Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Сачков, Случайные подстановки с трансформированными циклами, *Матем. вопр. криптогр.*, 2012, том 3, выпуск 4, 127–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk70>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:47:31

УДК 519.212.2

Случайные подстановки с трансформированными циклами

В. Н. Сачков

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 20.V.2011

Рассматриваются случайные подстановки, для циклов которых определяются два типа трансформации: детерминированная и вероятностная. Получены точные и предельные распределения для чисел нетрансформированных циклов и r -циклов, для чисел элементов в областях транзитивности, определяемых такими циклами.

Ключевые слова: случайные подстановки, трансформация циклов, производящие функции, предельные распределения: нормальное, пуассоновское, J -распределение

Random substitutions with transformed cycles

V. N. Sachkov

Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow

Abstract. Let for the cycles of a random substitution two types of transformations are defined: deterministic and stochastic. We obtain exact and asymptotic distributions for the numbers of nontransformed cycles and r -cycles, for the cardinalities of the transitivity domains defined by such cycles.

Key words: random substitutions, cycle transformations, generating functions, limit distributions: normal, Poisson, J -distribution

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2012, vol. 3, no. 4, pp. 127–150 (Russian).

Введение

Пусть G_n — некоторая совокупность подстановок степени n , на которой задано вероятностное распределение $\mathbf{P}$. К каждой реализации $s \in G_n$ применим случайное или детерминированное преобразование $\mathbf{L}$, определяющее процесс трансформации циклов подстановки s . В результате действия $\mathbf{L}$ на циклы s подстановка s с заданной вероятностью или детерминированно переходит в некоторую подстановку s' степени $n' \leq n$.

Трансформации циклов подстановки $s \in G_n$ могут быть двух типов.

Тип 1. Вероятность трансформации или детерминированное преобразование некоторого цикла $s \in G_n$ зависит от элементов области транзитивности, определяемой данным циклом. Примером трансформации типа 1 является преобразование циклов подстановки, определяемое оператором редукцирования $R_{nm} = R_n(M)$, где M — заданное подмножество множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $|M| = n - m$ [5]. Если $G_n = S_n$, где S_n — симметрическая группа степени n , и $s \in S_n$ — случайная равновероятная подстановка, то вероятность того, что цикл длины j оказывается нетрансформированным после действия оператора R_{nm} , равна $(m)_j / (n)_j$.

Другим примером трансформации типа 1 являются неполные подстановки. В этом случае для каждого элемента $a \in N$, принадлежащего области транзитивности заданного цикла подстановки $s \in G_n$, определена вероятность p , с которой в результате действия схемы $\mathbf{L}$ элемент a остается неизменным, и с вероятностью q переходит в некоторый внешний элемент $\emptyset \notin N$, $p + q = 1$. Если все элементы области транзитивности цикла остаются неизменными после действия схемы $\mathbf{L}$, то соответствующий цикл называется *нетрансформированным*. В противном случае цикл считается *трансформированным*.

Отметим, что для случайной подстановки $s \in S_n$ при замене любых m элементов из N символами $\emptyset$ вероятность того, что цикл длины j не трансформирован после такой замены, равна также $(m)_j / (n)_j$.

Тип 2. В этом случае вероятность трансформации циклов подстановки $s \in G_n$ зависит только от общих параметров этих циклов (например, их длины) и не зависит от состава элементов соответствующих им областей транзитивности.

Во всех случаях трансформация типа 2 действует независимо на каждом из циклов подстановки $s \in G_n$.

В статье изучаются точные и предельные распределения таких случайных величин, как общее число нетрансформированных циклов и число нетрансформированных r -циклов случайной подстановки s' , а также число элементов в областях транзитивности нетрансформированных циклов. Полученные при $n \rightarrow \infty$ предельные распределения являются в основном либо нормальными, либо пуассоновскими, либо вырожденными. Исключение составляет случай, когда вероятность не подвергнуться трансформации типа 2 для k -цикла асимптотически эквивалентна $\lambda \frac{k}{n}$, $k = \text{const}$. В этом случае получено некоторое нестандартное распределение, названное J -распределением. Оно выражается через функцию Бесселя первого рода $J_k(x)$.

Отметим, что, хотя трансформации типа 1 и типа 2 имеют различные вероятностные схемы, при $n \rightarrow \infty$ эти схемы в некоторых случаях становятся асимптотически эквивалентными. Это подтверждается, в частности, совпадением предельных распределений рассматриваемых случайных величин.

§ 1. Точные распределения и производящие функции

1⁰. Рассмотрим сначала трансформацию циклов типа 2, когда трансформация осуществляется независимо на циклах подстановки $s \in G_n$, причем p_k — вероятность того, что k -цикл оказывается нетрансформированным. Рассмотрим случайную величину $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, где ξ_l — число нетрансформированных l -циклов в случайно равномерно выбранной подстановке $s \in G_n$. Обозначим через $G_n(\alpha)$ цикловой класс $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$ в множестве G_n . Полагая, что $|X|$ — число элементов конечного множества X , имеем

$$\mathbf{P}(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_n = k_n) = \frac{1}{|G_n|} \sum_{G_n(\alpha)} |G_n(\alpha)| \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{k_j} p_j^{k_j} q_j^{\alpha_j - k_j}, \quad (1.1)$$

где $p_j + q_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, и суммирование проводится по всем цикловым классам G_n .

Если ξ — число нетрансформированных циклов в случайной подстановке $s \in G_n$, то

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{1}{|G_n|} \sum_{G_n(\alpha)} |G_n(\alpha)| \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k} \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{k_j} p_j^{k_j} q_j^{\alpha_j - k_j}, \quad (1.2)$$

где второе суммирование производится по всем целочисленным решениям уравнения $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$, $k_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$.

