Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, Вычисление распределений характеристик чисел компонент и циклических точек случайного отображения, *Матем. вопр. криптогр.*, 2010, том 1, выпуск 2, 5–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk7>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:26:03

УДК: 519.212.2

Вычисление распределений чисел компонент и циклических точек случайного отображения

А. М. Зубков

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Получено 22.IV.2010

В работе описаны использующие аппарат цепей Маркова алгоритмы точного вычисления распределений чисел компонент и циклических точек случайного отображения конечного множества в себя и итерации двух таких независимых отображений.

Ключевые слова: случайные отображения, циклические точки, вычисление распределений

Computation of distributions of the numbers of components and cyclic points for random mappings

A. M. Zubkov

Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow

Abstract. Markov chain based algorithms for the exact computation of distributions of the numbers of components and cyclic points for the random mapping of a finite set into itself and for the iteration of two such mappings are described.

Key words: random mapping, cyclic points, computation of distributions

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2010, vol. 1, no. 2, pp. 5–18 (Russian).

Случайные отображения конечных множеств изучались в ряде работ (см., например, [1–5] и приведенную в них библиографию). Как правило, результаты исследования различных свойств случайных отображений формулируются в виде предельных теорем, однако утверждения предельных теорем не позволяют в конкретных случаях получать численные результаты, поскольку оценки скорости сходимости в этих теоремах либо отсутствуют, либо оказываются довольно грубыми. Кроме того, предельные теоремы, как правило, не дают информации о значениях вероятностей в области больших отклонений. Основная масса предельных теорем относится к равновероятным отображениям.

Цель настоящей работы — указать способ точного вычисления некоторых характеристик случайных отображений, в частности, распределения числа связных компонент и числа циклических точек.

Пусть φ — случайное равновероятное отображение конечного множества $S = \{1, \dots, N\}$, т.е. значения $\varphi(1), \dots, \varphi(N)$ независимы и имеют равномерное распределение на S . Случайному отображению φ соответствует случайный ориентированный граф $G = G(\varphi)$ с множеством вершин S и множеством ориентированных ребер $(k, \varphi(k)), k \in S$. Обозначим через $\nu_N = \nu(\varphi)$ число связных компонент графа G . Известно (см. [1]), что для любого $x, 0 < x \leq e^{-1}$, и любого n

$$\mathbf{P}\{\nu_N = n\} = \frac{N! \ln^n A(x)}{n! N^N x^N} \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_n = N\}, \quad (1)$$

где $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k x^k}{k!}$, случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы, одинаково распределены и

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{b_k x^k}{k! B(x)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а

$$B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k x^k}{k!} = \ln A(x), \text{ т.е. } b_k = (k-1)! \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k^m}{m!}.$$

Из этих соотношений в [1] выводятся асимптотические формулы

$$\mathbf{P}\{\nu_N = n\} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \ln N \right)^n e^{-\frac{1}{2} \ln N} (1 + o(1)) \quad (2)$$

и

$$\mathbf{P}\{\nu_N = n\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi \ln N}} \exp \left\{ -\frac{(n - \frac{1}{2} \ln N)^2}{\ln N} \right\}, \quad (3)$$

которые при $N \rightarrow \infty$ выполняются равномерно относительно целых n , для которых $(n - \frac{1}{2} \ln N) (\ln N)^{-7/12}$ лежит в любом конечном интервале.

Точную формулу (1) можно преобразовать к виду, удобному для вычисления распределения числа компонент ν_N при значениях N , допускающих размещение нескольких массивов по N чисел в памяти ЭВМ:

$$\mathbf{P}\{\nu_N = n\} = \frac{N!}{n!N^N} \text{coef}_{x^N} D_N^n(x), \quad D_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{x^k}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k^m}{m!}. \quad (4)$$

Вычисление $\text{coef}_{x^N} D_N(x)$ можно провести за $O(k)$ арифметических операций; вычисление всех N коэффициентов этого многочлена — за $O(N^2)$ операций. Далее вычисление первых N коэффициентов произведения двух многочленов степени N проводится за $O(N^2)$ операций, поэтому вероятности $\mathbf{P}\{\nu_N = n\}$ можно вычислять последовательно по $n = 1, 2, \dots$, затрачивая на вычисление каждой следующей вероятности $O(N^2)$ операций. Таким образом, вычисление полного распределения ν_N можно провести за $O(N^3)$ арифметических операций, а первых M вероятностей — за $O(MN^2)$ операций.

Эта формула применима только к классической модели случайного отображения конечного множества S , в которой образы всех элементов независимы и имеют равномерные распределения на S . Однако другие модели случайных отображений тоже могут представлять интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения, и распределения чисел компонент таких отображений могут отличаться от соответствующих распределений для равновероятных отображений. Примерами являются: а) отображения, являющиеся итерациями нескольких равновероятных отображений; б) отображения, в которых распределение образов не является равномерным; в) отображения, в которых распределение образа элемента зависит от этого элемента (например, случайные двудольные отображения), и т. п.

