Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. М. Ермилов, О. А. Козлитин, Цикловая структура полиномиального генератора над кольцом Галуа, *Матем. вопр. криптогр.*, 2013, том 4, выпуск 1, 27–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk72>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:43:02

Цикловая структура полиномиального генератора над кольцом Галуа

Д. М. Ермилов, О. А. Козлитин

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 20.IV.2012

В работе исследуется цикловая структура полиномиального преобразования кольца Галуа. Полученные результаты могут быть использованы при изучении криптографических свойств выходной последовательности полиномиального генератора.

Ключевые слова: нелинейные рекуррентные последовательности, кольца Галуа, граф отображения

Cyclic structure of a polynomial generator over the Galois ring

D. M. Ermilov, O. A. Kozlitin

LLC "Certification Research Center", Moscow

Abstract. The cyclic structure of a polynomial generator over the Galois ring is investigated. Results may be used in the study of cryptographic properties of the output sequence of a polynomial generator.

Key words: nonlinear recurrent sequences, Galois ring, graph of the mapping

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 27–57 (Russian).

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-8.2010.10

1. Введение

Пусть R — кольцо. Один из способов выработки псевдослучайных последовательностей над R состоит в использовании рекуррентности с глубиной зависимости 1:

$$\forall i \geq 0: u(i+1) = F(u(i)), \quad (1)$$

где $u(0) \in R$ — начальное заполнение, а F — некоторое преобразование кольца R . Из соображений быстродействия функция F должна быть легко реализуемой. Например, можно изучать полиномиальные функции F : во-первых, они строятся с помощью стандартных кольцевых операций, а во-вторых, разработан математический аппарат для их исследования. Всюду в этой работе функция F полиномиальна. Там, где это не приводит к недоразумениям, будем отождествлять функцию F с представляющим ее полиномом над R .

Первый естественный вопрос, возникающий в связи с генератором (1), — каковы дефект и период последовательности u . Это — частный случай вопроса о строении графа G_F преобразования F . В такой формулировке (для произвольного кольца R) рассматриваемая задача далека от решения, поэтому ограничимся наиболее исследованным классом колец — конечными локальными кольцами главных идеалов. К этому классу относятся, например, все конечные поля, все примарные кольца вычетов, а также целый ряд других коммутативных и некоммутативных колец [4].

Задача о строении графа G_F в случае, когда R — примарное кольцо вычетов, рассматривалась в работах М. В. Ларина [6], В. С. Анашина [1], В. Е. Викторенкова и Д. А. Пронькина (устное сообщение) и ряда других авторов. Имеются отдельные результаты о строении графа G_F в ситуации, когда R — простейшее некоммутативное локальное кольцо главных идеалов [5]. Вместе с тем существует важный класс коммутативных колец, занимающий промежуточное положение между примарными кольцами вычетов и произвольными конечными локальными кольцами главных идеалов, — кольца Галуа. Это — минимальный класс, содержащий как все примарные кольца вычетов, так и все конечные поля [4].

Полиномиальные преобразования колец Галуа описаны в работе [7]. Задача об описании графа G_F преобразования F над произвольным кольцом Галуа R , насколько известно авторам, в литературе не обсуждалась. Целью настоящей работы является описание графа G_F полиномиального преобразования $F: R \rightarrow R$ кольца Галуа $R = GR(q^n, p^n)$ мощности q^n и характеристики p^n .

Пусть $a \in R$. Обозначим через $t_n(a)$ период последовательности

$$a, F(a), F(F(a)), \dots,$$

а через $t_1(a)$ — период последовательности

$$\bar{a}, \bar{F}(\bar{a}), \bar{F}(\bar{F}(\bar{a})), \dots,$$

где $\bar{a}$ и $\bar{F}$ — результаты приведения a и F по модулю радикала pR . Перечислим полученные результаты.

1. Элемент $a \in R$ назовем *циклическим*, если он лежит на некотором цикле графа G_F , и *псевдоциклическим*, если он сравним с циклическим элементом по модулю радикала pR . Среди псевдоциклических элементов a выделим *особые*, то есть те, для которых

$$F'(a) \equiv 0 \pmod{pR}.$$

Показано, что для особых вершин a верно равенство $t_n(a) = t_1(a)$, а для неособых возможно неравенство $t_n(a) > t_1(a)$ (теорема 1).

2. В различных ситуациях найдены формулы для вычисления величины $t_n(a)$ (теоремы 2, 3, 4, 5, 6). Показано, что имеет место достижимая оценка

$$t_n(a) \leq p^{n-2}(q-1) \cdot t_1(a),$$

в то время как над кольцом вычетов $\mathbb{Z}_{p^n}$

$$t_n(a) \leq p^{n-2}(p-1) \cdot t_1(a).$$

Этот результат демонстрирует новое качество, возникающее при переходе от кольца вычетов к кольцу Галуа.

3. Пусть $R_s = R/p^s R$, C — цикл по модулю $p^s R$,

$$\varphi_s: R_{s+1} \rightarrow R_s$$

— эпиморфизм, приводящий элементы кольца R_{s+1} по модулю $p^s R$. Теорема 7 описывает прообраз $\varphi_s^{-1}(C)$ цикла C и позволяет вычислять цикловую структуру по модулю $p^{s+1} R$, исходя из цикловой структуры по модулю $p^s R$.

В следующем параграфе предложена классификация вершин графа G_F и найдены условия принадлежности вершин различным классам.

2. Классификация вершин

Всюду далее $n \in \mathbb{N}$, $R = GR(q^n, p^n)$ — кольцо Галуа мощности q^n и характеристики p^n , $I = pR$ — его *радикал* (см., например, [4]), $F(x) \in R[x]$ — полином, задающий преобразование кольца R , G_F — граф этого преобразования. Если подмножество $U \subseteq R$ инвариантно относительно F , то $G_F(U)$ есть подграф графа G , порожденный подмножеством U (см., например, [2]).

Пусть $\bar{F}(x)$ — образ полинома $F(x)$ под действием естественного эпиморфизма

$$R \rightarrow \bar{R} = R/I.$$

Аналогично определяются граф $G_{\bar{F}}$ и его подграф $G_{\bar{F}}(V)$, где подмножество $V \subseteq \bar{R}$ инвариантно относительно $\bar{F}$.

Вершины, лежащие на цикле, будем называть *циклическими*. Множества циклических вершин графов G_F и $G_{\bar{F}}$ будем обозначать через C_F и $C_{\bar{F}}$ соответственно. Обозначим через $F^{[0]}$ тождественное преобразование, а через $F^{[m]}$, $m \in \mathbb{N}$, — преобразование

$$F \circ F \circ \dots \circ F \text{ (} m \text{ раз),}$$

где $\circ$ — операция *композиции*. Имеет место

Утверждение 1. Если $a \in C_F$, то $\bar{a} \in C_{\bar{F}}$. Если $\bar{a} \in C_{\bar{F}}$, то существует $b \in I$ со свойством $a + b \in C_F$.

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна. Докажем его вторую часть. Пусть элемент $a \in R$ таков, что $\bar{a} \in C_{\bar{F}}$. Рассмотрим компоненту связности графа G_F , содержащую вершину a . В этой компоненте связности есть цикл $c_0, c_1, \dots, c_{l-1}$. Если элемент $\bar{a}$ отсутствует в ряду $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{l-1}$, то он отсутствует и в последовательности $\bar{c}_0, \bar{F}(\bar{c}_0), \bar{F}^{[2]}(\bar{c}_0), \dots$, что невозможно в силу цикличности $\bar{a}$. Следовательно, $a \equiv c_i \pmod{I}$ для подходящего $i \in \{0, \dots, l-1\}$. $\triangleright$

Семейство $C_F^\# = C_F + I$ назовем множеством *псевдоциклических вершин*. Очевидно, что всякая циклическая вершина является псевдоциклической. Расстоянием от вершины $a \in R$ до множества $C_F^\#$ назовем минимальное $m \in \mathbb{N}_0$ со свойством $F^{[m]}(a) \in C_F^\#$. Аналогично определяется расстояние от вершины $\bar{a} \in \bar{R}$ до множества $C_{\bar{F}}$. Для них используются обозначения $\rho(a, C_F^\#)$, $\rho(\bar{a}, C_{\bar{F}})$.