Для числа ξ_r нетрансформированных r -циклов $s \in G_n$ имеем распределение

$$\mathbf{P}(\xi_r = k) = \frac{1}{|G_n|} \sum_{G_n(\alpha)} |G_n(\alpha)| \binom{\alpha_r}{k} p_r^k q_r^{\alpha_r - k}, \quad (1.3)$$

где суммирование производится по всем цикловым классам. Если для циклового класса $\alpha_r = 0$, то $\mathbf{P}(\xi_r = 0) = 1$.

Если κ_n — число элементов в областях транзитивности, соответствующих нетрансформированным циклам, то

$$\mathbf{P}(\kappa_n = k) = \frac{1}{|G_n|} \sum_{G_n(\alpha)} |G_n(\alpha)| \sum_{1k_1 + \dots + nk_n = k} \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{k_j} p_j^{k_j} q_j^{\alpha_j - k_j}. \quad (1.4)$$

Рассмотрим теперь производящие функции приведенных распределений случайных величин. Производящая функция для $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ имеет вид

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{k_1=0}^n \dots \sum_{k_n=0}^n \mathbf{P}(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_n = k_n) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} = \\ &= \frac{1}{|G_n|} \sum_{G_n(\alpha)} |G_n(\alpha)| \prod_{j=1}^n (p_j x_j + q_j)^{\alpha_j}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если $C(y_1, y_2, \dots, y_n; G_n)$ — цикловой индикатор G_n , то [6]

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|G_n|} C(p_1 x_1 + q_1, \dots, p_n x_n + q_n; G_n). \quad (1.6)$$

Отсюда следует выражение для производящей функции ξ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\xi = k) x^k = f(x, x, \dots, x) = \frac{1}{|G_n|} C(p_1 x + q_1, \dots, p_n x + q_n; G_n). \quad (1.7)$$

Аналогичным образом из (1.6) получаем производящую функцию для ξ_r :

$$f_n(x; r) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/r \rfloor} \mathbf{P}(\xi_r = k) x^k = f(1, \dots, x, \dots, 1) = \frac{1}{|G_n|} C(1, \dots, p_r x + q_r, \dots, 1; G_n), \quad (1.8)$$

где отличный от единицы аргумент стоит на r -м месте.

Каждый цикл длины l определяет область транзитивности из l элементов, поэтому в соответствии с формулами (1.6) и (1.7) производящая функция для κ_n имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\kappa_n = k) x^k = f(x, x^2, \dots, x^n) = \\ &= \frac{1}{|G_n|} C(p_1 x + q_1, p_2 x^2 + q_2, \dots, p_n x^n + q_n; G_n).\end{aligned}\quad (1.9)$$

Используя тот же принцип, можно получать выражения для производящих функций других случайных величин, являющихся функциями от $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

2⁰. Возьмем в качестве G_n симметрическую группу S_n . Из известного выражения для ее циклового индикатора $C_n(y_1, y_2, \dots, y_n)$ [6] следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} C_n(p_1 x_1 + q_1, \dots, p_n x_n + q_n) \frac{t^n}{n!} &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (p_k x_k + q_k) \frac{t^k}{k} \right\} = \\ &= \frac{1}{1-t} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} p_k (x_k - 1) \frac{t^k}{k} \right\}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Из формул (1.5) и (1.10) получаем выражение для производящей функции распределения $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} \sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \frac{p_{j_1} \dots p_{j_k}}{j_1 \dots j_k} (x_{j_1} - 1) \dots (x_{j_k} - 1), \quad (1.11)$$

где последнее суммирование проводится по всем решениям уравнения $j_1 + \dots + j_k = j$ в целых положительных числах.

Из формул (1.7) и (1.11) получаем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Производящая функция ξ имеет вид*

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(x-1)^k}{k!} \sum_{j=k}^n \sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \frac{p_{j_1} \dots p_{j_k}}{j_1 \dots j_k}. \quad (1.12)$$

Для биномиальных моментов ξ справедлива формула

$$B_{kn} = \mathbf{M} \left(\binom{\xi}{k} \right) = \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^n \sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \frac{p_{j_1} \dots p_{j_k}}{j_1 \dots j_k}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.13)$$

Среднее значение ξ равно

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{j}. \quad (1.14)$$

Далее, используя формулу обращения, из равенства (1.13) получаем следствие.

Следствие 1. Распределение ξ имеет вид

$$\mathbf{P}(\xi = r) = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=k+r}^n \sum_{j_1+\dots+j_{k+r}=j} \frac{p_{j_1} \dots p_{j_{k+r}}}{j_1! \dots j_{k+r}!}, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (1.15)$$

Теорема 1.2. Биномиальный момент k -го порядка для ξ_r имеет вид

$$B_k(r) = \mathbf{M} \left(\xi_r \right)_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{p_r}{r} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.16)$$

Распределение ξ_r определяется формулой

$$\mathbf{P}(\xi_r = r) = \sum_{j=k}^{\lfloor n/r \rfloor} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \frac{p_r^j}{j! r^j}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.17)$$

Доказательство равенства (1.17) следует из соотношения (1.16) применением формулы обращения.

Для производящей функции $\varphi_n(x)$ случайной величины κ_n имеем соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (p_k x^k + q_k) \frac{t^k}{k} \right\}, \quad (1.18)$$

из которого находим, что

$$\mathbf{P}(\kappa_n = k) = \frac{1}{k!(n-k)!} C_k(p_1, \dots, p_k) C_{n-k}(q_1, \dots, q_{n-k}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.19)$$

Используя полиномы Белла, определяемые равенством [6]

$$Y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1k_1+\dots+nk_n=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{x_1}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{x_n}{n!} \right)^{k_n},$$

можно также записать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\kappa_n = k) &= \frac{1}{k!(n-k)!} Y_k(0!p_1, \dots, (k-1)!p_k) \times \\ &\times Y_{n-k}(0!q_1, \dots, (n-k-1)!q_{n-k}), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