В основе предлагаемого подхода лежит использование вспомогательной цепи Маркова, которая представляет процесс построения случайного отображения (последовательного определения образов элементов) в виде, обеспечивающем монотонное неубывание числа компонент. Чтобы сделать изложение более понятным, рассмотрим сначала случай равновероятных отображений.

Пусть требуется найти число ν_N связных компонент отображения $\varphi: S = \{1, \dots, N\} \rightarrow S$. Чтобы задать отображение, нужно определить его значения на всех элементах множества S , и эти элементы можно перебирать в любом порядке.

Рассмотрим процесс $\mathcal{P}$ перебора элементов множества S , состоящий из отдельных шагов. Состоянием процесса в начале $(t + 1)$ -го шага, $t = 0, 1, \dots$, является пара $(\sigma(t), \nu(t))$, где $\sigma(t) \subset S$ — множество всех элементов $x \in S$, для которых значение $\varphi(x)$ было определено на каком-нибудь из первых t шагов, а $\nu(t)$ — число связных компонент графа отображения φ , ограниченного на $\sigma(t)$, т. е. графа с множеством вершин $\sigma(t)$ и множеством ребер $(x, \varphi(x))$, $x \in \sigma(t)$. В частности, $(\sigma(0), \nu(0)) = (\emptyset, 0)$.

Шаг с номером $t = 1, 2, \dots$ начинается с выбора произвольного элемента x множества $S \setminus \sigma(t - 1)$; на нем значение отображения φ еще не определено. После этого находим значения $\varphi(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x), \dots$ до тех пор, пока не появится значение $\varphi^{\tau(t)}(x) \in \sigma(t - 1) \cup \{x, \varphi(x), \dots, \varphi^{\tau(t)-1}(x)\}$, на котором к этому моменту отображение φ уже определено. Тогда t -й шаг заканчивается. Возможны два варианта: либо $\varphi^{\tau(t)}(x) \in \sigma(t - 1)$, либо $\varphi^{\tau(t)}(x) \in \{x, \varphi(x), \dots, \varphi^{\tau(t)-1}(x)\}$. В первом случае все элементы построенной цепочки присоединяются к одной из ранее образовавшихся связных компонент отображения φ , во втором случае они порождают новую связную компоненту. Таким образом, в конце каждого шага процесса $\mathcal{P}$ число связных компонент либо не изменяется, либо увеличивается на 1. Когда все элементы множества S будут исчерпаны, число связных компонент определится полностью.

Если φ — случайное отображение, то процесс $\mathcal{P} = \{(\sigma(t), \nu(t))\}_{t \geq 0}$ тоже является случайным с множеством состояний $2^S \times \{0, 1, \dots, N\}$; здесь 2^S — совокупность всех подмножеств множества S . Начальным состоянием процесса является $\{(\emptyset, 0)\}$; состояния $(s, n) \in 2^S \times \{0, 1, \dots, N\}$ с $s = S$ — поглощающие. Финальное распределение процесса $\mathcal{P}$ на множестве $\{S\} \times \{1, \dots, N\}$ соответствует распределению числа компонент отображения φ . Если случайное отображение φ таково, что образы $\varphi(x)$, $x \in S$, элементов независимы, и при любом $t = 0, 1, \dots$ на $(t + 1)$ -м шаге начальный элемент $x \in S \setminus \sigma(t)$ выбирается независимо от значений отображения φ на множестве $\sigma(t)$, то при фиксированном $\sigma(t)$ распределение последовательности $\{(\sigma(s), \nu(s))\}_{s > t}$ зависит только от $\sigma(t)$ и не зависит от предыстории $\{(\sigma(s), \nu(s))\}_{0 \leq s < t}$; иными словами, для отображения с независимыми образами элементов процесс $\mathcal{P}$ является марковским.

В случайном равновероятном отображении φ образы элементов множества S не только независимы, но и равномерно распределены на S . Поэтому марковский процесс $\mathcal{P}$ допускает укрупнение состояний: последовательность $\{(|\sigma(t)|, \nu(t))\}_{t \geq 0}$ является цепью Маркова с дискретным временем и множеством состояний $\{0, 1, \dots, N\} \times \{0, 1, \dots, N\}$. Число $(N + 1)^2$ состояний укрупненной цепи Маркова существенно меньше, чем число $(N + 1)2^N$ состояний исходной цепи, и это позволяет находить ее финальное распреде-

ление, последовательно вычисляя распределения $\{(|\sigma(t)|, \nu(t))\}$, $t = 0, 1, \dots$, с помощью матрицы переходных вероятностей.

