xi_{n,k}$ в равновероятной схеме при выполнении условий (2) и (3) для произвольного фиксированного натурального k , $k \geq 2$. Для

доказательства используется функциональная версия метода Чена–Стейна (см. [10]), которая, по мнению автора, в настоящее время является одним из мощных инструментов доказательства предельных теорем пуассоновского типа в задачах вероятностной комбинаторики.

§ 2. Основные результаты

Обозначим через ξ и η две независимые случайные величины, распределенные по сложному закону Пуассона каждая с производящими функциями

$$\mathbf{E}z^\xi = \exp \left\{ \frac{\lambda_1(z-1)}{1-(1-\alpha)^2 z} \right\}, \quad \lambda_1 = \alpha(2-\alpha) \frac{\lambda^2}{2} \left(e^{\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}} - 1 \right), \quad (4)$$

$$\mathbf{E}z^\eta = \exp \left\{ \frac{\lambda_2(z-1)}{1-(1-\alpha)z} \right\}, \quad \lambda_2 = \alpha\lambda. \quad (5)$$

Через $\mathcal{L}(Z)$ обозначим распределение случайной величины Z .

Теорема 2. Пусть при $n \rightarrow \infty$ параметры N, s меняются так, что $s, N \rightarrow \infty$ и выполнены условия (2) и (3). Тогда:

$$a) \mathcal{L}(\xi_n) \rightarrow \mathcal{L}(\xi + C_\eta^2);$$

$$б) \mathcal{L}(\xi_{n,k}) \rightarrow \mathcal{L}(C_\eta^k), \quad k \geq 3.$$

Формулировка п. а) теоремы 2, анонсированная автором в [9], содержала опечатку.

Пусть $\mu(a)$ — число различных символов в цепочке a , $a \in A^r$, $r = 1, 2, \dots$. Определим случайные величины:

$$\eta_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{I} \left\{ \mu(Y_i(s)) = s \right\},$$

$$\xi_{n,k}^{(1)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{I} \left\{ S(Y_{i_1}(s)) = S(Y_{i_2}(s)) = \dots = S(Y_{i_k}(s)), \mu(Y_{i_1}(s)) < s \right\},$$

$$\xi_{n,k}^{(0)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{I} \left\{ S(Y_{i_1}(s)) = S(Y_{i_2}(s)) = \dots = S(Y_{i_k}(s)), \mu(Y_{i_1}(s)) = s \right\}.$$

По определению положим $\xi_n^{(i)} = \xi_{n,2}^{(i)}$, $i = 0, 1$.

Теорема 3. Пусть при $n \rightarrow \infty$ параметры N, s меняются так, что $s, N \rightarrow \infty$ и выполнены условия (2) и (3). Тогда:

- а) $\mathcal{L}((\xi_n^{(1)}, \eta_n)) \rightarrow \mathcal{L}((\xi, \eta))$;
 б) $\xi_{n,k}^{(1)} \rightarrow 0$ по вероятности, $k \geq 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ясно, что при $k \geq 2$

$$\xi_{n,k} = \xi_{n,k}^{(0)} + \xi_{n,k}^{(1)}.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\left\{ S(Y_{i_1}(s)) = \dots = S(Y_{i_k}(s)), \mu(Y_{i_1}(s)) = s \right\} = \left\{ \mu(Y_{i_r}(s)) = s, r = 1, \dots, k \right\},$$

следовательно, $\xi_{n,k}^{(0)} = C_{\eta_n}^k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теоремы 3 следует теорема 2. Также при условиях этих теорем имеют место соотношения

$$\mathcal{L}(\xi_n^{(1)}) \rightarrow \mathcal{L}(\xi), \quad \mathcal{L}(\eta_n) \rightarrow \mathcal{L}(\eta).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Нетрудно проверить, что при $s = o(N)$ в случае ограниченного математического ожидания случайной величины ξ_n ее дисперсия стремится к бесконечности и $E\xi_n^{(1)} = o(E\xi_n^{(0)})$. В этом случае оценки вероятности $\mathbf{P}\{\xi_n^{(1)} > 0\}$ удалось получить В.Г. Михайлову в статье [5].

§ 3. Доказательства

В доказательствах для оценки точности пуассоновской аппроксимации распределения сумм зависимых индикаторов используется функциональный вариант метода Чена–Стейна (см. теорему 10.A в [10]).

С учетом замечания 2 доказательство разобьем на три части.

Сначала построим более просто исследуемые случайные величины $\hat{\eta}_n$ и $\hat{\xi}_n^{(12)}$, для которых при $n \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\hat{\eta}_n \neq \eta_n\} &= o(1), \\ \mathbf{P}\{\hat{\xi}_n^{(12)} \neq \xi_n^{(1)}\} &= o(1). \end{aligned}$$

Затем докажем, что случайные величины $\hat{\eta}_n$ и $\hat{\xi}_n^{(12)}$ асимптотически независимы и сходятся к случайным величинам η и ξ соответственно; отсюда будут следовать утверждения пп. а) теорем 2 и 3.

И, наконец, докажем пп. б) теорем 2 и 3.

1. С учетом (2) и (3) нетрудно видеть, что при $n \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\eta_n &= n(N)_s N^{-s} \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \\ \mathbf{E}\xi_n^{(0)} &= \sum_{r=1}^{s-1} (n-r)(N)_s (N-s+r)_r N^{-s-r} + C_{n-s+1}^2 ((N)_s N^{-s})^2 = \\ &= \left(\lambda(\alpha^{-1} - 1) + \frac{\lambda^2}{2} \right) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (6)$$

из которых, в частности, следует, что

$$N^r = o(n) \quad (7)$$

для любого фиксированного натурального r .

Для натурального i , $N \leq i \leq n - N$, определим события:

$$\begin{aligned} A_i^{(1)} &= \left\{ \exists i_1, i_2, \quad i - [N^{1/3}] \leq i_1 \leq i - 1, \right. \\ &\quad \left. i + s - [N^{1/3}] \leq i_2 \leq i + s - 1 : X_{i_1} = X_{i_2} \right\}, \\ A_i^{(2)} &= \left\{ \exists i_1, i_2, \quad i \leq i_1 \leq i + [N^{1/3}] - 1, \right. \\ &\quad \left. i + s \leq i_2 \leq i + s + [N^{1/3}] - 1 : X_{i_1} = X_{i_2} \right\}, \\ B_i^{(1)} &= \left\{ \exists j_1, j_2, \quad i - [N^{1/3}] \leq j_1 < j_2 \leq i - 1 : X_{j_1} = X_{j_2} \right\}, \\ B_i^{(2)} &= \left\{ \exists j_1, j_2, \quad i + s \leq j_1 < j_2 \leq i + s + [N^{1/3}] - 1 : X_{j_1} = X_{j_2} \right\}, \\ C_i &= \left\{ \exists l_1, l_2, \quad i - [N^{1/3}] \leq l_1 \leq i - 1 < l_2 \leq i + [s/2] - 1 : X_{l_1} = X_{l_2} \right\}, \\ D_i &= \left\{ \mu(Y_{i-[s/2]}([s/2])) = [s/2] \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим семейство случайных индикаторов:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \left\{ \gamma_{i,r}^{(0)} : i = N + 1, \dots, n - N, r = 1, \dots, [N^{1/3}] \right\}, \\ \gamma_{i,r}^{(0)} &= \mathbf{I} \left\{ \theta_{i-1} = 0, \theta_i = \theta_{i+1} = \dots = \theta_{i+r-1} = 1, \theta_{i+r} = 0 \right\}, \\ \theta_i &= \mathbf{I} \left\{ \mu(Y_i(s)) = s, \overline{A}_i^{(1)}, \overline{A}_i^{(2)}, \overline{B}_i^{(1)}, \overline{B}_i^{(2)}, C_i, \overline{D}_i \right\}, \quad i = N, \dots, n - N. \end{aligned}$$