Утверждение 2. Для всякого $a \in R$ справедливо равенство $\rho(a, C_F^\#) = \rho(\bar{a}, C_{\bar{F}})$.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\forall m \geq 0: F^{[m]}(a) \in C_F^\# \Leftrightarrow \bar{F}^{[m]}(\bar{a}) \in C_{\bar{F}}.$$

Импликация «слева направо» следует из первой части утверждения 1. Докажем импликацию «справа налево». Пусть элемент $b = F^{[m]}(a)$ таков, что $\bar{b} \in C_{\bar{F}}$. Это означает, что существует $l \geq 1$ со свойством $F^{[l]}(b) \equiv b \pmod{I}$. Тогда для всякого $t \geq 1$ справедливо соотношение $F^{[t \cdot l]}(b) \equiv b \pmod{I}$. Граф G_F есть совокупность циклов с подходами. Поэтому существует $t_0 \geq 1$ такое, что $F^{[t_0 \cdot l]}(b) \in C_F$. Следовательно, $b \in C_F + I = C_F^\#$. $\triangleright$

Поскольку преобразование F сохраняет конгруэнции кольца R , множество $C_F^\#$ инвариантно относительно F . Поэтому можно рассматривать подграф

$$G_F(C_F^\#) \leq G_F.$$

Утверждение 2 в определенном смысле сводит описание графа G_F к описанию его подграфа $G_F(C_F^\#)$. Дальнейшие усилия направлены на описание этого подграфа.

Пусть $a \in C_F^\#$, и цикл графа $G_{\bar{F}}$, содержащий вершину $\bar{a}$, имеет длину l . Положим

$$C_F(a) = \{a, F(a), \dots, F^{[l-1]}(a)\}.$$

Множество $C_F^\#(a) = C_F(a) + I$ назовем *псевдоциклом*, содержащим элемент a .

Утверждение 3. Если в графе $G_{\bar{F}}(C_{\bar{F}})$ ровно k циклов, и $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ — их представители, то

$$C_F^\# = \bigcup_{i=1}^k C_F^\#(a_i), \quad (2)$$

причем слагаемые в разложении (2) попарно не пересекаются.

Доказательство. Ввиду утверждения 2 и инвариантности $C_F^\#$ относительно преобразования F имеем

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}: C_F(a_i) \subseteq C_F^\#.$$

Отсюда $C_F^\#(a_i) \subseteq C_F^\#$ для $i = 1, 2, \dots, k$, и правая часть равенства (2) включается в его левую часть.

Обратно, если $a \in C_F^\#$, то существует $i \in \{1, \dots, k\}$ такое, что $\bar{a}$ и $\bar{a}_i$ принадлежат одному циклу графа $G_{\bar{F}}$. Если длина этого цикла равна l , то существует $m \in \{0, \dots, l-1\}$ со свойством $a \equiv F^{[m]}(a_i) \pmod{I}$. Поэтому $a \in C_F(a_i) + I = C_F^\#(a_i)$. Равенство (2) доказано.

Если $b \in C_F^\#(a_i) \cap C_F^\#(a_j)$, то $\bar{b}$ лежит как на цикле, содержащем $\bar{a}_i$, так и на цикле, содержащем $\bar{a}_j$. Отсюда $i = j$. $\triangleright$

Утверждение 3 сводит изучение графа $G_F(C_F^\#)$ к изучению его псевдоциклов. Выясним строение псевдоциклов. Для этого рассмотрим кольцевой аналог разложения Тейлора.

Наделим R структурой $\mathbb{Z}$ -бимодуля. Для многочлена $F(x) \in R[x]$ естественным образом определим его k -ю производную $F^{(k)}(x)$ (см., например, [3]).

Утверждение 4. Пусть $F(x) \in R[x]$ и $s \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $x, y \in R$

$$F(x + p^s y) = F(x) + F'(x)p^s y + \sum_{k \geq 2} H_k(x)p^{ks}y^k, \quad (3)$$

где для элементов $H_k(x) \in R$ верно равенство $F^{(k)}(x) = k! \cdot H_k(x)$, $k = 2, 3, 4, \dots$

Пусть $F(x) = \sum_{l \geq 0} a_l x^l$. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$\begin{aligned} F(x + p^s y) &= \sum_{l \geq 0} a_l (x + p^s y)^l = \sum_{l \geq 0} a_l \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} x^{l-k} p^{ks} y^k = \\ &= \sum_{k \geq 0} \left[\sum_{l \geq k} \binom{l}{k} a_l x^{l-k} \right] p^{ks} y^k. \end{aligned}$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через $H_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, что $H_0(x) = F(x)$, $H_1(x) = F'(x)$, и $F^{(k)}(x) = k! \cdot H_k(x)$ при $k \geq 2$. $\triangleright$

Из утверждения 4 вытекает

Следствие 1. Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $x, y \in R$ верно соотношение

$$F(x + p^s y) \equiv F(x) + F'(x)p^s y \pmod{I^{s+1}}. \quad (4)$$

Положим $\Gamma(R) = \{x \in R \mid x^q = x\}$. Согласно [4] всякий элемент $a \in R$ однозначно представляется в виде

$$a = a_0 + pa_1 + p^2a_2 + \dots + p^{n-1}a_{n-1}, \quad (5)$$

где $a_i \in \Gamma(R)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Такое представление называется *p-адическим разложением* элемента a .

Псевдоциклическую вершину a графа G_F назовем *особой*, если

$$F'(a) \equiv 0 \pmod{I}.$$

Псевдоциклические вершины, не являющиеся особыми, назовем *неособыми*. Псевдоцикл будем называть *особым*, если среди его вершин есть особые. Псевдоциклы, не являющиеся особыми, будем называть *неособыми*.

Псевдоциклическую вершину b графа G_F назовем *регулярной*, если

$$|F^{-1}(b) \cap C_F^\#| = 1.$$

Регулярные вершины — это псевдоциклические вершины, у которых полустепень захода в графе $G_F(C_F^\#)$ равна 1.

Утверждение 5. Пусть $a \in C_F^\#$ и $b \equiv F(a) \pmod{I}$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. a — неособая вершина.
2. b — регулярная вершина.

Доказательство. Рассмотрим систему сравнений относительно $x \in R$:

$$\begin{cases} F(x) = b, \\ x \equiv a \pmod{I}. \end{cases} \quad (6)$$

Вершина b регулярна тогда и только тогда, когда система (6) имеет единственное решение. Разложение (5) элемента x имеет вид

$$x = x_0 + px_1 + p^2x_2 + \dots + p^{n-1}x_{n-1},$$

где $x_i \in \Gamma(R)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, причем в силу (6) $x_0 = a_0$. Опираясь на соотношение (4), применим к многочлену $F(x) - b$ стандартный алгоритм *поднятия корня по модулю радикала*, позволяющий для всякого $s \in \{1, \dots, n-1\}$ восстанавливать координату x_s по координатам $a_0, x_1, \dots, x_{s-1}$. Это

восстановление осуществляется однозначно тогда и только тогда, когда $F'(a_0) \not\equiv 0 \pmod{I}$. Поскольку $F'(a) \equiv F'(a_0) \pmod{I}$, система (6) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда a — неособая вершина. $\triangleright$

Множество всех особых псевдоциклических вершин графа G_F обозначим через $SC_F^\#$, а множество всех неособых псевдоциклических вершин — через $NSC_F^\#$. Сформулируем центральный результат этого параграфа.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $NSC_F^\# \subseteq C_F$. В частности, компонентами связности всякого неособого псевдоцикла являются циклы без подходов.
2. Для всякой вершины $a \in SC_F^\#$ существует единственный элемент $b \in I$ со свойством $a + b \in C_F$. В частности, если $a \in SC_F^\#$ и $\bar{a}$ лежит на цикле длины l , то псевдоцикл $C_F^\#(a)$ есть цикл длины l с подходами.