3⁰. Рассмотрим в качестве G_n знакопеременную группу A_n , и пусть B_n — совокупность всех нечетных подстановок. Цикловой индикатор A_n следующим образом выражается через цикловой индикатор S_n :

$$C_n(y_1, y_2, \dots, y_n; A_n) = \frac{1}{2} [C_n(y_1, y_2, \dots, y_n) + C_n(y_1, -y_2, \dots)]. \quad (1.20)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n(p_1 x_1 + q_1, \dots, p_n x_n + q_n; A_n) \frac{t^n}{n!} = \\ & = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (p_k x_k + q_k) \frac{t^k}{k} \right\} + \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (p_k x_k + q_k) \frac{t^k}{k} \right\}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Аналогично для циклового индикатора множества нечетных подстановок имеем

$$C_n(y_1, y_2, \dots, y_n; B_n) = \frac{1}{2} [C_n(y_1, y_2, \dots, y_n) - C_n(y_1, -y_2, \dots)]. \quad (1.22)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n(p_1 x_1 + q_1, \dots, p_n x_n + q_n; B_n) \frac{t^n}{n!} = \\ & = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (p_k x_k + q_k) \frac{t^k}{k} \right\} + \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (p_k x_k + q_k) \frac{t^k}{k} \right\}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

4⁰. Рассмотрим теперь случаи трансформации циклов типа 1.

Пусть трансформация циклов задана оператором редуцирования R_{nm} , определяемым отображением

$$R_{nm} : S_n \rightarrow S_m,$$

где симметрическая группа S_m определена на фиксированном подмножестве $M \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, $|M| = m$, $1 \leq m \leq n-1$. Если ξ — число нетрансформированных циклов в случайной подстановке, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi = k) &= \sum_{v=k}^n \frac{C(n, v)}{n!} \sum_{j=k}^m \binom{m}{j} \frac{C(j, k) C(n-m, v-k)}{C(n, v)} \times \\ &\times (n-j-1)_{m-j}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где $\frac{C(n, \nu)}{n!}$ — вероятность того, что случайная подстановка $s \in S_n$ имеет ν циклов, а сумма по j дает условную вероятность получения k циклов в результате редуцирования. Меняя порядок суммирования в правой части равенства (1.24) и используя соотношение $\sum_{\nu=0}^n C(n, \nu) = n!$, из (1.24) получаем следующую теорему.

Теорема 1.3. *Вероятностное распределение случайной величины ξ имеет вид*

$$P(\xi = k) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{j=k}^m \binom{n-j-1}{m-j} \frac{C(j, k)}{j!}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.25)$$

Производящая функция ξ определяется равенством

$$f_{nm}(x) = \frac{(n+x-1)_m}{(n)_m}. \quad (1.26)$$

Формула (1.26) следует из равенства (1.25) с использованием соотношения [6]

$$\sum_{k=0}^j C(j, k) x^k = (j+x-1)_j.$$

Теорема 1.4. *Число ξ_r нетрансформированных при редуцировании r -циклов случайной подстановки $s \in S_n$ имеет следующее распределение:*

$$P(\xi_r = k) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{j=kr}^m \binom{n-j-1}{m-j} \frac{C_{jk}(r)}{j!}, \quad (1.27)$$

где

$$C_{jk}(r) = \frac{1}{r^k k!} \sum_{i=0}^{[j/r]-k} \frac{(-1)^i}{r^i j!} \quad (1.28)$$

есть число подстановок степени j , имеющих k r -циклов.

Производящая функция ξ_r имеет выражение

$$P_{nm}(x; r) = \sum_{k=0}^{[m/r]} P(\xi_r = k) x^k = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=0}^{[m/r]} \frac{(x-1)^k}{r^k k!} \sum_{j=kr}^m \binom{n-j-1}{m-j}. \quad (1.29)$$

Доказательство (1.29) следует из равенства

$$\frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{\lfloor j/r \rfloor} C_{jk}(r) x^k = \sum_{k=0}^{\lfloor j/r \rfloor} \frac{(x-1)^k}{r^k k!}, \quad (1.30)$$

которое получается с использованием (1.28).

Из равенства (1.29) получаем формулу для биномиальных моментов ξ_r :

$$B_k(n, m) = \mathbf{M} \left(\begin{matrix} \xi_r \\ k \end{matrix} \right) = \frac{1}{r^k k!} \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{j=kr}^m \binom{n-j-1}{m-j}, \quad k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor. \quad (1.31)$$

Так как

$$\sum_{j=kr}^m \binom{n-j-1}{m-j} = \binom{n-kr}{m-kr},$$

то из формулы (1.31) имеем

$$B_k(n, m) = \frac{1}{r^k k!} \frac{(m)_{kr}}{(n)_{kr}}, \quad k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor. \quad (1.32)$$

Применяя формулу обращения к (1.32), получаем следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Распределение ξ_r имеет вид*

$$\mathbf{P}(\xi_r = \nu) = \sum_{k=\nu}^{\left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \frac{1}{r^k k!} \frac{(m)_{kr}}{(n)_{kr}}, \quad \nu = 0, 1, \dots. \quad (1.33)$$

Пусть теперь κ — число элементов в областях транзитивности, не трансформированных при действии оператора редуцирования R_{nm} . Тогда

$$\mathbf{P}(\kappa = j) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^j \binom{m}{j} C(j, k) (n-j-1)_{m-j}.$$

Эту формулу можно упростить.

Теорема 1.6. *Распределение κ имеет вид*

$$\mathbf{P}(\kappa = j) = \frac{(n-m)(m)_j}{(n)_{j+1}}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (1.34)$$

Отметим, что данное распределение совпадает с распределением числа элементов областей транзитивности нетрансформированных циклов случайной неполной подстановки, в которой $n-m$ элементов заменяются элементом $\emptyset$.

§ 2. Предельные распределения

В предыдущем параграфе получены равенства, выражающие производящие функции, моменты и распределения ряда случайных величин, связанные со случайными подстановками, через $p_1, p_2, \dots, p_n$. При доказательстве предельных теорем мы используем эти формулы, предполагая, что вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$ могут изменяться вместе с n .

При отыскании предельных распределений при $n \rightarrow \infty$ для числа $\xi = \xi(n)$ нетрансформированных циклов случайной подстановки степени n будет использоваться известное утверждение, иногда называемое обращением второй предельной теоремы [1].