Определим случайную величину:

$$\widehat{\eta}_n = \sum_{r=1}^{[N^{1/3}]} \sum_{i=N+1}^{n-N} r \gamma_{i,r}^{(0)}.$$

Из определения случайных величин θ_i , $i = N, \dots, n - N$, следует, что условие $\theta_i = \theta_{i+1} = \theta_{i+r-1} = 1$ в определении $\gamma_{i,r}^{(0)}$ влечет за собой равенство

$$\mu(Y_i(s+r-1)) = s+r-1. \quad (8)$$

Лемма 1. В условиях теорем 2 и 3 справедлива оценка

$$\mathbf{P}\{\widehat{\eta}_n \neq \eta_n\} = o(1).$$

Определим случайную величину

$$\widetilde{\eta}_n = \sum_{i=N}^{n-N} \theta_i.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\mu(Y_i(s)) = s, A_i^{(j)}\} \leq (N)_s N^{-s} \left(1 - \left(\frac{N - [N^{1/3}]}{N}\right)^{[N^{1/3}]}\right), \quad j = 1, 2,$$

$$\mathbf{P}\{\mu(Y_i(s)) = s, B_i^{(j)}\} \leq (N)_s N^{-s} \left(1 - (N)_{[N^{1/3}]} N^{-[N^{1/3}]}\right), \quad j = 1, 2,$$

$$\mathbf{P}\{\mu(Y_i(s)) = s, \overline{C}_i\} \leq (N)_s N^{-s} \left(\frac{[s/2]}{N}\right)^{[N^{1/3}]},$$

$$\mathbf{P}\{\mu(Y_i(s)) = s, D_i\} \leq (N)_s N^{-s} (N)_{[s/2]} N^{-[s/2]}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_n \neq \widetilde{\eta}_n\} &\leq \mathbf{E}\eta_n - \mathbf{E}\widetilde{\eta}_n \leq \sum_{i=1}^N \mathbf{I}\{\mu(Y_i(s)) = s\} + \sum_{i=n-N}^n \mathbf{I}\{\mu(Y_i(s)) = s\} + \\ &+ \sum_{i=N}^{n-N} \mathbf{P}\{\mu(Y_i(s)) = s, A_i^{(1)}\} + \sum_{i=N}^{n-N} \mathbf{P}\{\mu(Y_i(s)) = s, A_i^{(2)}\} + \\ &+ \sum_{i=N}^{n-N} \mathbf{P}\{\mu(Y_i(s)) = s, B_i^{(1)}\} + \sum_{i=N}^{n-N} \mathbf{P}\{\mu(Y_i(s)) = s, B_i^{(2)}\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=N}^{n-N} \mathbf{P}\left\{\mu(Y_i(s)) = s, \overline{C}_i\right\} + \sum_{i=N}^{n-N} \mathbf{P}\left\{\mu(Y_i(s)) = s, D_i\right\} \leq \\
& \leq 2N(N)_s N^{-s} + n(N)_s N^{-s} \left(2 \left(1 - \left(\frac{N - [N^{1/3}]}{N}\right)^{[N^{1/3}]}\right) + \right. \\
& \left. + 2 \left(1 - (N)_{[N^{1/3}]} N^{-[N^{1/3}]}\right) + \left(\frac{[s/2]}{N}\right)^{[N^{1/3}]} + \left((N)_{[s/2]} N^{-[s/2]}\right)\right) = o(1).
\end{aligned}$$

Следовательно, предельные распределения η_n и $\tilde{\eta}_n$ совпадают.

Далее, из определений $\hat{\eta}_n$ и $\tilde{\eta}_n$ следует, что $\hat{\eta}_n \leq \tilde{\eta}_n$. Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{E}\hat{\eta}_n = n(N)_s N^{-s} (1 + o(1)),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\{\hat{\eta}_n \neq \tilde{\eta}_n\} \leq \mathbf{E}\tilde{\eta}_n - \mathbf{E}\hat{\eta}_n = o(1).$$

Лемма 1 доказана.

Перейдем к изучению асимптотического поведения случайной величины $\xi_n^{(1)}$. Положим

$$\begin{aligned}
\xi_n^{(12)} &= \sum_{1 \leq i_1 < i_1+s \leq i_2 \leq n} \mathbf{I}\left\{S(Y_{i_1}(s)) = S(Y_{i_2}(s)), \mu(Y_{i_2}(s)) < s\right\}, \\
\xi_n^{(13)} &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n, i_2-i_1 \leq s-1} \mathbf{I}\left\{S(Y_{i_1}(s)) = S(Y_{i_2}(s)), \mu(Y_{i_2}(s)) < s\right\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\xi_n^{(1)} = \xi_n^{(12)} + \xi_n^{(13)}.$$

С учетом доказательства теоремы 3 статьи [9] нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\xi_n^{(12)} &= C_n^2 N^{-2s} \sum_{m=1}^{s-1} \sigma(s, m) ((N)_m)^2 (1 + o(1)), \\
\mathbf{E}\xi_n^{(13)} &= \sum_{r=1}^{s-1} (n-r) \mathbf{P}\left\{S(Y_1(s)) = S(Y_{1+r}(s)), \mu(Y_1(s)) < s\right\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Лемма 2. В условиях теорем 2 и 3 справедлива оценка

$$\mathbf{E}\xi_n^{(13)} = o(1). \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим r -е слагаемое в выражении (9) для $E\xi_n^{(13)}$. Фиксируем произвольно символы цепочки $Y_1(r)$. Символ X_{1+r} можно выбрать не более чем N вариантами. Из структурной эквивалентности цепочек $Y_1(s)$ и $Y_{1+r}(s)$ следует, что если $X_1 = X_2$, то $X_{2+r} = X_{1+r}$, в противном случае имеем для X_{2+r} ровно $N - 1$ возможных вариантов, и т.д. Последовательно определяя все символы цепочки $Y_{1+r}(s)$, убеждаемся в том, что количество таких цепочек не превосходит величины $(N)_{q(\mu(Y_1(r)))}$, где

$$q(\mu(Y_1(r))) = \min\left\{s - 1, s - (r - \mu(Y_1(r)))\right\},$$

следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{S(Y_1(s)) = S(Y_{1+r}(s)), \mu(Y_1(s)) < s \mid \mu(Y_1(r)) = \mu\right\} \leq (N)_{q(\mu)} N^{-s}. \quad (11)$$