Выведем формулы для переходных вероятностей укрупненной цепи. Из состояния $(|\sigma(t)|, \nu(t)) = (m, v)$ укрупненная цепь может перейти только в состояния $(m + u, v)$ или $(m + u, v + 1)$, где $u \in \{1, 2, \dots, N - m\}$. Переход

$$(m, v) \rightarrow (m + u, v)$$

происходит, когда $|\sigma(t)| = m$, элементы $x, \varphi(x), \dots, \varphi^{u-1}(x) \notin \sigma(t)$ попарно различны и $\varphi^u(x) \in \sigma(t)$, а переход

$$(m, v) \rightarrow (m + u, v + 1)$$

происходит, когда $|\sigma(t)| = m$, элементы $x, \varphi(x), \dots, \varphi^{u-1}(x) \notin \sigma(t)$ попарно различны и $\varphi^u(x) \in \{x, \varphi(x), \dots, \varphi^{u-1}(x)\}$. Отсюда следует, что вероятности переходов имеют следующий вид:

$$p_{(m,v),(m+u,v)} = \frac{m}{N} q(m, u), \quad p_{(m,v),(m+u,v+1)} = \frac{u}{N} q(m, u), \quad (5)$$

$$q(m, u) = \prod_{k=1}^{u-1} \left(1 - \frac{m+k}{N}\right).$$

Здесь $q(m, u)$ — вероятность события $x, \varphi(x), \dots, \varphi^{u-1}(x) \notin \{1, \dots, m\}$. Значения $p_{(m,v),(m+u,v)}$, $p_{(m,v),(m+u,v+1)}$ можно вычислить заранее. Множество состояний укрупненной цепи состоит из $O(N^2)$ элементов; ввиду того, что в каждой строке матрицы вероятностей переходов отличны от 0 не более $2N$ элементов, вычисление изменения распределения цепи за один шаг можно провести за $O(N^3)$ арифметических операций, а если объединить все состояния с $v > M$ в одно поглощающее состояние — то за $O(MN^2)$ операций. Максимальное число шагов укрупненной цепи до попадания в множество финальных состояний не превышает N . Таким образом, без дополнительных упрощений (например, отбрасывания слагаемых, величина которых меньше допустимой погрешности) вычислительная сложность описанного метода почти в N раз больше вычислительной сложности точной формулы.

Результаты вычислений распределений ν_N по формулам (5) для $N = 100, 250, 500, 1000, 2000$ приведены в Таблице 1 и выделены жирным шрифтом. В каждой клеточке этой таблицы приводятся также значения, вычисленные по главным частям асимптотических формул (2) и (3) для пуассоновской и нормальной аппроксимаций соответственно. Эти результаты показывают, что для рассмотренных значений N предельные теоремы дают не очень хорошие аппроксимации в центральной части распределений.

Таблица 1. Точные распределения $P\{\nu_N = v\}$ чисел компонент равновероятных отображений и их пуассоновские и нормальные аппроксимации

v	$N = 100$	$N = 250$	$N = 500$	$N = 1000$	$N = 2000$
1	0.1220996	0.0779592	0.0553925	0.0393032	0.0278594
Pois	0.2302585	0.1746039	0.1389629	0.1092212	0.0849807
Normal	0.1818825	0.1369468	0.1107612	0.0897802	0.0729277
2	0.2750239	0.2110974	0.1691089	0.1335704	0.1043140
Pois	0.2650949	0.2410172	0.2158999	0.1886183	0.1614825
Normal	0.2577318	0.2162118	0.1857948	0.1580751	0.1335904
3	0.2874088	0.2708997	0.2473149	0.2191700	0.1897055
Pois	0.2034679	0.2217945	0.2236222	0.2171549	0.2045687
Normal	0.2365556	0.2376267	0.2258987	0.2083556	0.1880977
4	0.1876120	0.2212013	0.2322667	0.2325047	0.2241839
Pois	0.1171255	0.1530787	0.1737156	0.1875066	0.1943634
Normal	0.1406328	0.1818024	0.1990803	0.2055917	0.2035717
5	0.8666421	0.1299575	0.1582343	0.1799854	0.1941881
Pois	0.0539383	0.0845218	0.1079574	0.1295250	0.1477337
Normal	0.0541538	0.0968262	0.1271678	0.1518676	0.1693468
6	0.0303775	0.0588295	0.0836767	0.1087305	0.1317913
Pois	0.0206996	0.0388903	0.0559094	0.0745606	0.0935758
Normal	0.0135070	0.0358983	0.0588790	0.0839814	0.1082834
7	0.0084510	0.0214419	0.0358706	0.0535076	0.0731277
Pois	0.0068089	0.0153380	0.0248182	0.0367890	0.0508043
Normal	0.0021821	0.0092650	0.0197596	0.0347665	0.0532197
8	0.0019256	0.0064886	0.0128485	0.0221014	0.0341721
Pois	0.0019598	0.0052930	0.0096397	0.0158831	0.0241349
Normal	0.0002283	0.0016646	0.0048065	0.0107745	0.0201052
9	0.0003678	0.0016677	0.0039324	0.0078335	0.013745
Pois	0.0005014	0.0016236	0.0033282	0.0060954	0.0101915
Normal	0.0000155	0.0002082	0.0008475	0.0024997	0.0058381
10	0.0000600	0.0003705	0.0010463	0.0024232	0.0048394
Pois	0.0001155	0.0004482	0.0010342	0.0021053	0.0038732
Normal	0.0000007	0.0000181	0.0001083	0.0004342	0.0013030
11	0.0000085	0.0000722	0.0002453	0.0006632	0.0015115
Pois	0.0000242	0.0001125	0.0002921	0.0006610	0.0013382
Normal	0.00000002	0.0000011	0.0000100	0.0000564	0.0002235
12	0.0000010	0.0000125	0.0000513	0.0001623	0.0004234
Pois	0.0000046	0.0000259	0.0000756	0.0001903	0.0004238
Normal	$< 10^{-9}$	0.00000005	0.0000007	0.0000055	0.0000295