Доказательство. 1. Рассмотрим неособый псевдоцикл $C_F^\#(a)$. Если $x \in C_F^\#(a)$, то $\bar{x} = \bar{F}(\bar{b})$, где вершины $\bar{b}$ и $\bar{a}$ принадлежат одному циклу графа $G_{\bar{F}}$. Тогда $b \in C_F^\#(a)$ и $x \equiv F(b) \pmod{I}$. Поскольку вершина b неособая, вершина x регулярна (утверждение 5). Таким образом, у каждой вершины псевдоцикла $C_F^\#(a)$ полустепень захода равна 1. Следовательно, псевдоцикл $C_F^\#(a)$ целиком состоит из циклических элементов.

2. Существование элемента b следует из утверждения 1. Докажем его единственность. Рассуждаем от противного. Пусть $a \in SC_F^\#$ и существуют такие два элемента $b_1 \neq b_2 \in I$, что $a + b_1 \in C_F$ и $a + b_2 \in C_F$. Пусть $s \in \mathbb{N}$ — минимальное со свойством $b_1 \not\equiv b_2 \pmod{I^{s+1}}$. Ввиду (4) для некоторого $r \in R^*$ справедлива следующая цепочка сравнений по модулю I^{s+1} :

$$\begin{aligned} F^{[s]}(a + b_1) &\equiv F^{[s]}(a + b_2 + p^s r) \equiv F^{[s]}(a + b_2) + \left(F^{[s]}\right)'(a) p^s r = \\ &= F^{[s]}(a + b_2) + F'(a) \left(F^{[s-1]}\right)'(F(a)) p^s r \equiv F^{[s]}(a + b_2). \end{aligned}$$

Вершины $a + b_1$ и $a + b_2$ являются циклическими по модулю I^{s+1} . Поэтому

$$a + b_1 \equiv a + b_2 \pmod{I^{s+1}}.$$

Получено противоречие.

Покажем, что в псевдоцикле $C_F^\#(a)$ имеется единственный цикл. От противного: если в этом псевдоцикле есть по крайней мере 2 цикла, то по модулю радикала I они состоят из одних и тех же элементов. Тогда вершина a

достраивается до циклической по крайней мере двумя способами, то есть существуют разные $b_1, b_2 \in I$ такие, что $a + b_1 \in C_F$ и $a + b_2 \in C_F$. Противоречие с первой частью пункта 2.

Теперь покажем, что единственный цикл, входящий в псевдоцикл $C_F^\#(a)$, имеет длину l . От противного: если длина этого цикла больше l , то на цикле графа $G_{\overline{F}}$, содержащем элемент $\overline{a}$, есть элемент $\overline{\alpha}$ такой, что вершина $\alpha \in R$ достраивается до циклической по крайней мере двумя способами. Получено противоречие. $\triangleright$

Пусть $SC_{\overline{F}} = \{\overline{a} \mid a \in SC_F^\#\}$.

Следствие 2. Во введенных обозначениях справедливо равенство

$$|C_F| = |C_F^\#| - |SC_{\overline{F}}| \cdot (|I| - 1). \quad (7)$$

Доказательство. Если $\overline{a} \in C_{\overline{F}} \setminus SC_{\overline{F}}$, то a достраивается до циклической вершины $|I|$ способами. Если $\overline{a} \in SC_{\overline{F}}$, то a достраивается до циклической вершины единственным способом. Поэтому

$$|C_F| = (|C_{\overline{F}}| - |SC_{\overline{F}}|) \cdot |I| + |SC_{\overline{F}}| = |C_{\overline{F}}| \cdot |I| - |SC_{\overline{F}}| \cdot (|I| - 1).$$

Осталось заметить, что

$$|C_F^\#| = |C_F + I| = |C_{\overline{F}}| \cdot |I|. \triangleright$$

Формула (7) позволяет вычислять количество $|C_F|$ циклических точек графа G_F при условии, что задан многочлен $F(x)$ и описано множество $C_{\overline{F}}$.

3. Оценка длины неособого цикла

Назовем цикл *неособым*, если все его вершины являются неособыми, и *особым*, если среди его вершин есть особая вершина. Согласно пункту 2 теоремы 1 длина особого цикла C совпадает с длиной его образа $\overline{C}$ под действием естественного эпиморфизма $R \rightarrow \overline{R}$. Поэтому всюду далее обсуждаются неособые циклы.

Рассмотрим неособый цикл, содержащий элемент $a \in R$. Если привести этот цикл по модулю I^s , то получится цикл длины $t_s(a)$, $s = 1, 2, \dots, n$. Иными словами, $t_s(a)$ — это минимальное натуральное t со свойством

$$F^{[t]}(a) \equiv a \pmod{I^s}.$$

В тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, вместо $t_s(a)$ будем писать t_s , $s = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, что $t_s \mid t_{s+1}$ для всякого $s \in \{1, \dots, n-1\}$. Цель дальнейших усилий — исследовать последовательность

$$t_1, t_2, \dots, t_n. \quad (8)$$

Поскольку вершина a принадлежит неособому циклу, для любого $t \geq 1$ имеем

$$\left(F^{[t]}\right)'(a) = \prod_{i=0}^{t-1} F'(F^{[i]}(a)) \not\equiv 0 \pmod{I}.$$

Пусть e — единица кольца R . Если $f_s = F^{[t_s]}$, то $\alpha_s = f'_s(a) \in R^*$, $s = 1, 2, \dots, n-1$. Положим

$$\delta_s = \begin{cases} p, & \text{если } \overline{\alpha_s} = \overline{e}, \\ \text{ord } \overline{\alpha_s} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9)$$

Утверждение 6. Для всякого $s \in \{1, \dots, n-1\}$ верно соотношение $t_{s+1} \mid t_s \cdot \delta_s$.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$f_s^{[\delta_s]}(a) \equiv a \pmod{I^{s+1}}. \quad (10)$$

Для некоторого $r \in R$ имеем

$$f_s(a) \equiv a + p^s r \pmod{I^{s+1}}.$$

Применив $(\delta_s - 1)$ раз формулу (4), получим

$$f_s^{[\delta_s]}(a) \equiv a + p^s r (e + \alpha_s + \alpha_s^2 + \dots + \alpha_s^{\delta_s-1}) \pmod{I^{s+1}}.$$

Осталось показать, что

$$\overline{e} + \overline{\alpha_s} + \overline{\alpha_s}^2 + \dots + \overline{\alpha_s}^{\delta_s-1} = \overline{0}. \quad (11)$$

Если $\overline{\alpha_s} = \overline{e}$, то ввиду (9) $\delta_s = p$, и равенство (11) очевидно. Если $\overline{\alpha_s} \neq \overline{e}$, то сумма в левой части (11) равна

$$(\overline{\alpha_s}^{\delta_s} - e)(\overline{\alpha_s} - e)^{-1} = \overline{0}.$$

Таким образом, соотношение (10) доказано. $\triangleright$

Из утверждения 6 вытекает соотношение

$$t_n(a) = t_1(a) \cdot \Delta(a), \quad \text{где } \Delta(a) \mid \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}. \quad (12)$$

Его можно рассматривать как верхнюю оценку длины неособого цикла.

Уточним оценку (12). Сначала исследуем величины δ_s , $s = 1, 2, \dots, n-1$. Положим $d_s = t_{s+1}/t_s$.

Утверждение 7. Если $j \geq 1$ и $\delta_j = p$, то $\delta_s = p$ для всякого $s \geq j$.

Доказательство. Условия $\delta_j = p$ и $f'_j(a) \equiv e \pmod{I}$ равносильны. Индукцией по $s \geq j$ докажем, что

$$f'_s(a) \equiv e \pmod{I}.$$

База индукции верна по условию. Осуществим индуктивный переход от s к $s + 1$. Пусть $s \geq j$ и $f'_s(a) \equiv e \pmod{I}$. Так как

$$f_s(a) \equiv a \pmod{I^s},$$

то $f_s(a) \equiv a \pmod{I}$. Отсюда и по предположению индукции имеем

$$f'_{s+1}(a) = \left(f_s^{[d_s]}\right)'(a) = \prod_{i=0}^{d_s-1} f'_s(f_s^{[i]}(a)) \equiv [f'_s(a)]^{d_s} \equiv e \pmod{I}. \quad \triangleright$$

Теперь перейдем к изучению величин d_s , $s = 1, 2, \dots, n - 1$. Далее будет использоваться следующий факт, вытекающий из разложения Тейлора.