Далее:

$$\begin{aligned} E\xi_n^{(13)} &= \sum_{r=1}^{[s^{2/3}]} (n-r) \mathbf{P}\left\{S(Y_1(s)) = S(Y_{1+r}(s)), \mu(Y_1(s)) < s\right\} + \\ &+ \sum_{r=[s^{2/3}]+1}^{s-1} (n-r) \mathbf{P}\left\{S(Y_1(s)) = S(Y_{1+r}(s)), \mu(Y_1(s)) < s \mid \mu(Y_1(r)) \leq r-2\right\} \times \\ &\quad \times \mathbf{P}\{\mu(Y_1(r)) \leq r-2\} + \\ &+ \sum_{r=[s^{2/3}]+1}^{s-1} (n-r) \mathbf{P}\left\{S(Y_1(s)) = S(Y_{1+r}(s)), \mu(Y_1(s)) < s \mid \mu(Y_1(r)) \geq r-1\right\} \times \\ &\quad \times \mathbf{P}\{\mu(Y_1(r)) \geq r-1\}. \end{aligned}$$

С учетом оценок (2), (3), (7) и неравенства (11) получаем оценки:

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{[s^{2/3}]} (n-r) \mathbf{P}\left\{S(Y_1(s)) = S(Y_{1+r}(s)), \mu(Y_1(s)) < s\right\} \leq \\ &\leq n \sum_{r=1}^{[s^{2/3}]} (N)_{s-1} N^{-s} \leq ns^{2/3} (N)_{s-1} N^{-s} = O(s^{-\frac{1}{3}}), \\ &\sum_{r=[s^{2/3}]+1}^{s-1} (n-r) \mathbf{P}\left\{S(Y_1(s)) = S(Y_{1+r}(s)), \mu(Y_1(s)) < s \mid \mu(Y_1(r)) \leq r-2\right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{P}\{\mu(Y_1(r)) \leq r-2\} \leq \\
& \leq n \sum_{r=[s^{2/3}]+1}^{s-1} (N)_{s-2} N^{-s} \mathbf{P}\{\mu(Y_1(r)) \leq r-2\} \leq ns(N)_{s-2} N^{-s} = O(s^{-1}), \\
& \sum_{r=[s^{2/3}]+1}^{s-1} (n-r) \mathbf{P}\left\{S(Y_1(s)) = S(Y_{1+r}(s)), \mu(Y_1(s)) < s | \mu(Y_1(r)) \geq r-1\right\} \times \\
& \quad \times \mathbf{P}\{\mu(Y_1(r)) \geq r-1\} \leq \\
& \leq n \sum_{r=[s^{2/3}]+1}^{s-1} (N)_{s-1} N^{-s} \mathbf{P}\{\mu(Y_1(r)) \geq r-1\} = O(s^{4/3} e^{-\frac{1}{2}s^{-1/3}}).
\end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что случайную величину $\xi_n^{(13)}$ можно исключить из рассмотрения.

Далее исследуем асимптотическое поведение случайной величины $\xi_n^{(12)}$.

Лемма 3. В условиях теорем 2 и 3 справедлива оценка

$$\mathbf{E}\xi_n^{(12)} = \frac{1}{2} \lambda^2 \left(e^{\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}} - 1 \right) (1 + o(1)). \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ — такая последовательность натуральных чисел, что $t_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда из оценки (9) следует, что

$$\mathbf{E}\xi_n^{(12)} = C_n^2 N^{-2s} \left(\sum_{m=1}^{s-t_n} \sigma(s, m) ((N)_m)^2 + \sum_{m=s-t_n+1}^{s-1} \sigma(s, m) ((N)_m)^2 \right) (1 + o(1)).$$

Далее, из известного неравенства

$$\sigma(s, m-1) \leq \sigma(s, m) \frac{C_m^2}{s-m+1}, \quad 2 \leq m \leq s,$$

следует, что для $1 \leq t \leq s-1$

$$\begin{aligned}
& \sigma(s, s-t) ((N)_{s-t})^2 \left(\sigma(s, s-t+1) ((N)_{s-t+1})^2 \right)^{-1} \leq \\
& \leq \frac{C_{s-t+1}^2}{t(N-s+t)^2} < \frac{s^2}{2t(N-s)^2}.
\end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$C_n^2 N^{-2s} \sum_{m=1}^{s-t_n} \sigma(s, m) ((N)_m)^2 \rightarrow 0. \quad (14)$$

Далее,

$$C_n^2 N^{-2s} \sum_{m=s-t_n+1}^{s-1} \sigma(s, m) ((N)_m)^2 = C_n^2 N^{-2s} \sum_{t=1}^{t_n-1} \sigma(s, s-t) ((N)_{s-t})^2.$$

Из замечания к теореме 1 работы [3] следует, что при $s \rightarrow \infty$ и $t = o(s^{1/2})$ справедлива оценка

$$\sigma(s, s-t) = C_s^t \left(\frac{s-t}{2} \right)^t \left(1 + O(ts^{-1/2}) \right), \quad (15)$$

из которой с учетом формулы Стирлинга вытекает, что

$$\begin{aligned} & N^{-2s} \sigma(s, s-t) ((N)_{s-t})^2 = \\ & = N^{-2s} ((N)_s)^2 C_s^t \left(\frac{s-t}{2} \right)^t \left(\frac{(N-s)!}{(N-s+t)!} \right)^2 \left(1 + O(ts^{-1/2}) \right) = \\ & = N^{-2s} ((N)_s)^2 \left(\frac{s^2}{2(N-s)^2} \right)^t \frac{1}{t!} \left(1 + O(ts^{-1/2}) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Из того, что ряд $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{q^t}{t!}$ сходится для любого действительного q , и из оценок (13), (15) и (16) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \xi_n^{(12)} &= \frac{1}{2} \lambda^2 (1 + o(1)) \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{s^2}{2(N-s)^2} \right)^t \frac{1}{t!} = \\ &= \frac{1}{2} \lambda^2 \left(e^{\frac{s^2}{2(N-s)^2}} - 1 \right) (1 + o(1)) = \frac{1}{2} \lambda^2 \left(e^{\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}} - 1 \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Из (12) и (6) также вытекает оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < i_1+s \leq i_2 \leq n} \mathbf{P} \left\{ S(Y_{i_1}(s)) = S(Y_{i_2}(s)) \right\} &= \frac{1}{2} \lambda^2 e^{\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}} (1 + o(1)), \\ \mathbf{E} \xi_n &= \left(\frac{1}{2} \lambda^2 e^{\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}} + \lambda(\alpha^{-1} - 1) \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Кроме того, из (14) следует, что число совпадающих символов для пары неперекрывающихся структурно эквивалентных цепочек ограничено по вероятности.

Пусть $\{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ и $\{T_1, \dots, T_n, \dots\}$ — две такие неубывающие последовательности натуральных чисел, что $T_n t_n = o(s)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда из (15) несложно выводится, что равномерно по $t < t_n$

$$\begin{aligned} & \sigma(s, s-t)((N)_{s-t})^2 = \\ & = \sigma(s-T_n, s-T_n-t)((N)_{s-T_n-t})^2((N-s+T_n+t)_{T_n})^2(1+O(T_n t_n s^{-1})). \end{aligned}$$

Следовательно, для двух неперекрывающихся структурно эквивалентных цепочек вероятность того, что на заданном отрезке цепочки длины $o(s)$ не содержится одинаковых символов и среди остальных символов цепочки не встретилось символов, лежащих на этом отрезке, стремится к единице.