Преимуществом описанного подхода, использующего цепи Маркова, является возможность его применения к более сложным моделям случайных отображений.

Например, пусть случайное отображение $\tilde{\varphi}: S \rightarrow S$ является итерацией двух независимых случайных отображений φ_1 и φ_2 , имеющих равномерное распределение на множестве всех отображений $S \rightarrow S$, а именно: $\tilde{\varphi}(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$. По отображению $\tilde{\varphi}$ можно построить процесс $\mathcal{P}^{(2)}$, аналогичный процессу $\mathcal{P}$ и содержащий информацию о множествах, на которых уже определены значения отображений φ_1 и φ_2 .

Состоянием процесса в начале $(t + 1)$ -го шага, $t = 0, 1, \dots$, является тройка $(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \nu(t))$, где $\sigma_j(t) \subset S$ — множество всех элементов $x \in S$, для которых значение $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, было определено на каком-нибудь из первых t шагов, а $\nu(t)$ — число связных компонент графа отображения $\tilde{\varphi}$, ограниченного на $\sigma_1(t)$, т. е. графа с множеством вершин $\sigma_1(t)$ и множеством ребер $(x, \tilde{\varphi}(x))$, $x \in \sigma_1(t)$. В частности, $(\sigma_1(0), \sigma_2(0), \nu(0)) = (\emptyset, \emptyset, 0)$.

Шаг с номером $t = 1, 2, \dots$ начинается с выбора произвольного элемента x множества $S \setminus \sigma_1(t - 1)$; на нем значения отображений φ_1 , $\tilde{\varphi}$ еще не определены. После этого находим значения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(\varphi_1(x)) = \tilde{\varphi}(x)$, $\varphi_1(\tilde{\varphi}(x))$, $\varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}(x))) = \tilde{\varphi}^2(x), \dots$ до тех пор, пока не появится значение $\tilde{\varphi}^{\tau(t)}(x) \in \sigma_1(t - 1) \cup \{x, \tilde{\varphi}(x), \dots, \tilde{\varphi}^{\tau(t)-1}(x)\}$, на котором к этому моменту отображения φ_1 и $\tilde{\varphi}$ уже определены. Тогда t -й шаг заканчивается. Возможны два варианта: либо $\tilde{\varphi}^{\tau(t)}(x) \in \sigma_1(t - 1)$, либо $\tilde{\varphi}^{\tau(t)}(x) \in \{x, \tilde{\varphi}(x), \dots, \tilde{\varphi}^{\tau(t)-1}(x)\}$. В первом случае все элементы построенной цепочки присоединяются к одной из ранее образовавшихся связных компонент отображения $\tilde{\varphi}$, во втором они порождают новую связную компоненту. Таким образом, в конце каждого шага процесса $\mathcal{P}^{(2)}$ число связных компонент либо не изменяется, либо увеличивается на 1. Когда все элементы множества S будут исчерпаны, число связных компонент определится полностью.

События, приводящие к указанным двум вариантам, отличаются от событий в процессе $\mathcal{P}$. Первый вариант ($\tilde{\varphi}^{\tau(t)}(x) \in \sigma_1(t - 1)$) реализуется, если либо $\varphi_1(\tilde{\varphi}^{\tau(t)-1}(x)) \in \sigma_2(t - 1)$, либо $\varphi_1(\tilde{\varphi}^{\tau(t)-1}(x)) \notin \sigma_2(t - 1)$, но $\varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}^{\tau(t)-1}(x))) \in \sigma_1(t - 1)$. Второй вариант реализуется, если $\varphi_1(\tilde{\varphi}^{\tau(t)-1}(x)) \notin \sigma_2(t - 1)$ и $\tilde{\varphi}^{\tau(t)}(x) \in \{x, \tilde{\varphi}(x), \dots, \tilde{\varphi}^{\tau(t)-1}(x)\}$.