Лемма 1. Пусть $s \geq 2$ и

$$f_s(a) \equiv a + p^s y \pmod{I^{s+2}}. \quad (13)$$

Тогда для всякого $j \geq 1$ верно соотношение

$$f_s^{[j]}(a) \equiv a + p^s y \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_s^k \pmod{I^{s+2}}. \quad (14)$$

Доказательство. Используется индукция по j . База индукции ($j = 1$) очевидна. Осуществим индуктивный переход от j к $j + 1$.

Поскольку $s \geq 2$, имеем $2s \geq s + 2$. В силу (3) верно соотношение

$$f_s(a + p^s x) \equiv f_s(a) + f'_s(a)p^s x \pmod{I^{s+2}}. \quad (15)$$

По предположению индукции

$$f_s^{[j+1]}(a) = f_s(f_s^{[j]}(a)) \equiv f_s(a + p^s y \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_s^k) \pmod{I^{s+2}}.$$

Последовательно применяя (15) и (13), получаем цепочку сравнений по модулю I^{s+2} :

$$\begin{aligned} f_s(a + p^s y \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_s^k) &\equiv f_s(a) + f'_s(a) p^s y \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_s^k \equiv \\ &\equiv a + p^s y + f'_s(a) p^s y \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_s^k \equiv a + p^s y + p^s y \sum_{k=1}^j \alpha_s^k \equiv a + p^s y \sum_{k=0}^j \alpha_s^k. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Введем обозначение, которое будет активно применяться в дальнейшем:

$$\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } d_1 > 1, \\ \max\{s \mid d_1 = d_2 = \dots = d_s = 1\} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (16)$$

Из оценки (12) и утверждения 7 следует, что поведение величин d_s зависит от равенства $\delta_1 = p$. В следующем параграфе рассматривается случай $\delta_1 = p > 2$.

4. Длины циклов: случай $\delta_1 = p > 2$

Сформулируем центральный результат параграфа.

Теорема 2. Пусть $\delta_1 = p > 2$ и величина μ определена равенством (16). Соотношение

$$\forall s > \mu : \quad d_s = p \quad (17)$$

выполняется всегда, за исключением случая

$$p = 3 \quad \text{и} \quad e + y f_1''(a) \equiv 0 \pmod{I}, \quad (18)$$

где y — решение уравнения

$$f_1(a) - a \equiv py \pmod{I^2}.$$

Доказательству теоремы предположим три леммы.

Сначала заметим, что при $p > 2$ верно неравенство $2\bar{e} \neq 0$, то есть $2e \in R^*$. Поэтому корректна запись $\frac{f_s''(a)}{2}$, которую следует читать как $f_s''(a)(2e)^{-1}$. Используя эту запись, приведем равенство (3) по модулю I^{s+2} . Получим следующее утверждение.

Лемма 2. Если $p > 2$ и $s \geq 1$, то для всякого $x \in R$ верно соотношение

$$f_s(a + p^s x) \equiv f_s(a) + f'_s(a)p^s x + \frac{f''_s(a)}{2}p^{2s}x^2 \pmod{I^{s+2}}. \quad (19)$$

Заметим, что лемма 2 справедлива и в случае, когда $\delta_1 \neq p$ (но $p > 2$).

Лемма 3. Пусть $\delta_1 = p > 2$ и

$$f_1(a) \equiv a + py \pmod{I^3}. \quad (20)$$

Тогда для всякого $j \geq 1$ верно соотношение

$$f_1^{[j]}(a) \equiv a + py \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_1^k + p^2 y^2 \frac{f''_1(a)}{2} \sum_{k=0}^{j-1} k^2 \pmod{I^3}. \quad (21)$$

Доказательство. Используется индукция по j . База индукции ($j = 1$) очевидна. Осуществим индуктивный переход от j к $j + 1$.

С учетом (20) формула (19) для $s = 1$ принимает вид

$$f_1(a + px) \equiv a + (\alpha_1 x + y)p + \frac{f''_1(a)}{2}p^2 x^2 \pmod{I^3}. \quad (22)$$

По предположению индукции

$$f_1^{[j+1]}(a) = f_1(f_1^{[j]}(a)) \equiv f_1 \left(a + py \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_1^k + p^2 y^2 \frac{f''_1(a)}{2} \sum_{k=0}^{j-1} k^2 \right) \pmod{I^3}.$$

Положим

$$x = y \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_1^k + p y^2 \frac{f''_1(a)}{2} \sum_{k=0}^{j-1} k^2$$

и применим формулу (22). Получим:

$$\begin{aligned} f_1(a + px) &\equiv a + py + py \sum_{k=1}^j \alpha_1^k + p^2 y^2 \alpha_1 \frac{f''_1(a)}{2} \sum_{k=0}^{j-1} k^2 + \\ &+ p^2 y^2 \frac{f''_1(a)}{2} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \alpha_1^k \right)^2 \pmod{I^3}. \end{aligned}$$

Поскольку $\delta_1 = p$, имеем $\alpha_1 \equiv e \pmod{I}$. Отсюда

$$\begin{aligned} f_1^{[j+1]}(a) &\equiv a + py \sum_{k=0}^j \alpha_1^k + p^2 y^2 \frac{f_1''(a)}{2} \sum_{k=0}^{j-1} k^2 + p^2 y^2 \frac{f_1''(a)}{2} j^2 \equiv \\ &\equiv a + py \sum_{k=0}^j \alpha_1^k + p^2 y^2 \frac{f_1''(a)}{2} \sum_{k=0}^j k^2 \pmod{I^3}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Лемма 4. Если $\delta_s = p > 2$, то

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_s^k \equiv pe \pmod{I^2}. \quad (23)$$

Если известно, что $\delta_1 = p > 2$, то (23) справедливо для всякого $s \in \{1, \dots, n-1\}$.

Доказательство. По условию $\bar{\alpha}_s = \bar{e}$, то есть $\alpha_s = e + ph \pmod{I^2}$ для подходящего $h \in R$. Отсюда получаем следующую цепочку сравнений по модулю I^2 :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_s^k \equiv \sum_{k=0}^{p-1} (e + kph) \equiv pe + p \cdot \left(\frac{p}{2} \right) \cdot h \equiv pe.$$

Последнее сравнение справедливо, поскольку $p > 2$. Вторая часть леммы получается, если применить утверждение 7 при $j = 1$. $\triangleright$

Доказательство теоремы 2. 1. Достаточность. Индукцией по $s \geq 1$ докажем, что если условие (18) не выполняется и $\mu < s$, то $d_s = p$.

Если $s = 1$ и $\mu = 0$, то $d_1 = p$. Если $s = 2$ и $\mu = 1$, то $d_2 = p$. Пусть $s = 2$ и $\mu = 0$. Тогда $d_1 = p$, и соотношение (20) выполняется для некоторого $y \in R^*$. Из (21) и (23) следует, что

$$f_2(a) = f_1^{[p]}(a) \equiv a + p^2 y \left(e + y \frac{f_1''(a)}{2} \sum_{k=0}^{p-1} k^2 \right) \pmod{I^3}. \quad (24)$$

Поскольку

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6},$$

получаем, что при $p > 3$

$$f_2(a) \equiv a + p^2 y \pmod{I^3},$$

и $d_2 = p$. Если же $p = 3$, то

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^2 \equiv 2e \pmod{I},$$

откуда с учетом (24) получаем

$$f_2(a) \equiv a + p^2 y(e + y f_1''(a)) \pmod{I^3}. \quad (25)$$

Поскольку условие (18) не выполняется, $d_2 = p$. База индукции доказана.