Далее положим $T_n = [s^{5/6}]$, $t_n = [s^{1/7}]$, для натурального i , $1 \leq i \leq n$, определим события:

$$\begin{aligned} F_i &= \left\{ \exists j_1, j_2, i \leq j_1 \leq i+s-T_n < j_2 \leq i+s-1 : X_{j_1} = X_{j_2} \right\}, \\ G_i &= \left\{ \exists j_1, j_2, i+s-T_n \leq j_1 < j_2 \leq i+s-1 : X_{j_1} = X_{j_2} \right\}, \\ H_i &= \left\{ \exists j_1, j_2, i \leq j_1 < j_2 \leq i+T_n-1 : X_{j_1} = X_{j_2} \right\}, \end{aligned}$$

и для $N \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n-N$ рассмотрим семейство случайных индикаторов

$$\begin{aligned} \vartheta_{i_1, i_2} &= \mathbf{I} \left\{ S(Y_{i_1}(s)) = S(Y_{i_2}(s)), s-t_n \leq \mu(Y_{i_2}(s)) \leq s-1, \right. \\ & \quad \left. \overline{A}_{i_2}^{(1)}, \overline{A}_{i_2}^{(2)}, \overline{B}_{i_2}^{(1)}, \overline{B}_{i_2}^{(2)}, \overline{F}_{i_2}, \overline{G}_{i_2}, \overline{H}_{i_2} \right\}, \end{aligned}$$

где события $A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, B_i^{(1)}, B_i^{(2)}, N \leq i \leq n-N$, определены перед леммой 1.

Рассмотрим семейство случайных индикаторов

$$\Gamma_1 = \left\{ \gamma_{i_1, i_2, q}^{(1)} : N+1 \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n-N, q = 1, \dots, [N^{1/3}] \right\},$$

где

$$\begin{aligned} & \gamma_{i_1, i_2, q}^{(1)} = \\ & = \mathbf{I} \left\{ \vartheta_{i_1, i_2} = \vartheta_{i_1+1, i_2+1} = \dots = \vartheta_{i_1+q-1, i_2+q-1} = 1, \vartheta_{i_1-1, i_2-1} = \vartheta_{i_1+q, i_2+q} = 0 \right\}, \end{aligned}$$

и определим случайную величину

$$\widehat{\xi}_n^{(12)} = \sum_{q=1}^{[N^{1/3}]} \sum_{N \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n-N} q \gamma_{i_1, i_2, q}^{(1)}.$$

Лемма 4. В условиях теорем 2 и 3 справедлива оценка

$$\mathbf{P}\{\widehat{\xi}_n^{(12)} \neq \xi_n^{(12)}\} = o(1).$$

Доказательство. Определим случайные величины

$$\widetilde{\xi}_n^{(12)} = \sum_{N \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n-N} \vartheta_{i_1, i_2}.$$

По аналогии с оценкой для величины $\mathbf{E}\eta_n - \mathbf{E}\widetilde{\eta}_n$, полученной в лемме 1, доказывается оценка

$$\mathbf{E}\xi_n^{(12)} - \mathbf{E}\widetilde{\xi}_n^{(12)} = o(1).$$

Из определения случайных величин ϑ_{i_1, i_2} следует, что условие $\vartheta_{i_1, i_2} = 1$ в определении $\gamma_{i_1, i_2, q}^{(1)}$ влечет за собой условие

$$\mu(Y_i(s+r-1)) = \mu(Y_{i+r-1}(s)) + r - 1 = \mu(Y_i(s)) + r - 1.$$

Далее, из определений случайных величин $\widehat{\xi}_n^{(12)}$ и $\widetilde{\xi}_n^{(12)}$ следует, что $\widehat{\xi}_n^{(12)} \leq \widetilde{\xi}_n^{(12)}$. Кроме того, равномерно по $q = 1, \dots, [N^{1/3}]$ и по $N \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n - N$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\gamma_{i_1, i_2, q}^{(1)} &= N^{-2(s+r+1)} (1 + o(1)) \sum_{t=1}^{t_n} \sigma(s-q, s-q-t) ((N)_{s-q-t})^2 \times \\ &\quad \times ((N-s+q+t)_{2q})^2 (N^2 - (N-s-q+t)^2)^2 = \\ &= ((1-\alpha)^2)^{-(q-1)} (1 - (1-\alpha)^2)^2 (1 + o(1)) \sum_{m=s-t_n}^{s-1} \sigma(s, m) ((N)_m)^2, \end{aligned}$$

следовательно, с учетом леммы 3, справедлива оценка.

$$\mathbf{E}\widehat{\xi}_n^{(12)} = \mathbf{E}\xi_n^{(12)} (1 + o(1)).$$

Лемма 4 доказана.

2. Докажем пп. а) теорем 2 и 3. Воспользуемся теоремой 10.А книги [10]. Рассмотрим семейство случайных индикаторов $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и семейство $\Gamma' = \Gamma'_0 \cup \Gamma'_1$, которое состоит из независимых в совокупности пуассоновских случайных величин $g_{i,r}^{(0)}, g_{i_1,i_2,q}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}\Gamma'_0 &= \left\{ g_{i,r}^{(0)} : i = N+1, \dots, n-N, r = 1, \dots, [N^{1/3}] \right\}, \\ \Gamma'_1 &= \left\{ g_{i_1,i_2,q}^{(1)} : N+1 \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n-N, q = 1, \dots, [N^{1/3}] \right\}, \\ \mathbf{E}g_{i,r}^{(0)} &= \mathbf{E}\gamma_{i,r}^{(0)}, \mathbf{E}g_{i_1,i_2,q}^{(1)} = \mathbf{E}\gamma_{i_1,i_2,q}^{(1)}.\end{aligned}$$

Построим оценку точности аппроксимации распределения семейства Γ распределением семейства Γ' . Положим

$$\begin{aligned}J &= J^{(0)} \cup J^{(1)}, \quad J^{(0)} = \left\{ (i, r) : i = N+1, \dots, n-N, r = 1, \dots, [N^{1/3}] \right\}, \\ J^{(1)} &= \left\{ (i_1, i_2, q) : N+1 \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n-N, q = 1, \dots, [N^{1/3}] \right\}.\end{aligned}$$

Для $\iota \in J$ определим множество $J(\iota) = J^{(0)}(\iota) \cup J^{(1)}(\iota) \subseteq J$, $J^{(0)}(\iota) \subseteq J^{(0)}$, $J^{(1)}(\iota) \subseteq J^{(1)}$, следующим образом:

1. Если $\iota = (i_1, r_1) \in J^{(0)}$, то

$$\begin{aligned}J^{(0)}(\iota) &= \left\{ (i_2, r_2) \in J^{(0)}, (i_2, r_2) \neq (i_1, r_1) : \text{отрезки } [i_1 - 1, i_1 + s + r_1 - 1] \right. \\ &\quad \left. \text{и } [i_2 - 1, i_2 + s + r_2 - 1] \text{ пересекаются} \right\},\end{aligned}$$

$$J^{(1)}(\iota) = \left\{ (j_1, j_2, q) \in J^{(1)} : \text{отрезок } [i_1 - 1, i_1 + s + r_1 - 1] \right.$$

пересекается с одним из отрезков $[j_1 - 1, j_1 + s + q], [j_2 - 1, j_2 + s + q] \left. \right\}$.