Теорема 2.0. Пусть моменты $\mu_j(n)$, $j=1, 2, \dots$, распределений $F_n(x)$ существуют и пределы $\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_j(n)$ являются моментами некоторого распределения $G(x)$, однозначно определяющегося своими моментами. Тогда $F_n(x)$ слабо сходятся к распределению $G(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма. Если $p_j = p_j(n)$, $j=1, 2, \dots, n$, и при $n \rightarrow \infty$ существуют пределы

$$\sum_{j=k}^n \sum_{j_1+\dots+j_k=j} \frac{p_{j_1} \dots p_{j_k}}{j_1 \dots j_k} \rightarrow \lambda^k, \quad k=0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

то распределения случайных величин $\xi = \xi(n)$ сходятся к закону Пуассона с параметром λ .

Лемма является непосредственным следствием формулы (1.13) и теоремы 2.0.

Представляет интерес случай, когда $p_k = \delta^{(k)}(n)$, $k=0, 1, \dots$.

Теорема 2.1. Если $\sqrt[k]{p_k(n)} = \delta(n)$ для всех $k=1, 2, \dots$ и при $n \rightarrow \infty$ выполнено условие

$$\delta(n) \rightarrow \delta, \quad \delta = \text{const}, \quad (2.2)$$

то распределения числа ξ нетрансформированных циклов в случайной подстановке $s \in S_n$:

а) при $0 < \delta < 1$ и $n \rightarrow \infty$ сходятся к распределению Пуассона с параметром $\lambda = -\ln(1 - \delta)$;

б) при $\delta = 1$ и $\delta(n) = 1 - O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, где $\varepsilon > 0$, асимптотически нормальны с параметрами $(\ln n, \ln n)$;

в) при $\delta = 0$ асимптотически вырождены.

Для доказательства п. а) из формулы (1.13) находим выражение для k -го биномиального момента

$$B_{kn} = \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^n \delta^j(n) \sum_{\substack{j_1+\dots+j_k=j \\ j_i>0}} \frac{1}{j_1 j_2 \dots j_k} = \sum_{j=k}^n C(j, k) \frac{\delta^j(n)}{j!},$$

где $C(j, k)$ — число подстановок степени j с k циклами. Отсюда следует формула для производящей функции биномиальных моментов

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n B_{kn} x^k = \sum_{j=0}^n \binom{x+j-1}{j} \delta^j(n). \quad (2.4)$$

Из этой формулы следует выражение для производящей функции ξ :

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{x+j-2}{j} \delta^j(n). \quad (2.5)$$

Поэтому для всех $0 \leq x < 1$, $0 < \delta < 1$ при $n \rightarrow \infty$

$$f_n(x) \rightarrow (1 - \delta)^{-(x-1)}. \quad (2.6)$$

Теперь п. а) теоремы 2.1 следует из теоремы непрерывности для производящих функций.

Из формулы (2.5) следует равенство

$$f_n(x) = \binom{x+n-1}{n} - \sum_{j=0}^n \binom{x+j-2}{j} (1 - \delta^j(n)).$$

При выполнении условий п. б) равномерно для всех $j = 0, 1, \dots, n$ имеем

$$1 - \delta^j(n) = O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right).$$

Из двух предыдущих равенств вытекает, что равномерно для всех $x \in [1 - x_0, 1 + x_0]$, $0 < x_0 < 1$, для $f_n(x)$ получено асимптотическое представление

$$f_n(x) = \binom{x+n-1}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon > 0. \quad (2.7)$$

При $n \rightarrow \infty$, используя формулу Стирлинга, из (2.7) получаем равномерно для $x \in [1 - x_0, 1 + x_0]$, $0 < x_0 < 1$,

$$f_n(x) = xn^{n-1} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(x+1)} (1 + o(1)).$$

Отсюда при $m = \sigma^2 = \ln n$ для производящей функции моментов случайной величины $(\xi - m) / \sigma$ имеем при $n \rightarrow \infty$

$$M_n(t) = e^{-mt/\sigma} e^{t/\sigma} n^{e^{t/\sigma}-1} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(e^{t/\sigma}+1)} (1 + o(1))$$

для всех $t \in [-\delta, \delta]$, $\delta > 0$. Из этого равенства для всех t при $n \rightarrow \infty$ следует, что

$$M_n(t) \rightarrow e^{t^2/2},$$

и п. б) теоремы 2.1 вытекает из теоремы Куртисса.

Доказательство п. в) очевидно.

Теорема 2.1 остается справедливой, если в ее формулировке заменить симметрическую группу S_n на знакопеременную A_n или на множество нечетных подстановок B_n . Докажем это утверждение для A_n . Доказательство для B_n аналогично.

Производящая функция $f_n^e(x)$ для числа нетрансформированных циклов случайной подстановки из A_n в соответствии с (1.21) удовлетворяет соотношению

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^e(x) t^n = (1-t)^{-1} (1 - \delta(n)t)^{-(x-1)} + (1+t)(1 + \delta(n)t)^{(x-1)}.$$

Отсюда имеем

$$f_n^e(x) = \sum_{k=0}^n \binom{x+k-2}{k} \delta^k(n) + \binom{x-1}{n} \delta^n(n) + \binom{x-1}{n-1} \delta^{n-1}(n). \quad (2.8)$$

Если $\delta(n) \rightarrow \delta$, $0 < \delta < 1$, при $n \rightarrow \infty$, то

$$f_n^e(x) \rightarrow (1 - \delta)^{-(x-1)}. \quad (2.9)$$

Это соответствует соотношению (2.6) и отвечает п. а) теоремы.