Осуществим индуктивный переход от $s \geq 2$ к $s + 1$. Если $\mu = s$, то $d_{s+1} = p$. Если $\mu < s$, то по предположению индукции $d_s = p$, и соотношение (13) выполняется для некоторого $y \in R^*$. Из (14) и (23) следует цепочка соотношений

$$f_{s+1}(a) = f_s^{[p]}(a) \equiv a + p^{s+1} y \pmod{I^{s+2}}.$$

Отсюда $d_{s+1} = p$. Индуктивный переход завершен.

2. *Необходимость.* Если условие (18) выполняется, то $\mu = 0$, и, согласно (25), $d_2 = 1$. Получено противоречие с (17). $\triangleright$

При условии (17) величина $\Delta(a)$ из оценки (12) принимает вид

$$\Delta(a) = p^{n-\mu-1}.$$

Следствие 3. Пусть $\delta_1 = p > 2$. Соотношение

$$t_n(a) = t_1(a) \cdot p^{n-\mu-1}$$

выполняется всегда, за исключением случая (18).

В этом параграфе оценка (12) была уточнена в случае $\delta_1 = p > 2$. В следующем параграфе будет рассматриваться ситуация $\delta_1 \neq p, p > 2$.

5. Длины циклов: случай $\delta_1 \neq p, p > 2$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, $p > 2$, однако $\delta_1 \neq p$. Цикл, которому принадлежит вершина $a \in R$, по-прежнему является неособым.

Утверждение 8. Если $p > 2, j \geq 2, d_j = p$, то $d_s = p$ для всякого $s \geq j$.

Доказательство. Используется индукция по $s \geq j$.

База индукции очевидна.

Осуществим индуктивный переход от $s \geq j$ к $s + 1$. По предположению индукции $d_s = p$. Тогда $\delta_s = p$ и верно соотношение

$$f_s(a) \equiv a + p^s y \pmod{I^{s+2}},$$

где $y \in R^*$. Ввиду (14) и (23) получаем

$$f_{s+1}(a) = f_s^{[p]}(a) \equiv a + p^s y \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_s^k \equiv a + p^{s+1} y \pmod{I^{s+2}}.$$

Отсюда $d_{s+1} > 1$. Согласно утверждению 7 и поскольку $d_{s+1} \mid \delta_{s+1}$, верна цепочка импликаций

$$(\delta_s = p) \Rightarrow (\delta_{s+1} = p) \Rightarrow (d_{s+1} = p). \quad \triangleright$$

Утверждение 9. Если $p > 2, \delta_1 \neq p$ и

$$t_1 = \dots = t_i < t_{i+1} = \dots = t_j < t_{j+1},$$

то $d_i = \delta_1$ и $d_s = p$ для всякого $s \geq j$.

Доказательство. Покажем, что $d_j = p$. Это равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} f'_j(a) \equiv e \pmod{I}, \\ f_j(a) \not\equiv a \pmod{I^{j+1}}. \end{cases} \quad (26)$$

Второе ограничение системы (26) следует из неравенства $t_j < t_{j+1}$. Докажем ее первое ограничение.

Аналогично лемме 1 можно показать, что если для некоторого $y \in R^*$ верно соотношение

$$f_1(a) \equiv a + p^i y \pmod{I^{i+1}},$$

то для всякого $d \geq 1$

$$f_1^{[d]}(a) \equiv a + p^i y \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_1^k \pmod{I^{i+1}}.$$

Учитывая, что $\overline{\alpha}_1 \neq \overline{e}$, получаем

$$\forall d \geq 1: f_1^{[d]}(a) \equiv a + \frac{\alpha_1^d - e}{\alpha_1 - e} \cdot p^i y \pmod{I^{i+1}}.$$

Ввиду того, что $f_1 = f_2 = \dots = f_i$, имеем

$$\forall d \geq 1: f_i^{[d]}(a) \equiv a + \frac{\alpha_1^d - e}{\alpha_1 - e} \cdot p^i y \pmod{I^{i+1}}.$$

Отсюда $d_i = \delta_1$.

Поскольку $t_j = t_{i+1}$, имеем цепочку равенств и сравнений по модулю I

$$f_j'(a) = \left(f_1^{[\delta_1]}\right)'(a) = \prod_{k=0}^{\delta_1-1} f_1'(f_1^{[k]}(a)) \equiv \alpha_1^{\delta_1} \equiv e.$$

Таким образом, $d_j = p$, и по утверждению 8 имеем

$$\forall s \geq j: d_s = p. \triangleright$$

Из утверждения 9 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. Если $p > 2$ и $\delta_1 \neq p$, то последовательность

$$d_1, d_2, \dots, d_{n-1} \tag{27}$$

имеет один из видов:

- a) $1, 1, \dots, 1$;
- b) $1, 1, \dots, 1, \delta_1$;
- c) $1, 1, \dots, 1, \delta_1, 1, 1, \dots, 1$;
- d) $1, 1, \dots, 1, \delta_1, 1, 1, \dots, 1, p, p, \dots, p$.

В каждом случае первая серия единиц может отсутствовать.

Исследуем условия, при которых имеют место ситуации a), b), c) и d). Наиболее простой с этой точки зрения является ситуация a).

Утверждение 10. Пусть неособый элемент a таков, что $\delta_1 \neq p$. Тогда существует единственный элемент $a^* \in R$ такой, что $\overline{a} = \overline{a}^*$ и $t_n(a^*) = t_1(a^*)$. Ситуация a) имеет место тогда и только тогда, когда $a = a^*$.

Доказательство. Достаточно доказать существование и единственность элемента a^* , обладающего указанными свойствами.

Докажем, что для всякого $s \in \{1, \dots, n\}$ существует $a_s \in R$ со свойствами $\bar{a}_s = \bar{a}$ и $t_s(a_s) = t_1(a_s)$.

Для этого используется индукция по s . База индукции: положим $a_1 = a$. Осуществим индуктивный переход от $s \geq 1$ к $s + 1$. Для всякого $x \in R$ положим $a_s(x) = a_s + p^s x$. Рассмотрим уравнение

$$t_{s+1}(a_s(x)) = t_1(a_s(x)).$$

Оно равносильно уравнению

$$f_1(a_s(x)) \equiv a_s(x) \pmod{I^{s+1}}.$$

Согласно (4) последнее уравнение переписывается в виде

$$f_1(a_s) + p^s \alpha_1 x \equiv a_s + p^s x \pmod{I^{s+1}},$$

то есть

$$f_1(a_s) - a_s \equiv p^s(e - \alpha_1)x \pmod{I^{s+1}}. \quad (28)$$

По предположению индукции $f_1(a_s) \equiv a_s \pmod{I^s}$. Поскольку $\bar{\alpha}_1 \neq \bar{e}$, уравнение (28) имеет во множестве $\Gamma(R)$ единственное решение x_s . Индуктивный переход осуществлен.

Существование элемента $a^* = a_n$ доказано. В ходе описанного выше построения было показано, что для всякого элемента $a \in R$ существует единственный элемент

$$b = px_1 + p^2x_2 + \dots + p^{n-1}x_{n-1} \in I$$

такой, что

$$t_n(a + b) = t_1(a + b).$$

Поэтому элемент a^* с указанными в условии свойствами единствен. $\triangleright$

Заметим, что при доказательстве утверждения 10 условие $p > 2$ не использовалось. Следовательно, это утверждение справедливо для любого простого p .

Для краткости всюду далее в этом параграфе $f = f_1$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = f''(a)$, $\delta = \delta_1$. Напомним (см., например, [7]), что *нормой* $\|x\|$ элемента $x \in R$ называется наибольшее $k \in \{0, \dots, n\}$ со свойством $x \in I^k$.

Теорема 3. Пусть $p > 2$, $\delta \neq p$ и выполняются следующие условия:

- 1) $a \neq a^*$ и $s = \|f(a) - a\|$;
- 2) $\|\alpha^\delta - e\| \neq s + \|\beta\|$;
- 3) $\nu = \min\{\|\alpha^\delta - e\|, s + \|\beta\|\} < 2s$.

Тогда:

- 1) если $s + \nu \geq n$, то имеет место одна из ситуаций b) или c) следствия 4.
При этом $t_n = t_1 \cdot \delta$;
- 2) если $s + \nu < n$, то имеет место ситуация d) и $t_n = t_1 \cdot \delta \cdot p^{n-s-\nu}$.