2. Если $\iota = (j_1, j_2, q_1) \in J^{(1)}$, то

$$J^{(0)}(\iota) = \left\{ (i_1, r) \in J^{(0)} : \text{отрезок } [i_1 - 1, i_1 + s + r - 1] \right.$$

пересекается с одним из отрезков $[j_1 - 1, j_1 + s + q_1], [j_2 - 1, j_2 + s + q_1] \left. \right\}$,

$$J^{(1)}(\iota) = \left\{ (i_1, i_2, q_2) \in J^{(1)}, (i_1, i_2, q_2) \neq (j_1, j_2, q_1) : \right.$$

хотя бы один из отрезков $[i_1 - 1, i_1 + s + q_2], [j_2 - 1, j_2 + s + q_1]$

пересекается хотя бы с одним из отрезков

$$\left. [j_1 - 1, j_1 + s + q_1], [j_2 - 1, j_2 + s + q_1] \right\}.$$

Через $J_1^{(1)}(\iota)$ обозначим подмножество множества $J^{(1)}(\iota)$, соответствующее пересечению ровно одной пары отрезков, а через $J_2^{(1)}(\iota)$ — пересечению двух пар.

Согласно теореме 10.A книги [10] для расстояния по вариации между распределением Γ и распределением Γ' справедлива оценка

$$\rho(\mathcal{L}(\Gamma), \mathcal{L}(\Gamma')) \leq \sum_{\iota_1 \in J} \left(\mathbf{E} g'_{\iota_1} \left(\mathbf{E} g'_{\iota_1} + \sum_{\iota_2 \in J(\iota_1)} \mathbf{E} g'_{\iota_2} \right) \right) + \sum_{\iota_1 \in J} \sum_{\iota_2 \in J(\iota_1)} \mathbf{E} (g'_{\iota_1} g'_{\iota_2}), \quad (17)$$

где $g'_\iota = g_\iota^{(1)}$ при $\iota \in J^{(1)}$ и $g'_\iota = g_\iota^{(0)}$ при $\iota \in J^{(0)}$. Очевидно, для доказательства того, что $\rho(\mathcal{L}(\Gamma), \mathcal{L}(\Gamma')) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, достаточно доказать, что

$$\sum_{\iota_1 \in J^{(l)}} \left(\mathbf{E} g'_{\iota_1} \left(\mathbf{E} g'_{\iota_1} + \sum_{\iota_2 \in J^{(m)}(\iota_1)} \mathbf{E} g'_{\iota_2} \right) \right) + \sum_{\iota_1 \in J^{(l)}} \sum_{\iota_2 \in J^{(m)}(\iota_1)} \mathbf{E} (g'_{\iota_1} g'_{\iota_2}) \rightarrow 0$$

при $l, m = 0, 1$. Так как $\sum_{r=1}^{[N^{1/3}]} \mathbf{E} \gamma_{i,r}^{(0)} \leq \mathbf{E} \theta_i$, то, используя формулу для $\mathbf{E} \theta_i$ и условия теоремы, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\iota_1 \in J^{(0)}} \left(\mathbf{E} g'_{\iota_1} \sum_{\iota_2 \in J^{(0)}(\iota_1) \cup \{\iota_1\}} \mathbf{E} g'_{\iota_2} \right) \leq \\ & \leq \sum_{i=N+1}^{n-N} \left(\mathbf{E} \theta_i \sum_{j=i-s-[N^{1/3}]}^{i+s+[N^{1/3}]} \mathbf{E} \theta_j \right) = O(sn^{-1}) = o(1), \end{aligned}$$

здесь и далее при $j \notin \{N, \dots, n-N\}$ полагаем $\theta_j = 0$. Далее, аналогично:

$$\begin{aligned} & \sum_{\iota_1 \in J^{(1)}} \left(\mathbf{E} g'_{\iota_1} \sum_{\iota_2 \in J^{(0)}(\iota_1) \cup \{\iota_1\}} \mathbf{E} g'_{\iota_2} \right) = O(sn^{-1}) = o(1), \\ & \sum_{\iota_1 \in J^{(0)}} \left(\mathbf{E} g'_{\iota_1} \sum_{\iota_2 \in J^{(1)}(\iota_1) \cup \{\iota_1\}} \mathbf{E} g'_{\iota_2} \right) = O(sn^{-1}) = o(1), \\ & \sum_{\iota_1 \in J^{(1)}} \left(\mathbf{E} g'_{\iota_1} \sum_{\iota_2 \in J^{(1)}(\iota_1) \cup \{\iota_1\}} \mathbf{E} g'_{\iota_2} \right) = \sum_{\iota_1 \in J^{(1)}} \left(\mathbf{E} g'_{\iota_1} \sum_{\iota_2 \in J_2^{(1)}(\iota_1) \cup \{\iota_1\}} \mathbf{E} g'_{\iota_2} \right) + \\ & + \sum_{\iota_1 \in J^{(1)}} \left(\mathbf{E} g'_{\iota_1} \sum_{\iota_2 \in J_1^{(1)}(\iota_1) \cup \{\iota_1\}} \mathbf{E} g'_{\iota_2} \right) = O(s^2 n^{-2}) + O(sn^{-1}) = o(1). \end{aligned}$$

Следовательно, первое слагаемое в правой части (17) стремится к нулю. Оценим второе слагаемое.

Из определения случайных величин $\gamma_{i,r}^{(0)}$ следует (см. (8)), что если $(i_2, r_2) \in J^{(0)}(i_1, r_1)$, то равенство $\gamma_{i_1, r_1}^{(0)} \gamma_{i_2, r_2}^{(0)} = 1$ возможно только в случаях $i_2 - 1 = i_1 + s + r_1 - 1$ и $i_1 - 1 = i_2 + s + r_2 - 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\iota_1 \in J^{(0)}} \sum_{\iota_2 \in J^{(0)}(\iota_1)} \mathbf{E}(g'_{\iota_1} g'_{\iota_2}) &\leq \sum_{i=N+1}^{n-N} \left(\sum_{j=i-s-[N^{1/3}]}^{i-s-1} \mathbf{E}(\theta_i \theta_j) + \sum_{j=i+s+1}^{i+s+[N^{1/3}]} \mathbf{E}(\theta_i \theta_j) \right) = \\ &= \sum_{i=N+1}^{n-N} \left(\sum_{j=i-s-[N^{1/3}]}^{i-s-1} \mathbf{E} \theta_i \mathbf{E} \theta_j + \sum_{j=i+s+1}^{i+s+[N^{1/3}]} \mathbf{E} \theta_i \mathbf{E} \theta_j \right) = O(N^{1/3} n^{-1}) = o(1). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $\iota_1 \in J^{(1)}$, $\iota_2 \in J^{(0)}(\iota_1)$ (в случае $\iota_1 \in J^{(0)}$, $\iota_2 \in J^{(1)}(\iota_1)$ оценки аналогичны):