При выполнении условия п. б) теоремы из равенства (2.8) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$f_n^e(x) = \left[\binom{x+n-1}{n} + \binom{x}{n} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right) \right). \quad (2.10)$$

Из этого равенства следует, что $f_n^e(x)$ асимптотически совпадает с производящей функцией для числа циклов η^e в случайной четной подстановке. В книге [7, с. 190] доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2. *При $n \rightarrow \infty$ случайная величина $[\eta^e - \ln n](\ln n)^{-1/2}$ асимптотически нормальна с параметрами $(0,1)$.*

Аналогичное утверждение верно для случайной подстановки из множества B_n . Непосредственным следствием из теоремы 2.0 и формулы (1.16) является следующая теорема.

Теорема 2.3. *Если $p_r(n) \rightarrow p_r$ при $n \rightarrow \infty$, то распределение числа ξ_r нетрансформированных r -циклов в случайной подстановке сходится к распределению Пуассона с параметром $\lambda = p_r / r$.*

Для случайной величины κ_n имеет место следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть $p_r(n) = \delta^r(n)$ и $\delta(n) \rightarrow \delta$, $0 < \delta < 1$, при $n \rightarrow \infty$. Тогда распределения случайных величин κ_n сходятся к геометрическому распределению:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\kappa_n = k) = (1 - \delta)\delta^k, k = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

Действительно, из формулы (1.18) для производящей функции $\varphi_n(x)$ случайной величины κ_n имеем выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)t^n = \frac{1 - \delta(n)t}{(1-t)(1 - \delta(n)xt)}.$$

Отсюда находим, что

$$\varphi_n(x) = \delta^n(n) + \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \delta(n))\delta^k(n)x^k.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\kappa_n = k) = (1 - \delta)\delta^k, k = 0, 1, \dots, n-1, \mathbf{P}(\kappa_n = n) = \delta^n. \quad (2.12)$$

Соотношение (2.11) следует из равенств (2.12).

2⁰. Рассмотрим теперь поведение при $n \rightarrow \infty$ математического ожидания $\mathbf{M}\xi$ при условиях, отличающихся от указанных в п. б) теоремы 2.1. Из формулы (1.14) при $p_k = \delta^k(n)$, $k = 0, 1, \dots, n$, полагая $\delta(n) = 1 - \Delta$, $\Delta = \Delta(n)$, имеем

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \delta^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j} \binom{n}{j} \Delta^j. \quad (2.13)$$

Нетрудно проверить, что

$$H_n(\Delta) = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j} \binom{n}{j} \Delta^j = \int_0^{\Delta} [(1-x)^n - 1] \frac{dx}{x}. \quad (2.14)$$

После замены переменной в интеграле $y = nx$ получаем

$$H_n(\Delta) = \int_0^{n\Delta} \left[\left(1 - \frac{y}{n}\right)^n - 1 \right] \frac{dy}{y}. \quad (2.15)$$

Рассмотрим случай, когда при $n \rightarrow \infty$ выполнено условие $n\Delta(n) \rightarrow \gamma$, т. е.

$$(1 - \delta(n))n \rightarrow \gamma, \quad (2.16)$$

где γ — постоянная величина. В этом случае, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, из (2.15) имеем

$$H_n(\Delta) \rightarrow \int_0^{\gamma} (e^{-y} - 1) \frac{dy}{y}. \quad (2.17)$$

Представляя подынтегральную функцию в виде ряда и интегрируя ряд почленно, получаем при $n \rightarrow \infty$

$$H_n(\Delta) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma^k}{k \cdot k!}. \quad (2.18)$$

Постоянная Эйлера C определяется соотношением при [8]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \rightarrow C = 0.5772156... \quad (2.19)$$

Теперь из равенств (2.13), (2.18) и (2.19) имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}\xi - \ln n \rightarrow C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma^k}{k \cdot k!}. \quad (2.20)$$

Из соотношения (2.16) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} (1 - \delta(n))n &\rightarrow \gamma, \quad \gamma > 0, \\ (\delta(n) - 1)n &\rightarrow -\gamma, \quad \gamma < 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Поэтому из (2.20) и (2.21) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}\xi + \ln(1 - \delta(n)) \rightarrow C + \ln(\gamma) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma^k}{k \cdot k!}, \quad \gamma > 0, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{M}\xi + \ln(\delta(n) - 1) \rightarrow C + \ln(-\gamma) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma^k}{k \cdot k!}, \quad \gamma < 0. \quad (2.23)$$

Интегральная показательная функция $\text{Ei}(x)$ при $x < 0$ определяется равенством

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x e^t \frac{dt}{t} = C + \ln(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}. \quad (2.24)$$

Из соотношения (2.23) и равенства (2.24) следует, что при $n \rightarrow \infty$ и $\gamma < 0$

$$\mathbf{M}\xi + \ln(1 - \delta(n)) \rightarrow \text{Ei}(\gamma). \quad (2.25)$$

Результаты, аналогичные (2.22) и (2.23), могут быть получены и для случая, когда $n(1 - \delta(n)) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Однако их доказательство связано с более сложными оценками, использующими некоторые нестандартные результаты из математического анализа [8], и здесь не приводятся.

3⁰. Рассмотрим предельное поведение распределения числа ξ нетрансформированных циклов при действии оператора редуцирования R_{nm} на случайные подстановки.

Теорема 2.5. Если $n, m \rightarrow \infty$ и $\delta(n) = \frac{m}{n}$, то

а) при $\delta(n) \rightarrow \delta$, $0 < \delta < 1$, распределение случайной величины ξ сходится к распределению Пуассона с параметром $\lambda = -\ln(1 - \delta)$;

б) при $\delta(n) = 1 - \frac{1}{n^\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, случайная величина $\bar{\xi} = (\xi - \varepsilon \ln n) / \sqrt{\varepsilon \ln n}$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$;

в) при $\delta(n) \rightarrow 0$ распределение ξ асимптотически вырождено.