Доказательство. Приведем равенство (3) по модулю I^{3s} и заменим $H_2(a)$ на $\frac{\beta}{2}$. Получим:

$$\forall x \in R: f(a + p^s x) \equiv f(a) + \alpha p^s x + \frac{\beta}{2} p^{2s} x^2 \pmod{I^{3s}}. \quad (29)$$

По условию $f(a) = a + p^s y$ для некоторого $y \in R^*$. Отсюда при $A_1 = e$ и $B_1 = 0$ имеем

$$f(a) \equiv a + p^s y A_1 + p^{2s} y^2 \frac{\beta}{2} B_1 \pmod{I^{3s}}.$$

Пусть теперь при некоторых $j \geq 1$ и $A_j, B_j \in R$ верно соотношение

$$f^{[j]}(a) \equiv a + p^s y A_j + p^{2s} y^2 \frac{\beta}{2} B_j \pmod{I^{3s}}. \quad (30)$$

Используя формулу (29), получаем цепочку сравнений по модулю I^{3s}

$$\begin{aligned} f^{[j+1]}(a) &= f(f^{[j]}(a)) \equiv f(a + p^s y(A_j + p^s y \frac{\beta}{2} B_j)) \equiv \\ &\equiv a + p^s y(e + \alpha A_j) + p^{2s} y^2 \frac{\beta}{2} (\alpha B_j + A_j^2). \end{aligned}$$

Если положить

$$\begin{cases} A_1 = e, B_1 = 0, \\ A_{j+1} = e + \alpha A_j, \\ B_{j+1} = \alpha B_j + A_j^2, \end{cases} \quad (31)$$

то сравнение (30) будет выполняться для всякого $j \geq 1$.

Непосредственно проверяется, что последовательности

$$A_j = \frac{\alpha^j - e}{\alpha - e}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

и

$$B_j = \sum_{i=0}^{j-2} \left(\frac{\alpha^{i+1} - e}{\alpha - e} \right)^2 \cdot \alpha^{j-2-i}, \quad j = 2, 3, \dots,$$

являются решениями рекуррентных соотношений (31). Вычислим $\|A_\delta\|$ и $\|B_\delta\|$. Очевидно,

$$\|A_\delta\| = \left\| \frac{\alpha^\delta - e}{\alpha - e} \right\| = \|\alpha^\delta - e\|. \quad (32)$$

Чтобы вычислить $\|B_\delta\|$, преобразуем выражение для B_j :

$$B_j = (\alpha - e)^{-2} \sum_{i=0}^{j-2} (\alpha^{j+i} - 2\alpha^{j-1} + \alpha^{j-2-i}).$$

Суммируя геометрические прогрессии, получаем

$$B_j = \alpha^{-1}(\alpha - e)^{-2} \left[(\alpha^j + e) \frac{\alpha^j - \alpha}{\alpha - e} - 2(j-1)\alpha^j \right].$$

Отсюда вытекает следующая цепочка равенств и сравнений по модулю I :

$$\alpha(\alpha - e)^2 B_\delta \equiv -2e + 2e - 2\delta e = -2\delta e.$$

Поскольку $\|2\delta e\| = 0$, имеем $\|B_\delta\| = 0$.

Подставив в (30) $j = \delta$, получим

$$f^{[\delta]}(a) \equiv a + p^s y(A_\delta + p^s y \frac{\beta}{2} B_\delta) \pmod{I^{3s}}.$$

Ввиду (32) и условий 2), 3) получаем, что

$$\|f^{[\delta]}(a) - a\| = s + \nu.$$

Поэтому в силу утверждения 9

$$d_1 = \dots = d_{s-1} = 1, \quad d_s = \delta, \quad d_{s+1} = \dots = d_{s+\nu-1} = 1,$$

$$d_{s+\nu} = d_{s+\nu+1} = \dots = d_{n-1} = p,$$

откуда вытекают требуемые равенства. $\triangleright$

В этом и предыдущем параграфах рассматривался случай $p > 2$. Теперь перейдем к случаю $p = 2$.

6. Длины циклов: случай $\delta_1 = p = 2$

В этом и следующем параграфах $p = 2$. В этом параграфе $\delta_1 = 2$, то есть $\bar{\alpha}_1 = \bar{e}$. Как и раньше, величина μ определена равенством (16), а цикл, которому принадлежит вершина $a \in R$, является неособым. Сначала рассмотрим случай $\mu > 0$.

Теорема 4. Если $\delta_1 = p = 2$ и $\mu > 0$, то последовательность (27) имеет один из видов:

- a) $1, 1, \dots, 1$;
- b) $1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2$;
- c) $1, 1, \dots, 1, 2, 1, 1, \dots, 1$;
- d) $1, 1, \dots, 1, 2, 1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2$.

Случаи c) и d) возможны лишь при условии $\alpha_1 \equiv 3e \pmod{I^2}$.

Доказательству теоремы предпошлим две леммы.

Лемма 5. Пусть $s \geq 1$ и $\delta_s = p = 2$. Для всякого $k \geq 0$ верно соотношение

$$\left(f_s^{[2^k]}\right)'(a) \equiv \alpha_s^{2^k} \pmod{I^{s+1}}. \quad (33)$$

Доказательство. Для краткости положим $G_{k,s}(x) = \left(f_s^{[2^k]}\right)'(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Соотношение (33) докажем индукцией по $k \geq 0$. База индукции ($k = 0$) очевидна. Осуществим индуктивный переход от k к $k + 1$.

Пусть рекуррента $u \in R^\infty$ задана законом рекурсии (1) и начальным значением $u(0) = a$. Многократно применяя формулу производной сложной функции и используя соотношение $u(i) = F^{[i]}(u(0))$, $i = 0, 1, 2, \dots$, получаем

$$\begin{aligned} G'_{k+1,s}(a) &= \prod_{i=0}^{2^{k+1}t_s-1} F'(u(i)) = \prod_{i=0}^{2^k t_s-1} F'(u(i)) \times \prod_{j=2^k t_s}^{2^{k+1}t_s-1} F'(u(j)) = \\ &= G'_{k,s}(u(0)) \cdot G'_{k,s}(u(2^k t_s)). \end{aligned} \quad (34)$$

Так как $\delta_s = p = 2$, то по утверждению 7 имеем $\delta_j = 2$ для всякого $j \geq s$. Отсюда $t_{s+k} \mid t_s \cdot 2^k$, и существует элемент $y \in R$ со свойством

$$u(2^k t_s) = u(0) + 2^{s+k} y.$$

Выпишем формулу (4) для многочлена $G'_{k,s}(x)$ и элемента $u(2^k t_s)$:

$$\begin{aligned} G'_{k,s}(u(2^k t_s)) &= G'_{k,s}(u(0) + 2^{s+k} y) \equiv \\ &\equiv G'_{k,s}(u(0)) + G''_{k,s}(u(0)) \cdot 2^{s+k} y \pmod{I^{k+s+1}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Применим утверждение 4 к многочлену $G_{k,s}(x)$. Существует такой многочлен $H_2(x) \in R[x]$, что $G''_{k,s}(x) = 2H_2(x)$. Отсюда $G''_{k,s}(u(0)) \equiv 0 \pmod{I}$, и ввиду (35) имеем

$$G'_{k,s}(u(2^k t_s)) \equiv G'_{k,s}(u(0)) \pmod{I^{k+s+1}}.$$

В частности,

$$G'_{k,s}(u(2^k t_s)) \equiv G'_{k,s}(u(0)) \pmod{I^{s+1}}. \quad (36)$$

Используя (34), (36) и предположение индукции, получаем цепочку равенств и сравнений по модулю I^{s+1} :

$$G'_{k+1,s}(a) = G'_{k,s}(u(0)) \cdot G'_{k,s}(u(2^k t_s)) \equiv [G'_{k,s}(a)]^2 \equiv \alpha_s^{2^{k+1}}. \quad \triangleright$$

Лемма 6. Если $\delta_1 = p = 2$ и $\mu > 0$, то импликация

$$(d_j = 2) \Rightarrow (d_j = d_{j+1} = \dots = d_{n-1} = 2) \quad (37)$$

верна для всякого $j \geq \mu + 2$. Для $j = \mu + 1$ импликация (37) верна тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \not\equiv 3e \pmod{I^2}$.