Аналогично предыдущему, если φ_1 , φ_2 — случайные отображения, процесс $\mathcal{P}^{(2)} = \{(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \nu(t))\}_{t \geq 0}$ тоже является случайным с множеством состояний $2^S \times 2^S \times \{0, 1, \dots, N\}$. Начальным состоянием процесса является $\{(\emptyset, \emptyset, 0)\}$; состояния $(s, v, n) \in 2^S \times 2^S \times \{0, 1, \dots, N\}$ с $s = S$ — поглощающие. Проекция финального распределения процесса $\mathcal{P}^{(2)}$ на множестве

$\{S\} \times 2^S \times \{1, \dots, N\}$ на третий сомножитель $\{1, \dots, N\}$ дает распределение числа компонент отображения $\tilde{\varphi}$.

Если случайное отображение $\tilde{\varphi}$ таково, что случайные образы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), x \in S$, элементов независимы, и при любом $t = 0, 1, \dots$ на $(t + 1)$ -м шаге начальный элемент $x \in S \setminus \sigma_1(t)$ выбирается независимо от значений отображений φ_1, φ_2 на множествах $\sigma_1(t), \sigma_2(t)$ соответственно, то при фиксированных $\sigma_1(t), \sigma_2(t)$ распределение последовательности $x, \varphi_1(x), \tilde{\varphi}(x), \varphi_1(\tilde{\varphi}(x)), \tilde{\varphi}^2(x), \dots, \tilde{\varphi}^{\tau(t+1)}(x)$ (и, значит, последовательности $\{(\sigma_1(s), \sigma_2(s), \nu(s))\}_{s>t}$) зависит только от $\sigma_1(t), \sigma_2(t), \nu(t)$ и не зависит от предыстории $\{(\sigma_1(s), \sigma_2(s), \nu(s))\}_{0 \leq s < t}$; иными словами, для независимых отображений φ_1, φ_2 с независимыми образами элементов процесс $\mathcal{P}^{(2)}$ является марковским.

Если φ_1, φ_2 — независимые случайные равновероятные отображения, то для них образы элементов множества S не только независимы, но и равномерно распределены на S . Поэтому марковский процесс $\mathcal{P}^{(2)}$ допускает укрупнение состояний: последовательность $\{(|\sigma_1(t)|, |\sigma_2(t)|, \nu(t))\}_{t \geq 0}$ является цепью Маркова с дискретным временем и множеством состояний, содержащимся в $\{0, 1, \dots, N\}^3$. Число состояний укрупненной цепи Маркова существенно меньше, чем число $(N + 1)2^{2N}$ состояний исходной цепи, и это позволяет находить финальное распределение, последовательно вычисляя распределения $\{(|\sigma_1(t)|, |\sigma_2(t)|, \nu(t))\}, t = 0, 1, \dots$, с помощью матрицы переходных вероятностей.

Выведем формулы для переходных вероятностей укрупненной цепи. Из состояния $(|\sigma_1(t)|, |\sigma_2(t)|, \nu(t)) = (m_1, m_2, v)$ укрупненная цепь может перейти только в состояния

$$\begin{aligned} & (m_1 + u, m_2 + u, v), \quad (m_1 + u, m_2 + u - 1, v), \\ & (m_1 + u, m_2 + u, v + 1), \quad (m_1 + u, m_2 + u - 1, v + 1), \end{aligned}$$

где $u \in \{1, 2, \dots, N - m_1\}$.

Переход $(m_1, m_2, v) \rightarrow (m_1 + u, m_2 + u, v)$ происходит, когда

$$(|\sigma_1(t)|, |\sigma_2(t)|, \nu(t)) = (m_1, m_2, v),$$

$$\varphi_1(x), \varphi_1(\tilde{\varphi}(x)), \dots, \varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-1}(x)) \notin \sigma_2(t) \text{ попарно различны,}$$

$$x, \varphi_2(\varphi_1(x)), \varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}(x))), \dots, \varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-2}(x))) \notin \sigma_1(t) \text{ попарно различны}$$

и

$$\varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-1}(x))) = \tilde{\varphi}^u(x) \in \sigma_1(t);$$

поэтому

$$P_{(m_1, m_2, v), (m_1+u, m_2+u, v)} = \\ = \frac{m_1}{N} \left(1 - \frac{m_2}{N}\right) \prod_{k=1}^{u-1} \left(1 - \frac{m_1+k}{N}\right) \left(1 - \frac{m_2+k}{N}\right). \quad (6)$$