$$\begin{aligned} \sum_{\iota_1 \in J^{(1)}} \sum_{\iota_2 \in J^{(0)}(\iota_1)} \mathbf{E}(g'_{\iota_1} g'_{\iota_2}) &\leq \sum_{N \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n-N} \left(\sum_{j=i_1-s-[N^{1/3}]}^{i_1+s+[N^{1/3}]} \mathbf{E}(\vartheta_{i_1, i_2} \theta_j) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i_2-s-[N^{1/3}]}^{i_2+s+[N^{1/3}]} \mathbf{E}(\vartheta_{i_1, i_2} \theta_j) \right) = O(N^{1/3} C_n^2 ((N)_s)^3 N^{-3s}) + \\ &+ O \left(C_n^2 \sum_{j=0}^{s-1} \mathbf{E}(\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]} \theta_{N+j}) \right) = o(1) + O \left(C_n^2 \sum_{j=0}^{[s^{2/3}]} \mathbf{E}(\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]} \theta_{N+j}) \right) + \\ &+ O \left(C_n^2 \sum_{j=[s^{2/3}]+1}^{s-1} \mathbf{E}(\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]} \theta_{N+j}) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что при $j = 0, \dots, [s^{2/3}]$ величины $\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]} \theta_{N+j}$ равны нулю по определению. Кроме того, очевидно, что

$$\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]} \theta_{N+j} \leq \vartheta_{N, N+[n^{1/2}]} \mathbf{I}\{\mu(Y_{N+s}(j)) = j\},$$

следовательно,

$$C_n^2 \sum_{j=[s^{2/3}]+1}^{s-1} \mathbf{E}(\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]} \theta_{N+j}) = O \left(\sum_{j=[s^{2/3}]+1}^{s-1} \mathbf{P}\{\mu(Y_{N+s}(j)) = j\} \right) = o(1).$$

Остается получить оценки для случая $\iota_1 \in J^{(1)}$, $\iota_2 \in J^{(1)}(\iota_1)$. Рассмотрим отдельно случаи $\iota_2 \in J_1^{(1)}(\iota_1)$ и $\iota_2 \in J_2^{(1)}(\iota_1)$. Пусть $\iota_2 \in J_1^{(1)}(\iota_1)$.

По аналогии с предыдущим случаем нетрудно убедиться в том, что

$$\sum_{\iota_1 \in J^{(1)}} \sum_{\iota_2 \in J_1^{(1)}(\iota_1)} \mathbf{E}(g'_{\iota_1} g'_{\iota_2}) = O(N^{1/3} C_n^3((N)_s)^4 N^{-4s}) + \\ + O\left(C_n^3 \sum_{j=0}^{s-1} \mathbf{E}(\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]} \vartheta_{N+j, N+2[n^{1/2}]})\right),$$

причем

$$O(N^{1/3} C_n^3((N)_s)^4 N^{-4s}) = o(1).$$

Положим

$$\vartheta_{i_1, i_2}(t) = \vartheta_{i_1, i_2} \mathbf{I}\left\{\mu(Y_{i_2}(s)) = s - t\right\}, \quad 1 \leq t \leq t_n,$$

Ясно, что

$$\vartheta_{i_1, i_2} = \sum_{t=1}^{t_n} \vartheta_{i_1, i_2}(t).$$

При $j = 0, \dots, s-1$ справедливы оценки

$$\mathbf{E}(\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]} \vartheta_{N+j, N+2[n^{1/2}]}) = \\ = \mathbf{E}\left(\left(\sum_{t=1}^{t_n} \vartheta_{N, N+[n^{1/2}]}(t)\right) \left(\sum_{l=1}^{t_n} \vartheta_{N+j, N+2[n^{1/2}]}(l)\right)\right) \leq \\ \leq \mathbf{E}(\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]}(1) \vartheta_{N+j, N+2[n^{1/2}]}(1)) + \\ + \mathbf{E}\left(2\left(\sum_{t=1}^{t_n} \vartheta_{N, N+[n^{1/2}]}(t)\right) \left(\sum_{l=2}^{t_n} \vartheta_{N+j, N+2[n^{1/2}]}(l)\right)\right).$$

Нетрудно показать (аналогичные рассуждения см. в доказательстве теоремы 1 статьи [8]), что

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{t=1}^{t_n} \vartheta_{N, N+[n^{1/2}]}(t)\right) \left(\sum_{l=2}^{t_n} \vartheta_{N+j, N+2[n^{1/2}]}(l)\right)\right) \leq \mathbf{E} \vartheta_{N, N+[n^{1/2}]} \kappa_s,$$

где

$$\kappa_s = \max_{M \in \mathbf{M}_s} \mathbf{P}\{(X_1, \dots, X_s) \in M\} \leq N^{-s}(N)_{s-2},$$

M_s — множество классов структурной эквивалентности s -цепочек, содержащих не более $s - 2$ различных символов. Поэтому при $n \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\left(\sum_{t=1}^{t_n} \vartheta_{N, N+[n^{1/2}]}(t) \right) \left(\sum_{l=2}^{t_n} \vartheta_{N+j, N+2[n^{1/2}]}(l) \right) \right) = \\ & = O \left(N^{-2s} ((N)_s)^2 N^{-s} (N)_{s-2} \right) = O \left(s^{-2} N^{-3s} ((N)_s)^3 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Оценим величины $\mathbf{E} \left(\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]}(1) \vartheta_{N+j, N+2[n^{1/2}]}(1) \right)$. Из определения $\vartheta_{i_1, i_2}(1)$ следует, что цепочки $X_N, \dots, X_{N+s-1}$ и $X_{N+j}, \dots, X_{N+s+j-1}$ содержат одну пару совпадающих символов каждая. Рассмотрим два случая.

Пусть совпадающие символы принадлежат цепочке $X_{N+j}, \dots, X_{N+s-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]}(1) \vartheta_{N+j, N+2[n^{1/2}]}(1) \mathbf{I} \left\{ \mu(Y_{N+j}(s-j)) = s-j-1 \right\} \right) \leq \\ & \leq N^{-3s-j} \sigma(s-j, s-j-1) ((N)_{s-j-1})^3 ((N-s+j+1)_j)^4 = \\ & = N^{-j} (N-s+j+1)_j N^{-3s} C_{s-j}^2 ((N)_{s-1})^3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & C_n^3 \sum_{j=0}^{s-1} \mathbf{E} \left(\vartheta_{N, N+[n^{1/2}]}(1) \vartheta_{N+j, N+2[n^{1/2}]}(1) \mathbf{I} \left\{ \mu(Y_{N+j}(s-j)) = s-j-1 \right\} \right) = \\ & = O \left(n^3 s^{-1} N^{-3s} ((N)_s)^3 \right) \sum_{j=0}^{s-1} N^{-j} (N-s+j+1)_j = \\ & = O(s^{-1}) \left(\sum_{j=0}^{[s/2]-1} N^{-j} (N-s+j+1)_j + \sum_{[s/2]}^{s-1} N^{-j} (N-s+j+1)_j \right). \end{aligned}$$