Доказательство. Пусть $d_j = 2$ и $s \geq j \geq \mu + 1$. Так как $\delta_1 = p = 2$, то $\delta_i = 2$ для всякого $i \geq 1$ (утверждение 7). Тогда $t_{s+1} \in \{t_s, 2t_s\}$.

Если $d_s = 2$, то $t_{s+1} = 2t_s$ и существует $y \in R^*$ со свойством

$$f_s(a) \equiv a + 2^s y \pmod{I^{s+2}}. \quad (38)$$

Согласно (14)

$$f_{s+1}(a) = f_s^{[2]}(a) \equiv a + 2^s y(e + \alpha_s) \pmod{I^{s+2}}. \quad (39)$$

Если $j \geq \mu + 2$, то $s \geq \mu + 2$ и $t_s > t_1$. Тогда $t_s = 2^k t_1$ для некоторого $k \geq 1$. Поскольку $\delta_1 = p = 2$, имеем $\alpha_1 = e + 2r$ для некоторого $r \in R$. По лемме 5 верна цепочка равенств и сравнений по модулю I^2 :

$$\alpha_s = f'_s(a) = \left(f_1^{[2^k]}\right)'(a) \equiv \alpha_1^{2^k} = (e + 2r)^{2^k} = (e + 4r + 4r^2)^{2^{k-1}} \equiv e.$$

Отсюда и из (39) получаем: $f_{s+1}(a) \equiv a + 2^{s+1} y \pmod{I^{s+2}}$. Поэтому $t_{s+2} > t_{s+1}$ и $d_{s+1} = 2$. Итак, для $j \geq \mu + 2$ импликация (37) доказана.

Теперь рассмотрим случай $j = \mu + 1$. Пусть $s \geq j$. Если $s \geq \mu + 2$, то, как показано выше, из равенства $d_s = 2$ следует равенство $d_{s+1} = 2$. Пусть

$s = \mu + 1$. По определению величины μ верно равенство $d_s = 2$. Исследуем значение d_{s+1} .

Подставив $\alpha_1 = e + 2r$ в (39), получим

$$f_{s+1}(a) \equiv a + 2^{s+1}y(e + r) \pmod{I^{s+2}}.$$

Отсюда

$$d_{s+1} = 2 \Leftrightarrow e + r \not\equiv 0 \pmod{I} \Leftrightarrow \alpha_1 \not\equiv 3e \pmod{I^2}. \quad \triangleright$$

Доказательство теоремы 4. По условию $\mu > 0$. Случай а) имеет место тогда и только тогда, когда $\mu = n - 1$.

Пусть $0 < \mu < n - 1$. Тогда $d_{\mu+1} = 2$. Если $\alpha_1 \not\equiv 3e \pmod{I^2}$, то по лемме 6 равенство $d_s = 2$ справедливо для всякого $s \geq \mu + 1$. Следовательно, имеет место случай б).

Если $\alpha_1 \equiv 3e \pmod{I^2}$, то, как показано при обосновании леммы 6, для всякого $s \geq \mu + 2$ верна импликация

$$d_s = 2 \Rightarrow d_{s+1} = 2,$$

однако $d_{\mu+2} = 1$. Если $\mu = n - 2$, то имеет место ситуация б). Если $\mu < n - 2$, то имеем случай с) или случай д). $\triangleright$

Далее будет рассматриваться случай $\mu = 0$. Сначала докажем один вспомогательный результат.

Лемма 7. Пусть $d_1 = \delta_1 = p = 2$ и $d_2 = 2$. Тогда $d_s = 2$ для всякого $s \geq 1$.

Доказательство. Используется индукция по $s \geq 2$. База индукции ($s = 2$) очевидна. Осуществим индуктивный переход от $s \geq 2$ к $s + 1$.

По предположению индукции $d_1 = d_2 = \dots = d_s = 2$, то есть $t_{s+1} = 2t_s$ и $t_s = 2^{s-1}t_1$. По лемме 5

$$\alpha_s = \left(f_1^{[2^{s-1}]}\right)'(a) \equiv \alpha_1^{2^{s-1}} \pmod{I^2},$$

и, поскольку $\alpha_1 = e + 2r$ для некоторого $r \in R$, имеем

$$\alpha_s \equiv e \pmod{I^2}. \quad (40)$$

Так как $t_{s+1} = 2t_s$, то существует $y \in R^*$, для которого выполняется (38). Но тогда ввиду (39) и (40) $t_{s+2} = 2t_{s+1}$, то есть $d_{s+1} = 2$. $\triangleright$

Справедлив следующий критерий.

Теорема 5. Пусть $\delta_1 = p = 2$, $\mu = 0$, значения $c \in R^*$ и $r, h \in R$ удовлетворяют соотношениям

$$f_1(a) = a + 2c, \quad f'_1(a) = e + 2r, \quad f''_1(a) = 2h.$$

Соотношение $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1} = 2$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$r + ch \not\equiv e \pmod{I}. \quad (41)$$

В случае, когда $n \geq 3$ и (41) не выполняется, последовательность (27) имеет вид

$$2, 1, 1, \dots, 1 \quad \text{или} \quad 2, 1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2.$$

Доказательство. Поскольку $\mu = 0$, верно равенство $d_1 = 2$. Тогда $t_2 = 2t_1$, и ввиду разложения (3) имеем цепочку равенств и сравнений по модулю I^3 :

$$\begin{aligned} f_2(a) &= f_1(f_1(a)) = f_1(a + 2c) \equiv f_1(a) + f'_1(a)2c + f''_1(a)2c^2 = \\ &= a + 2c + (e + 2r)2c + 4hc^2 = a + 4c(e + r + ch). \end{aligned}$$

Учитывая, что $c \in R^*$, получаем

$$d_2 = 2 \Leftrightarrow e + r + ch \not\equiv 0 \pmod{I},$$

то есть равенство $d_2 = 2$ эквивалентно условию (41). С другой стороны, по лемме 7 равенство $d_2 = 2$ эквивалентно цепочке равенств

$$d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1} = 2.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть условие (41) не выполняется. Тогда $d_1 = 2$ и $d_2 = 1$. Пусть $s \geq 3$ и $d_s = 2$. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $d_{s+1} = 2$. Очевидно, $t_{s+1} = 2t_s$ и $t_s = 2^k t_1$ для некоторого $k \geq 1$. Используя лемму 5, получаем, что $\alpha_s \equiv e \pmod{I^2}$. С другой стороны, для некоторого $y \in R^*$ выполняется (38), а значит, и (39). Из (39) и соотношения $\alpha_s \equiv e \pmod{I^2}$ следует, что $t_{s+2} > t_{s+1}$, то есть $d_{s+1} = 2$. ▸

Теоремы 4 и 5 являются «двоичными» аналогами теоремы 2, а условие (41) — аналогом условия (18).

Осталось рассмотреть последний случай: $\delta_1 \neq p, p = 2$.

7. Длины циклов: случай $\delta_1 \neq p, p = 2$

Пусть $\delta_1 \neq p, p = 2$, вершина $a \in R$ принадлежит неособому циклу полиномиального преобразования F .

Лемма 8. Если $\delta_1 \neq p, p = 2$ и

$$t_1 = \dots = t_i < t_{i+1} = \dots = t_j < t_{j+1},$$

то $d_i = \delta_1$ и $d_j = \delta_j = 2$.