Переход $(m_1, m_2, v) \rightarrow (m_1 + u, m_2 + u - 1, v)$ происходит, когда

$$(|\sigma_1(t)|, |\sigma_2(t)|, \nu(t)) = (m_1, m_2, v), \\ \varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-1}(x)) \in \sigma_2(t),$$

и при $u > 1$

$$\varphi_1(x), \varphi_1(\tilde{\varphi}(x)), \dots, \varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-2}(x)) \notin \sigma_2(t) \text{ попарно различны,} \\ x, \varphi_2(\varphi_1(x)), \varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}(x))), \dots, \varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-2}(x))) \notin \sigma_1(t) \text{ попарно различны;}$$

поэтому

$$P_{(m_1, m_2, v), (m_1+u, m_2+u-1, v)} = \\ = \frac{m_2}{N} \prod_{k=1}^{u-1} \left(1 - \frac{m_1+k}{N}\right) \left(1 - \frac{m_2+k-1}{N}\right). \quad (7)$$

Переход $(m_1, m_2, v) \rightarrow (m_1 + u, m_2 + u, v + 1)$ происходит, когда

$$(|\sigma_1(t)|, |\sigma_2(t)|, \nu(t)) = (m_1, m_2, v), \\ \varphi_1(x), \varphi_1(\tilde{\varphi}(x)), \dots, \varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-1}(x)) \notin \sigma_2(t) \text{ попарно различны,} \\ x, \varphi_2(\varphi_1(x)), \varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}(x))), \dots, \varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-2}(x))) \notin \sigma_1(t) \text{ попарно различны}$$

и

$$\tilde{\varphi}^u(x) \in \{x, \tilde{\varphi}(x), \dots, \tilde{\varphi}^{u-1}(x)\};$$

поэтому

$$P_{(m_1, m_2, v), (m_1+u, m_2+u, v+1)} = \\ = \frac{u}{N} \left(1 - \frac{m_2}{N}\right) \prod_{k=1}^{u-1} \left(1 - \frac{m_1+k}{N}\right) \left(1 - \frac{m_2+k}{N}\right). \quad (8)$$

Переход $(m_1, m_2, v) \rightarrow (m_1 + u, m_2 + u - 1, v + 1)$ происходит, когда

$$(|\sigma_1(t)|, |\sigma_2(t)|, \nu(t)) = (m_1, m_2, v), \\ \varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-1}(x)) \in \sigma_2(t),$$

и при $u > 1$

$\varphi_1(x), \varphi_1(\tilde{\varphi}(x)), \dots, \varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-2}(x)) \notin \sigma_2(t)$ попарно различны,
 $x, \varphi_2(\varphi_1(x)), \varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}(x))), \dots, \varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-2}(x))) \notin \sigma_1(t)$ попарно различны;

поэтому

$$\begin{aligned} & P_{(m_1, m_2, v), (m_1+u, m_2+u-1, v+1)} = \\ & = \frac{u-1}{N} \prod_{k=1}^{u-1} \left(1 - \frac{m_1+k}{N}\right) \left(1 - \frac{m_2+k-1}{N}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, если $q^{(2)}(m_1, m_2, u) = \prod_{k=1}^{u-1} \left(1 - \frac{m_1+k}{N}\right) \left(1 - \frac{m_2+k}{N}\right)$,
 то в силу (6)–(9)

$$P_{(m, n, v), (m+u, n+u-r, v+s)} = \begin{cases} \frac{m}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) q^{(2)}(m, n, u), & r=0, s=0, \\ \frac{n}{N} q^{(2)}(m, n-1, u), & r=1, s=0, \\ \frac{u}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) q^{(2)}(m, n, u), & r=0, s=1, \\ \frac{u-1}{N} q^{(2)}(m, n-1, u), & r=1, s=1. \end{cases} \quad (10)$$

Значения $p_{(m, n, v), (m+u, n+u-r, v+s)}$ можно вычислить заранее. Множество состояний укрупненной цепи состоит из $O(N^3)$ элементов; ввиду того, что в каждой строке матрицы вероятностей переходов отличны от 0 не более $4N$ элементов, вычисление изменения распределения цепи за один шаг можно провести за $O(N^4)$ арифметических операций, а если объединить все состояния с $v > M$ в одно поглощающее состояние — то за $O(MN^3)$ операций. Максимальное число шагов укрупненной цепи до попадания в множество финальных состояний не превышает N .

В Таблице 2 жирным шрифтом выделены распределения $\mathbf{P}\{\nu_N = v\}$ чисел компонент для итерации двух равновероятных отображений, а светлым шрифтом, для сравнения, — распределения чисел компонент для равновероятных отображений. Видно, что при переходе от равновероятных отображений к их итерациям распределение чисел компонент смещается к 0.