Заметим, что с ростом j , $j = 0, \dots, s-1$, величины $a_j = N^{-j} (N-s+j+1)_j$ не возрастают, а именно,

$$a_{j+1} a_j^{-1} = 1 - sN^{-1} + (j+2)N^{-1}, j = 0, \dots, s-2,$$

причем при $j = 0, \dots, [s/2] - 1$ величина $a_{j+1} a_j^{-1}$ не превосходит $1 - \frac{s}{2N}$, поэтому

$$\sum_{j=0}^{[s/2]-1} N^{-j} (N-s+j+1)_j \leq \sum_{j=0}^{[s/2]-1} \left(1 - \frac{s}{2N} \right)^j = O(1)$$

и

$$\sum_{j=\lfloor s/2 \rfloor}^{s-1} N^{-j} (N - s + j + 1)_j < s \left(1 - \frac{s}{2N}\right)^{\lfloor s/2 \rfloor} = o(1).$$

Пусть теперь совпадающие символы не принадлежат цепочке $X_{N+j}, \dots, X_{N+s-1}$. Тогда мы имеем две различные пары совпадающих символов, которые принадлежат цепочкам $X_N, \dots, X_{N+s-1}$ и $X_{N+j}, \dots, X_{N+s+j-1}$ соответственно, причем для каждой пары по крайней мере один символ не принадлежит цепочке $X_{N+j}, \dots, X_{N+s-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\vartheta_{N, N+\lfloor n^{1/2} \rfloor} (1) \vartheta_{N+j, N+2\lfloor n^{1/2} \rfloor} (1) \mathbf{I} \left\{ \mu(Y_{N+j}(s-j)) = s-j \right\} \right) \leq \\ & \leq N^{-3s-j} ((N)_{s-j})^3 (\sigma(j, j-1) ((N-s+j)_{j-1})^2 + j ((N-s+j)_{j-1})^2)^2 = \\ & = O \left(n^3 N^{-3s} ((N)_s)^3 s^{-1} \right) N^{-j} (N-s+j)_{j-1}. \end{aligned}$$

Отсюда по аналогии с первым случаем получаем оценку

$$C_n^3 \sum_{j=0}^{s-1} \mathbf{E} \left(\vartheta_{N, N+\lfloor n^{1/2} \rfloor} (1) \vartheta_{N+j, N+2\lfloor n^{1/2} \rfloor} (1) \mathbf{I} \left\{ \mu(Y_{N+j}(s-j)) = s-j \right\} \right) = O(s^{-2}).$$

Таким образом, с учетом (18) получаем

$$\sum_{\iota_1 \in J^{(1)}(\iota_1)} \sum_{\iota_2 \in J_1^{(1)}(\iota_1)} \mathbf{E} (g'_{\iota_1} g'_{\iota_2}) = o(1).$$

Рассмотрим последний случай: $\iota_1 = (j_1, j_2, r_1) \in J^{(1)}, \iota_2 = (i_1, i_2, r_2) \in J_2^{(1)}(\iota_1)$. Пусть для определенности $i_2 - j_2 > i_1 - j_1 \geq 0$.

Рассмотрим сначала случай $i_2 - j_2 \leq \lfloor s^{3/4} \rfloor$. Пусть X_m — крайний справа символ цепочки $Y_{j_2}(s)$, встретившийся в ней более одного раза. Из определения случайных величин ϑ_{j_1, j_2} следует, что $j_2 \leq m < j_2 + s - T_n < j_2 + s - s^{[4/5]}$, а также что этот символ совпадает с некоторым символом X_l , $j_2 + s^{[4/5]} < l < j_2 + T_n \leq l < m$; значит, этот символ принадлежит цепочке $Y_{i_2}(s)$. Из структурной эквивалентности цепочек $Y_{j_2}(s)$ и $Y_{j_1}(s)$ и определения величины ϑ_{i_1, i_2} следует, что символ $X_{m+j_1-j_2}$ встретился в цепочках $Y_{j_1}(s)$ и $Y_{i_1}(s)$ также более одного раза, причем совпавшие с ними символы лежат на перекрытии этих цепочек. Тогда из структурной эквивалентности цепочек $Y_{i_1}(s)$ и $Y_{i_2}(s)$ следует, что символ $X_{m+j_1-j_2+i_2-i_1}$ встретится в цепочке $Y_{i_2}(s)$, а следовательно, и в цепочке $Y_{j_2}(s)$, более одного раза. Но неравенство $m + j_1 - j_2 + i_2 - i_1 > m$

противоречит определению числа m , значит, при $i_2 - j_2 \leq [s^{3/4}]$ справедливо равенство $\vartheta_{i_1, i_2} \vartheta_{j_1, j_2} = 0$.

Пусть теперь $[s^{3/4}] < i_2 - j_2$. Тогда из определения ϑ_{j_1, j_2} следует оценка

$$\vartheta_{i_1, i_2} \vartheta_{j_1, j_2} \leq \vartheta_{j_1, j_2} \mathbf{I}\{\mu(Y_{j_2+s}(i_2 - j_2)) \leq t_n\}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \vartheta_{i_1, i_2} \vartheta_{j_1, j_2} &= O\left(N^{-2s} ((N)_s)^2 \mathbf{P}\{\mu(Y_{j_2+s}([s^{3/4}])) \leq [s^{1/7}]\}\right) = \\ &= O\left(N^{-2s} ((N)_s)^2 e^{-s^{1/3}}\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{\iota_1 \in J^{(1)}} \sum_{\iota_2 \in J_2^{(1)}(\iota_1)} \mathbf{E}(\gamma_{\iota_1} \gamma_{\iota_2}) = O\left(C_n^2 s^2 N^{-2s} ((N)_s)^2 e^{-s^{1/3}}\right) = o(1).$$

Таким образом, доказано, что

$$\rho(\mathcal{L}(\Gamma), \mathcal{L}(\Gamma')) = o(1).$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ распределение случайного вектора $(\hat{\xi}_n^{(12)}, \hat{\eta}_n)$ сближается по вариации с распределением случайного вектора (ξ'_n, η'_n) с независимыми компонентами, где

$$\begin{aligned} \xi'_n &= \sum_{q=1}^{[N^{1/3}]} q \sum_{N \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n-N} g_{i_1, i_2, q}^{(1)}, \\ \eta'_n &= \sum_{r=1}^{[N^{1/3}]} r \sum_{i=N+1}^{n-N} g_{i, r}^{(0)}. \end{aligned}$$

Докажем сходимость распределения случайной величины ξ'_n к распределению случайной величины ξ .