Из формулы (1.26) для производящей функции ξ имеем следующее представление:

$$f_{mn}(x) = \exp \left\{ (x-1) \sum_{k=n-m+1}^n \frac{1}{k} + \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(x-1)^j}{j} \sum_{k=n-m+1}^n \frac{1}{k^j} \right\}. \quad (2.26)$$

При выполнении условия п. а) теоремы и $n \rightarrow \infty$ отсюда следует, что для любого x

$$f_{mn}(x) \rightarrow e^{-(x-1)\ln(1-\delta)}, \quad (2.27)$$

т. е. $f_{mn}(x)$ сходится к производящей функции распределения Пуассона с параметром $\lambda = -\ln(1 - \delta)$.

При выполнении условий п. б) теоремы, используя представление (2.26), для $f_{mn}(x)$ имеем при $n \rightarrow \infty$ асимптотическую формулу

$$f_{mn}(x) = e^{(x-1)\varepsilon \ln n} (1 + o(1)) \quad (2.28)$$

с равномерной оценкой остаточного члена для всех $x \in [1 - x_0, 1 + x_0]$, $0 < x < 1$. Известно [7], что $M_{mn}(t)$ — производящая функция моментов ξ — связана с производящей функцией распределения равенством

$$M_{mn}(t) = f_{mn}(e^t). \quad (2.29)$$

Поэтому из соотношений (2.28) и (2.29) имеем

$$M_{mn}(t) = e^{(e^t-1)\varepsilon \ln n} (1 + o(1)). \quad (2.30)$$

Из формулы (1.26) нетрудно получить, что при $n \rightarrow \infty$ среднее и дисперсия имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi &= \varepsilon \ln n (1 + o(1)), \\ \mathbf{D}\xi &= \varepsilon \ln n (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Поэтому $\bar{M}_{mn}(t)$ — производящая функция моментов случайной величины $\bar{\xi} = (\xi - \varepsilon \ln n) / \sqrt{\varepsilon \ln n}$ — в соответствии с формулой (2.30) при $n \rightarrow \infty$ имеет представление

$$\bar{M}_{mn}(t) = e^{-t\sqrt{\varepsilon \ln n}} \exp\left\{\varepsilon \ln n \left(e^{t/\sqrt{\varepsilon \ln n}} - 1\right)\right\} (1 + o(1)). \quad (2.32)$$

Из равенства (2.32) следует существование предела при $n \rightarrow \infty$

$$\bar{M}_{mn}(t) \rightarrow e^{t^2/2}. \quad (2.33)$$

Так как $e^{t^2/2}$ — производящая функция моментов нормального распределения с параметрами $(0, 1)$, то в соответствии с теоремой Куртисса п. б) теоремы доказан.

Доказательство п. в) теоремы очевидно, так как при $n \rightarrow \infty$ и $\delta = 0$ имеем $f_{mn}(x) \rightarrow 1$ и, стало быть, $\mathbf{P}(\xi = 0) \rightarrow 1$.

Теорема 2.6. Если при $n \rightarrow \infty$ выполнено условие $\frac{m}{n} \rightarrow \delta$, $0 < \delta \leq 1$, то распределение числа ξ_r нетрансформированных r -циклов сходится к закону Пуассона с параметром $\lambda = \delta^r / r$.

Действительно, из формулы (1.32) для биномиальных моментов ξ_r имеем при $n \rightarrow \infty$ соотношение

$$B_k(n, m) \rightarrow \frac{1}{k!} \left(\frac{\delta^r}{r} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

из которого следует справедливость теоремы.

Аналогичным образом из точного распределения (1.34) для числа κ элементов областей транзитивности, не трансформированных при редуцировании циклов, следует, что при $n \rightarrow \infty$ и $\frac{m}{n} \rightarrow \delta$, $0 < \delta < 1$, предельным является геометрическое распределение:

$$P(\kappa = j) \rightarrow (1 - \delta)\delta^j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.34)$$

4°. Рассмотрим теперь условия, при которых предельные распределения чисел нетрансформированных циклов для трансформаций типа 1 и типа 2 совпадают.

Теорема 2.7. Если при трансформации циклов $p_k = \frac{(m)_k}{(n)_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, и при $n \rightarrow \infty$ выполнено условие

$$\frac{m}{n} \rightarrow \delta, \quad 0 < \delta < 1, \quad (2.35)$$

то распределение числа нетрансформированных циклов сходится к распределению Пуассона с параметром $\lambda = -\ln(1 - \delta)$.

Из формулы (1.13) следует, что биномиальные моменты ξ имеют вид

$$B_{kn} = \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^m \sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \frac{(m)_{j_1} \dots (m)_{j_k}}{(n)_{j_1} \dots (n)_{j_k}} \frac{1}{j_1 j_2 \dots j_k}, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.36)$$

Выберем ε так, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, и разобьем сумму (2.36) на две суммы:

$$k! B_{kn} = S_1 + S_2 = \sum_{j=k}^{\left[m^{1/2-\varepsilon} \right]} + \sum_{j=\left[m^{1/2-\varepsilon} \right]+1}^m.$$

Для S_1 имеем асимптотическую оценку

$$S_1 = \sum_{j=k}^{m^{1/2-\varepsilon}} \frac{|s(j,k)|}{j!} \left[\delta^j + O\left(\frac{1}{m^{2\varepsilon}}\right) \right], \quad (2.37)$$

где $s(j,k)$ — числа Стирлинга первого рода. При $j \rightarrow \infty$ и $k = \text{const}$ используем формулу Жордана

$$|s(j,k)| \sim (j-1)!(\ln j + C)^{k-1} / (k-1)!,$$

где C — постоянная Эйлера. Тогда из (2.37) получаем

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=k}^{m^{1/2-\varepsilon}} |s(j,k)| \frac{\delta^j}{j!} + O\left(\frac{[\ln m + C]}{m^{2\varepsilon}}\right) = \frac{1}{k!} [-\ln(1-\delta)]^k + \\ &+ O(m\delta^{m^{1/2-\varepsilon}}) + O\left(\frac{[\ell \ln m + C]}{m^{2\varepsilon}}\right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Для S_2 имеем асимптотическую оценку

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \frac{1}{k!} = \sum_{j=\left[m^{1/2-\varepsilon}\right]+1}^m \delta^j \sum_{j_1+\dots+j_k=j} \frac{1}{j_1 j_2 \dots j_k} = \\ &= \sum_{j=\left[m^{1/2-\varepsilon}\right]+1}^m \frac{|s(j,k)|}{j!} \delta^j = O\left(\delta^{m^{1/2-\varepsilon}}\right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Из оценок (2.38) и (2.39) следует, что

$$B_{kn} \rightarrow \frac{1}{k!} [-\ln(1-\delta)]^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Этим теорема 2.7 доказана.