Предложенные выше алгоритмы легко модифицировать, например, для вычисления распределений числа циклических точек λ_N случайного отображения множества $S = \{1, \dots, N\}$ в себя. Для этого достаточно заменить в процессах последовательного определения отображений последнюю компоненту, соответствующую числу связных компонент, суммой длин циклов уже образовавшихся компонент.

Таблица 2. Распределения $\mathbf{P}\{\nu_N = v\}$ чисел компонент итераций двух случайных равновероятных отображений и обычных случайных равновероятных отображений

v	$N = 100$	$N = 250$	$N = 500$
1	0.1690868	0.1088116	0.0776160
равномер.	0.1220996	0.0779592	0.0553925
2	0.3236249	0.2574377	0.2103012
равномер.	0.2750239	0.2110974	0.1691089
3	0.2815114	0.2848833	0.2703307
равномер.	0.2874088	0.2708997	0.2473149
4	0.1502782	0.1983643	0.2213276
равномер.	0.1876120	0.2212013	0.2322667
5	0.0558797	0.0984071	0.1305063
равномер.	0.8666421	0.1299575	0.1582343
6	0.0155402	0.0372840	0.0593502
равномер.	0.0303775	0.0588295	0.0836767
7	0.0033840	0.0112814	0.0217518
равномер.	0.0084510	0.0214419	0.0358706
8	0.0005959	0.0028128	0.0066252
равномер.	0.0019256	0.0064886	0.0128485
9	0.0000869	0.0002813	0.0017155
равномер.	0.0003678	0.0016677	0.0039324
10	0.0000107	0.0001068	0.0003843
равномер.	0.0000600	0.0003705	0.0010463
11	0.0000011	0.0000168	0.0000755
равномер.	0.0000085	0.0000722	0.0002453
12	0.0000001	0.0000023	0.0000132
равномер.	0.0000010	0.0000125	0.0000513

В случае равновероятных отображений точная формула для распределения λ_N приведена в [5], см. также [1]:

$$\mathbf{P}\{\lambda_N = n\} = \frac{n(N-1)!}{N^n(N-n)!}. \quad (11)$$

Известно также предельное распределение числа циклических точек:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N^{-1/2}\lambda_N \geq z\} = e^{-z^2/2}. \quad (12)$$

Мы опишем переходные вероятности цепей Маркова для равновероятных отображений и итераций двух равновероятных отображений, чтобы выявить их различия.

Если $\varphi: S \rightarrow S$ — равновероятное отображение, то при условии, что на t -м шаге образуется новая связная компонента размера u (т. е. при условии $\min\{k: \varphi^k(x) \in \{x, \varphi(x), \dots, \varphi^{k-1}(x)\}\} = u$), длина ее цикла имеет равномерное распределение на множестве $\{1, \dots, u\}$. Поэтому формулы для переходных вероятностей цепи Маркова $\{(|\sigma(t)|, \lambda(t))\}_{t \geq 0}$, где $|\sigma(t)|$ — число элементов множества $\sigma(t)$ тех $x \in S$, для которых значение $\varphi(x)$ было определено на каком-нибудь из первых t шагов, а $\lambda(t)$ — число циклических точек в $\sigma(t)$, имеют следующий вид:

$$p_{(m,v),(m+u,v)} = \frac{m}{N} q(m, u), \quad p_{(m,v),(m+u,v+j)} = \frac{1}{N} q(m, u), \quad j = 1, \dots, u, \quad (13)$$

$$q(m, u) = \prod_{k=1}^{u-1} \left(1 - \frac{m+k}{N}\right).$$

Если случайное отображение $\tilde{\varphi}(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$ строится как итерация двух независимых равновероятных отображений $\varphi_1, \varphi_2: S \rightarrow S$, то следует рассматривать цепь Маркова $\{(|\sigma_1(t)|, |\sigma_2(t)|, \lambda(t))\}_{t \geq 0}$, где $\sigma_j(t) \subset S$ — множество всех элементов $x \in S$, для которых значение $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, было определено на каком-нибудь из первых t шагов, а $\lambda(t)$ — число циклических точек в $\sigma_1(t)$. При условии, что на t -м шаге образуется новая связная компонента размера u (т. е. при условии $|\sigma_1(t)| - |\sigma_1(t-1)| = \min\{k: \tilde{\varphi}^k(x) \in \{x, \tilde{\varphi}(x), \dots, \tilde{\varphi}^{k-1}(x)\}\} = u$), длина ее цикла $\lambda(t)$ имеет распределение, немного отличающееся от равномерного распределения на множестве $\{1, \dots, u\}$:

$$\mathbf{P}\{\lambda(t) = s \mid |\sigma_1(t)| - |\sigma_1(t-1)| = u\} = \begin{cases} \frac{2 - \frac{u-1}{N}}{2u-1-u\frac{u-1}{N}}, & s = 1, \dots, u-1, \\ \frac{1 - \frac{u-1}{N}}{2u-1-u\frac{u-1}{N}}, & s = u, \end{cases}$$