Заметим, что при $q \leq [N^{1/3}]$ событие $\vartheta_{i_1, i_2} \vartheta_{i_1+q-1, i_2+q-1} = 1$ влечет за собой события $\vartheta_{i_1+r, i_2+r} = 1$, $r = 1, \dots, q-2$ (это следует из определения

ϑ_{i_1, i_2}), поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{N \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n-N} \mathbf{E} g_{i_1, i_2, q}^{(1)} &= C_n^2 (1 + o(1)) \times \\ &\times \mathbf{P} \left\{ \vartheta_{N, N+2s} = 0, \vartheta_{N+1, N+2s+1} = \dots = \vartheta_{N+r, N+2s+r} = 1, \right. \\ &\left. \vartheta_{N+q+1, N+2s+q+1} = 0 \right\} = C_n^2 (1 + o(1)) \mathbf{P} \left\{ \vartheta_{N+1, N+2s+1} = 1 \right\} \times \\ &\mathbf{P} \left\{ \vartheta_{N, N+2s} = 0, \vartheta_{N+q, N+2s+q} = 1, \vartheta_{N+q+1, N+2s+q+1} = 0 \mid \vartheta_{N+1, N+2s+1} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Так как при $\vartheta_{N+1, N+2s+1} = 1$ цепочка $Y_{N+1}(s)$ содержит не менее $s - k_n = s - [s^{1/7}]$ различных символов, то при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left\{ \vartheta_{N, N+2s} = 0, \vartheta_{N+1, N+2s+1} = \dots = \vartheta_{N+q, N+2s+q} = 1, \right. \\ &\quad \left. \vartheta_{N+q+1, N+2s+q+1} = 0 \right\} = \\ &= ((N-s)_{q-1})^2 N^{-2(q-1)} (1 - (N-s)^2 N^{-2})^2 (1 + o(1)) = \\ &= ((1-\alpha)^2)^{-(q-1)} (1 - (1-\alpha)^2)^2 (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом оценки

$$C_n^2 \mathbf{P} \left\{ \vartheta_{N+1, N+2s+1} = 1 \right\} = \frac{1}{2} \lambda^2 \left(e^{\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}} - 1 \right) (1 + o(1))$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{N \leq i_1 < i_1 + [n^{1/2}] \leq i_2 \leq n-N} \mathbf{E} g_{i_1, i_2, q}^{(1)} &= \frac{1}{2} \lambda^2 \left(e^{\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}} - 1 \right) \times \\ &\times ((1-\alpha)^2)^{-(q-1)} (1 - (1-\alpha)^2)^2 (1 + o(1)), \quad q = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Сходимость распределения случайной величины η'_n к распределению случайной величины η доказывается аналогично.

Таким образом, распределение случайного вектора (ξ'_n, η'_n) сходится по вариации к распределению случайного вектора (ξ, η) , а значит, распределение случайной величины ξ_n сходится к распределению суммы $\xi + C_\eta^2$.

Утверждения пп. а) теорем 2 и 3 доказаны.

3. Докажем пп. б) этих теорем. Положим $k \geq 3$,

$$\begin{aligned}\xi_{n,k}^{(12)} &= \sum_{1 \leq i_1 < i_1+s \leq i_2 < \dots < i_{k-1}+s \leq i_k \leq n} \mathbf{I}\{S(Y_{i_1}(s)) = \dots = S(Y_{i_k}(s)), \mu(Y_{i_1}(s)) < s\}, \\ \xi_{n,k}^{(13)} &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \\ \exists j=1, \dots, k-1: i_{j+1}-i_j \leq s-1}} \mathbf{I}\{S(Y_{i_1}(s)) = \dots = S(Y_{i_k}(s)), \mu(Y_{i_1}(s)) < s\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\xi_{n,k}^{(1)} = \xi_{n,k}^{(12)} + \xi_{n,k}^{(13)}.$$

Нетрудно видеть (см. также [7]), что для случая $1 \leq i_1 < i_1 + s \leq i_2 < \dots < i_{k-1} + s \leq i_k \leq n$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{S(Y_{i_1}(s)) = \dots = S(Y_{i_k}(s)), \mu(Y_{i_1}(s)) < s\} = N^{-ks} \sum_{m=1}^{s-1} \sigma(s, m) ((N)_m)^k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\xi_{n,k}^{(12)} &\leq C_n^k N^{-ks} \sum_{m=1}^{s-1} \sigma(s, m) ((N)_m)^k \leq \\ &\leq C_n^k N^{-ks} ((N)_{s-1})^{k-2} \sum_{m=1}^{s-1} \sigma(s, m) ((N)_m)^2 \leq \\ &\leq (N-s+1)^{2-k} (n(N)_s N^{-s})^{k-2} C_n^2 N^{-2s} \sum_{m=1}^{s-1} \sigma(s, m) ((N)_m)^2.\end{aligned}$$

Выше (см. (12)) было доказано, что

$$C_n^2 N^{-2s} \sum_{m=1}^{s-1} \sigma(s, m) ((N)_m)^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 \left(e^{\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}} - 1 \right) (1 + o(1)) = O(1).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\xi_{n,k}^{(12)} > 0\} \leq \mathbf{E}\xi_{n,k}^{(12)} = O((N-s+1)^{2-k}) = o(1).$$

Далее рассмотрим случайную величину $\xi_{n,k}^{(13)}$. Так как

$$\{\xi_{n,k}^{(13)} > 0\} \Rightarrow \{\xi_n^{(13)} > 0\}, \quad k \geq 3,$$

то с учетом оценки (10) получаем

$$\mathbf{P}\{\xi_{n,k}^{(13)} > 0\} \leq \mathbf{P}\{\xi_n^{(13)} > 0\} \leq \mathbf{E}\xi_n^{(13)} = o(1).$$

Теоремы 2 и 3 доказаны.

Список литературы

1. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М. : Наука, 1982. — 384 с.
2. Буравлев С. М. Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний // Дискретная математика. — 1999. — Т. 11. Вып. 1. — С. 53–75.
3. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Асимптотические представления конечных разностей от степенной функции в произвольной точке // Теория вероятностей и ее применения. — 1965. — Т. 10. Вып. 1. — С. 151–156.
4. Михайлов В. Г. Об асимптотических свойствах распределения числа пар $\mathbf{H}$ -связанных цепочек // Дискретная математика. — 2002. — Т. 14. Вып. 3. — С. 122–129.
5. Михайлов В. Г. Об асимптотическом поведении вероятности наличия в последовательности эквивалентных цепочек с нетривиальной структурой // Дискретная математика. — 2008. — Т. 20. Вып. 4. — С. 113–119.
6. Михайлов В. Г., Шойтов А. М. Структурная эквивалентность s -цепочек в случайных дискретных последовательностях // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15. Вып. 4. — С. 7–34.
7. Шойтов А. М. Предельные распределения числа наборов $\mathbf{H}$ -эквивалентных отрезков в равновероятной полиномиальной схеме серий // Дискретная математика. — 2002. — Т. 14. Вып. 1. — С. 82–98.
8. Шойтов А. М. Пуассоновское приближение для числа повторений значений дискретной функции от цепочек // Дискретная математика. — 2005. — Т. 17. Вып. 2. — С. 56–69.
9. Шойтов А. М. Дискретные предельные распределения для числа цепочек с одинаковой структурой в последовательности равновероятных испытаний // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 14. Вып. 3. — С. 474–484.
10. Barbour A. D., Holst L., Janson S. Poisson Approximation. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1992. — 277 p.