5⁰. Рассмотрим случай трансформации циклов случайной подстановки типа 1, когда $p_k = \gamma(n)$, $k = 1, 2, \dots$

Из формулы (1.12) имеем следующее выражение для производящей функции числа нетрансформированных циклов ξ :

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(x-1)^k}{k!} \gamma^k \sum_{j=k}^n \frac{k!}{j!} |s(j,k)|,$$

из которого следует, что

$$f_n(x) = \binom{\gamma(n)(x-1)+n}{n}, \quad n=1, 2, \dots$$

Отсюда следуют асимптотические формулы для среднего и дисперсии ξ :

$$\mathbf{M}\xi = \gamma(n) \ln n + O(1), \quad \mathbf{D}\xi = \gamma(n) \ln n + O(1).$$

Теорема 2.8. Если $p_k = \gamma(n)$, $k=1, 2, \dots$, и $n \rightarrow \infty$, то

а) при $\gamma(n) \ln n \rightarrow \infty$ случайная величина $(\xi - \mathbf{M}\xi)/\sqrt{\mathbf{D}\xi}$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$;

б) при $\gamma(n) \ln n \rightarrow \lambda = \text{const}$ распределение случайной величины ξ сходится к закону Пуассона с параметром λ ;

в) при $\gamma(n) \ln n \rightarrow 0$ распределение ξ асимптотически вырождено.

Для характеристической функции ξ/σ при $n, \sigma \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} f_n(e^{ix/\sigma}) &= \frac{\Gamma((e^{ix/\sigma} - 1)\gamma + n + 1)}{\Gamma((e^{ix/\sigma} - 1)\gamma + 1)\Gamma(n + 1)} = \\ &= \frac{1}{\Gamma((e^{ix/\sigma} - 1)\gamma + 1)} \exp \left\{ ix \frac{\gamma \ln n}{\sigma} - \frac{x^2}{2} \frac{\gamma \ln n}{\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ell \ln n}}\right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\gamma = \gamma(n)$.

Так как $\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$, имеет особенности в виде полюсов только в точках $0, -1, -2, \dots$, то при $\sigma \rightarrow \infty$

$$\Gamma((e^{ix/\sigma} - 1)\gamma(n) + 1) \rightarrow 1.$$

Полагая $\sigma^2 = \gamma(n) \ln n$, имеем для всех x из окрестности нуля при $n \rightarrow \infty$

$$f_n(e^{ix/\sigma}) e^{-ix\gamma(n) \ln n / \sigma} \rightarrow e^{-x^2/2}.$$

Этим доказан п. а) теоремы.

Если $\gamma(n) \ln n \rightarrow \lambda$, где λ ограничено, то при $n \rightarrow \infty$, очевидно, что $\gamma(n) \rightarrow 0$. Поэтому

$$f_n(e^{ix}) = \frac{\Gamma((e^{ix} - 1)\gamma(n) + n + 1)}{\Gamma((e^{ix} - 1)\gamma(n) + 1)\Gamma(n + 1)} = \exp \{ \ln n (e^{ix} - 1)\gamma(n) + o(1) \}.$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$f_n(e^{ix}) \rightarrow e^{\lambda(e^{ix}-1)}.$$

Этим п. б) теоремы также доказан. Справедливость п. в) очевидна.

6⁰. Рассмотрим теперь случай трансформации циклов типа 2, при которой p_k — вероятность того, что цикл длины k случайной подстановки степени n является нетрансформированным, — определяется равенствами

$$p_k = \begin{cases} 0, & k < r, \\ kp(n), & k = r, r+1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.40)$$

Из формулы (1.10) следует, что $f_n(x)$ — производящая функция для случайной величины числа ξ нетрансформированных циклов — определяется из соотношения

$$f_n(x) = \text{coef}_{t^n} \frac{1}{1-t} \exp \left\{ p(x-1) \frac{t^r}{1-t} \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/r \rfloor} \binom{n-(r-1)k}{k} \frac{p^k}{k!} (x-1)^k, \quad (2.41)$$

где $p = p(n)$.

Из равенства (2.41) получаем выражение для распределения ξ :

$$\mathbf{P}(\xi = j) = \frac{p^j}{j!} \sum_{k=0}^{\lfloor n/r \rfloor - j} (-1)^k \frac{p^k}{k!} \binom{n-(r-1)(k+j)}{k+j},$$

$$p = p(n), \quad j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor.$$

Из того же равенства (2.41) выводим формулу для биномиальных моментов ξ :

$$B_{kn} = \binom{n-(r-1)k}{k} \frac{p^k(n)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.42)$$

Отсюда следуют формулы для среднего и дисперсии ξ :

$$\mathbf{M}\xi = (n-r+1)p(n),$$

$$\mathbf{D}\xi = (n-r+1)p(n) - \left[2(n-r+1)^2 - (n-2(r-1))_2 \right] \frac{p^2(n)}{2}.$$

При $n \rightarrow \infty$ предельное распределение ξ определяется следующей теоремой.

Теорема 2.9. Если при $n \rightarrow \infty$ выполнены условия

$$r = o(n), \quad np(n) \rightarrow \lambda = \text{const}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad (2.43)$$

то предельное распределение числа ξ нетрансформированных циклов существует, однозначно определяется своими моментами и выражается через функцию Бесселя первого рода $J_k(x)$:

$$\mathbf{P}(\xi = k) \rightarrow \frac{\lambda^{k/2}}{k!} J_k(2\sqrt{\lambda}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.44)$$

Из формулы (2.42) следует, что при $n \rightarrow \infty$ для любого $k = 0, 1, \dots$

$$B_{kn} \rightarrow B_k = \frac{\lambda^k}{(k!)^2}. \quad (2.45)$$

Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k!)^2} x^k$ сходится для любого действительного x , то

предельное распределение ξ , если оно существует, однозначно определяется своими моментами, и в силу обращения второй предельной теоремы имеет место сходимость к нему исходного распределения ξ .