так как

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{\varphi}^u(x) = \tilde{\varphi}^{u-s}(x)\} &= \mathbf{P}\{\varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-1}(x)) = \varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-s-1}(x))\} + \\ &+ \mathbf{P}\{\varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-1}(x)) \notin \{\varphi_1(x), \dots, \varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-2}(x))\}, \varphi_2(\varphi_1(\tilde{\varphi}^{u-1}(x))) = \tilde{\varphi}^{u-s}(x)\} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N} \left(2 - \frac{u-1}{N}\right), & s = 1, \dots, u-1, \\ \frac{1}{N} \left(1 - \frac{u-1}{N}\right), & s = u. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Поэтому переходные вероятности цепи Маркова $\{(|\sigma_1(t)|, |\sigma_2(t)|, \lambda(t))\}_{t \geq 0}$ имеют вид

$$P_{(m,n,v),(m+u,n+u-r,v+s)} = \begin{cases} \frac{m}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) q^{(2)}(m, n, u), & r = 0, s = 0, \\ \frac{n}{N} q^{(2)}(m, n - 1, u), & r = 1, s = 0, \\ \frac{1}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) q^{(2)}(m, n, u), & r = 0, s = 1, \dots, u, \\ \frac{1}{N} q^{(2)}(m, n - 1, u), & r = 1, s = 1, \dots, u - 1. \end{cases} \quad (15)$$

Таблица 3. Функции распределения $\mathbf{P}\{\lambda_N \leq v\}$ чисел циклических точек случайных равновероятных отображений и итераций двух равновероятных отображений

v	отображение	$N = 100$	$N = 225$	$N = 400$
1	равновер.	0.0100000	0.0044444	0.0025000
	итерация	0.0199000	0.0088691	0.0049937
5	равновер.	0.1417223	0.0650073	0.0369723
	итерация	0.2633593	0.1257887	0.0725776
10	равновер.	0.4346591	0.2199038	0.1295275
	итерация	0.6803897	0.3914499	0.2422777
15	равновер.	0.7184084	0.4207493	0.2621036
	итерация	0.9207062	0.6644686	0.4555088
20	равновер.	0.8956804	0.6182711	0.4138654
	итерация	0.9891174	0.8542830	0.6564462
25	равновер.	0.9717867	0.7773893	0.5640980
	итерация	0.9992040	0.9504445	0.8099894
30	равновер.	0.9945462	0.8854728	0.6967590
	итерация	0.9999703	0.9868835	0.9080449
35	равновер.	0.9992645	0.9481865	0.8028475
	итерация	0.9999995	0.9973154	0.9611309
40	равновер.	0.9999327	0.9794564	0.8803181
	итерация	0.9999999	0.9995780	0.9856762
45	равновер.	1.0000000	0.9928870	0.9322276
	итерация	1.0000000	0.9999494	0.9954069
50	равновер.	1.0000000	0.9978574	0.9642358
	итерация	1.0000000	0.9999954	0.9987209
55	равновер.	1.0000000	0.9994408	0.9824298
	итерация	1.0000000	0.9999997	0.9996913
60	равновер.	1.0000000	0.9998741	0.9919723
	итерация	1.0000000	1.0000000	0.9999355
матем.ож.	равновер.	12.2089414	18.4715471	24.7240632
	итерация	8.7158770	13.1402552	17.5680100
дисперсия	равновер.	38.6866151	90.2149091	162.790770
	итерация	19.9319649	46.0176380	82.8337996

Таблица 3 содержит значения вычисленных по формулам (13) и (11) функций распределения и первых двух моментов числа λ_N циклических точек равновероятного отображения, а также вычисленных по формулам (14) функций распределения и первых двух моментов числа циклических точек итерации двух равновероятных отображений для $N = 100, 225, 400$. Видно, что в обоих случаях число циклических точек растет приблизительно пропорционально $\sqrt{N}$, но (судя по моментам) коэффициент пропорциональности для итерации двух отображений примерно в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем для равновероятных отображений.

Список литературы

1. Колчин В. Ф. Один класс предельных теорем для условных распределений. — Лит. матем. сб., 1968, т. 8, № 1, с. 53–63.
2. Колчин В. Ф. Случайные отображения. — М.: Наука, 1984.
3. Flajolet P., Odlyzko A. M. Random mapping statistics. — Lect. Notes Comp. Sci., 1989, v. 434, p. 329–354.
4. Harris B. A survey of the early history of the theory of random mappings. — In: Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. — Moscow: TVP–VSP, 1993, p. 1–22.
5. Harris B. Probability distributions related to random mappings. — Ann. Math. Statist., 1960, v. 31, № 4, p. 1045–1062.