Для определения предельного распределения используем формулу обращения, так как для биномиальных моментов B_k предельного распределения выполнено условие Такача [4]:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup B_k^{1/k} < 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi = k) = \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} B_j = \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda^j}{j!(j+k)!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.46)$$

Используя формулу, определяющую функцию Бесселя первого рода [2], [8]

$$J_k(2\sqrt{z}) = z^{k/2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^j}{j! \Gamma(k+j+1)},$$

приходим к равенству (2.44), определяющему вид предельного распределения.

Распределение вида (2.44) будем называть *J-распределением* с параметром λ . С учетом абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda^j}{j!(j+k)!}$$

нетрудно показать, что его сумма неотрицательна при $0 \leq \lambda \leq 1$ для $k = 0, 1, \dots$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda^j}{j!(j+k)!} = 1,$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k/2}}{k!} J_k(2\sqrt{\lambda}) = 1.$$

Таким образом, *J-распределение* обладает всеми свойствами вероятностного распределения. Используя известную формулу (см. [2], [8])

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2},$$

нетрудно получить выражение для производящей функции биномиальных моментов *J-распределения* через функцию Бесселя:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k!)^2} x^k = J_0(2i\sqrt{\lambda x}),$$

где $i = \sqrt{-1}$. В соответствии с этим производящая функция *J-распределения* имеет вид

$$f(x, \lambda) = J_0(2i\sqrt{\lambda(x-1)}).$$

Отсюда, как и следовало ожидать, имеем равенство $f(1, \lambda) = 1$. Кроме того, из формулы (2.45) получаем выражения для среднего и дисперсии *J-распределения*, равные, соответственно, λ и $\lambda - \lambda^2 / 2$.

Рассмотрим свойства J -распределения с параметром λ , записанного в виде $\{p_k(\lambda), k = 0, 1, \dots; 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Из формул (2.44) и (2.46) следует, что:

если $\lambda = 0$, то

$$p_k(0) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k > 0, \end{cases} \quad (2.47)$$

если $0 < \lambda \leq 1$, то

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^{k/2}}{k!} J_k(2\sqrt{\lambda}) = \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda^j}{j!(j+k)!}. \quad (2.48)$$

Поведение вероятностей J -распределения обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Для всех λ , $0 < \lambda \leq 1$ справедливы неравенства $k = 0, 1, \dots$

$$p_k(\lambda) - p_{k+1}(\lambda) \geq \frac{\lambda^k}{(k!)^2} \left[1 - \frac{\lambda(k+2)}{(k+1)} \right] > 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.49)$$

Неравенства (2.49) следуют из теоремы Лейбница об оценке частичных сумм знакопередающихся сходящихся рядов, к которым относятся ряды вида (2.48).

Рассмотрим функцию $\psi(\lambda)$ вида

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = 0, \\ p_0(\lambda) - p_1(\lambda), & 0 < \lambda \leq 1. \end{cases} \quad (2.50)$$

В соответствии с формулой (2.48) $\psi(\lambda)$ при $0 < \lambda \leq 1$ является разностью равномерно сходящихся рядов, сохраняющих это свойство после дифференцирования. Поэтому путем дифференцирования рядов получаем формулы для двух первых производных $\psi(\lambda)$ для $0 < \lambda \leq 1$:

$$\begin{aligned} \psi'(\lambda) &= -\frac{2}{\lambda} (p_1(\lambda) - p_2(\lambda)), \\ \psi''(\lambda) &= \frac{6}{\lambda} (p_2(\lambda) - p_3(\lambda)). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Отсюда вытекает следующее свойство $\psi(\lambda)$.

Свойство 2. Функция $\psi(\lambda)$, $0 < \lambda \leq 1$, является убывающей вогнутой функцией, имеющей единственный нуль $\lambda_0 = 0.64\dots$, являющийся единственным вещественным корнем уравнения

$$J_0(2\sqrt{\lambda}) = \sqrt{\lambda} J_1(2\sqrt{\lambda}).$$

Значение $\lambda_0 = 0.64\dots$ получено с использованием таблицы для функций Бесселя первого рода. Из этих же таблиц имеем

$$\begin{aligned} p_0(0) &= 1, & p_1(0) &= 0, \\ p_0(1) &= 0.224\dots, & p_1(1) &= 0.577\dots \end{aligned}$$

Аналогично (2.49) проверяется, в частности, что

$$p_0(0.5) - p_1(0.5) > 0, \quad p_1(0.8) - p_0(0.8) > 0.$$

Объединяя эти результаты, получаем еще одно свойство.

Свойство 3. Для всех $\lambda \neq \lambda_0$, $0 \leq \lambda \leq 1$, J -распределение унимодально: при $\lambda < \lambda_0$ мода распределения находится в точке $k = 0$, при $\lambda > \lambda_0$ — в точке $k = 1$. При $\lambda = \lambda_0$ распределение бимодально.

Список литературы

1. Кендалл, М., Стюарт, А. Теория распределений. — М.: Наука, 1966.
2. Рыжик, И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Гостехиздат, 1948.
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс математического анализа. Т. 2. — М.: Физматгиз, 1947.
4. Takach. A moment problem // J. Austral. Math. Soc. — 1965. — V. 5. № 4. — P. 487–490.
5. Сачков, В. Н. Оператор редуцирования // Труды по дискретной математике. — М.: ТВП, 1998.
6. Сачков, В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977.
7. Сачков, В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978.
8. Кузнецов, Д. С. Специальные функции. — М.: Высшая школа, 1962.