Доказательство. Поскольку $t_{i+1} > t_1$, существует такой $y \in R^*$, что

$$f_1(a) \equiv a + 2^i y \pmod{I^{i+1}}.$$

Аналогично лемме 1 можно показать, что для всякого $d \geq 1$

$$f_1^{[d]}(a) \equiv a + 2^i y \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_1^k \pmod{I^{i+1}}.$$

Учитывая, что $\bar{\alpha}_1 \neq \bar{e}$, получаем

$$\forall d \geq 1: f_1^{[d]}(a) \equiv a + \frac{\alpha_1^d - e}{\alpha_1 - e} \cdot 2^i y \pmod{I^{i+1}}.$$

Ввиду того, что $f_1 = f_2 = \dots = f_i$, имеем

$$\forall d \geq 1: f_i^{[d]}(a) \equiv a + \frac{\alpha_1^d - e}{\alpha_1 - e} \cdot 2^i y \pmod{I^{i+1}}.$$

Отсюда $d_i = \delta_1$.

Поскольку $t_j = t_{i+1}$, имеем цепочку равенств и сравнений по модулю I :

$$\alpha_j = f_j'(a) = \left(f_1^{[\delta_1]}\right)'(a) = \prod_{k=0}^{\delta_1-1} f_1'(f_1^{[k]}(a)) \equiv \alpha_1^{\delta_1} \equiv e.$$

Поэтому $\delta_j = 2$, и, поскольку $d_j > 1$, имеем $d_j = 2$. $\triangleright$

Доказанная лемма является аналогом утверждения 9. Теперь сформулируем и докажем аналог утверждения 8.

Утверждение 11. Пусть $\delta_1 \neq p$, $p = 2$, $2 \leq j \leq n - 1$ и верно одно из соотношений:

- 1) $\left(f_1^{[\delta_1]}\right)'(a) \not\equiv 3e \pmod{I^2}$;
- 2) $2t_1 \mid t_j$.

Тогда из равенства $d_j = 2$ следует, что $d_s = 2$ для всякого $s \geq j$.

Доказательство. Используется индукция по $s \geq j$. База индукции очевидна.

Осуществим индуктивный переход от $s \geq j$ к $s + 1$. По предположению индукции $d_s = 2$. Тогда $\delta_s = 2$ и верно соотношение

$$f_s(a) \equiv a + 2^s y \pmod{I^{s+2}},$$

где $y \in R^*$. Ввиду (14) получаем:

$$f_{s+1}(a) = f_s^{[2]}(a) \equiv a + 2^s y(e + \alpha_s) \pmod{I^{s+2}}. \quad (42)$$

По лемме 8 и утверждению 7 последовательность

$$d_1, d_2, \dots, d_{s-1}$$

имеет вид а), б), с) или d), где

- а) $1, 1, \dots, 1, \delta_1$;
- б) $1, 1, \dots, 1, \delta_1, 1, 1, \dots, 1$;
- с) $1, 1, \dots, 1, \delta_1, 1, 1, \dots, 1, 2$;
- д) $1, 1, \dots, 1, \delta_1, 1, 1, \dots, 1, 2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l$, где $\varepsilon_i \in \{1, 2\}$, $i = 1, 2, \dots, l$.

При этом в ситуациях а) и б) верно соотношение $2t_1 \nmid t_s$, а в ситуациях с) и d) — соотношение $2t_1 \mid t_s$.

Пусть выполнено условие 2). Тогда $2t_1 \mid t_s$. Тогда $t_s = 2^k \delta_1 t_1$, где $k \geq 1$. В обозначениях леммы 8 имеем $d_i = \delta_1$ и

$$\alpha_{i+1} = \left(f_1^{[\delta_1]}\right)'(a) \equiv e \pmod{I}.$$

По лемме 5 получаем цепочку равенств и сравнений по модулю I^2

$$\alpha_s = \left(f_{i+1}^{[2^k]}\right)'(a) \equiv (\alpha_{i+1})^{2^k} \equiv e.$$

Из (42) получаем

$$f_{s+1}(a) \equiv a + 2^{s+1}y \pmod{I^{s+2}}.$$

Следовательно, $t_{s+2} > t_{s+1}$. По утверждению 7 из равенства $\delta_s = 2$ следует, что $\delta_{s+1} = 2$. Поэтому $d_{s+1} = 2$.

Пусть выполнено условие 1). Случай $2t_1 \mid t_s$ рассматривается так же, как и выше. Пусть $2t_1 \nmid t_s$. Тогда

$$\alpha_s = \left(f_1^{[\delta_1]} \right)'(a) \equiv e \pmod{I}.$$

Отсюда $\alpha_s \equiv e + 2r \pmod{I^2}$, где $\bar{r} \neq \bar{e}$. Ввиду (42) имеем следующую цепочку сравнений по модулю I^{s+2} :

$$f_{s+1}(a) \equiv a + 2^{s+1}y(e + r) \not\equiv a.$$

Поэтому $t_{s+2} > t_{s+1}$. По утверждению 7 из равенства $\delta_s = 2$ следует, что $\delta_{s+1} = 2$. Следовательно, $d_{s+1} = 2$. ▸

По утверждению 10 для рассматриваемого неособого элемента $a \in R$ существует единственный элемент $a^* \in R$ такой, что $\bar{a} = \bar{a}^*$ и $t_n(a^*) = t_1(a^*)$. Таким образом, равенство $t_n(a) = t_1(a)$ выполняется тогда и только тогда, когда $a = a^*$. Отсюда из леммы 8 и утверждения 11 вытекает центральный результат этого параграфа.

Теорема 6. Если $\delta_1 \neq p$ и $p = 2$, то последовательность (27) имеет один из следующих видов:

- a) $1, 1, \dots, 1$;
- b) $1, 1, \dots, 1, \delta_1$;
- c) $1, 1, \dots, 1, \delta_1, 1, 1, \dots, 1$;
- d) $1, 1, \dots, 1, \delta_1, 1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2$;
- e) $1, 1, \dots, 1, \delta_1, 1, 1, \dots, 1, 2, 1, 1, \dots, 1$;
- f) $1, 1, \dots, 1, \delta_1, 1, 1, \dots, 1, 2, 1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2$.

В каждом пункте первая серия единиц может отсутствовать. Ситуация a) имеет место тогда и только тогда, когда $a = a^*$. Ситуации e) и f) возможны лишь при условии $\left(f_1^{[\delta_1]} \right)'(a) \equiv 3e \pmod{I^2}$.

В следующем параграфе будет обсуждаться вопрос: сколько циклов данной длины имеется в графе G_F ?

8. О числе циклов данной длины

В этом параграфе $R = GR(q^n, p^n)$ — произвольное кольцо Галуа (ограничений на p не накладывается). Пусть a — циклическая вершина, и псевдоцикл $C_F^\#(a)$ неособый. Согласно теореме 1 семейство $C_F^\#(a)$ распадается на циклы. Исследуем длины этих циклов.

Положим $R_s = R/I^s$, $s = 1, 2, \dots, n$. Выберем и зафиксируем $s \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Рассмотрим эпиморфизм

$$\varphi_s: R_{s+1} \rightarrow R_s,$$

приводящий элементы кольца R_{s+1} по модулю I^s . Обозначим через $\tilde{F}$ образ многочлена F при естественном эпиморфизме $R \rightarrow \tilde{R} = R_s$. Если C — некоторый цикл в графе $G_{\tilde{F}}$, то множество $\varphi_s^{-1}(C)$ будем называть *прообразом* цикла C . Цикл длины t будем именовать *t-циклом*.

Всюду далее будут использоваться следующие краткие обозначения: $f = f_1$, $\alpha = \alpha_1$, $\delta = \delta_1$. Пусть вершина $\tilde{a}$ графа $G_{\tilde{F}}$ принадлежит циклу C . Имеет место

Теорема 7. Пусть C есть t -цикл. Тогда:

- 1) если в прообразе цикла C есть цикл длины dt , где $d \mid q-1$ и $d > 1$, то этот прообраз состоит из одного t -цикла и $\frac{q-1}{d}$ циклов длины dt ;
- 2) если в прообразе цикла C есть цикл длины pt , то в этом прообразе $\frac{q}{p}$ циклов длины pt ;
- 3) если в прообразе цикла C есть не менее двух t -циклов, то в этом прообразе q циклов длины t .

Доказательству теоремы предположим лемму.

Лемма 9. Справедливы следующие утверждения

1. Если $f(a) = a + p^s y$ для некоторых $s \geq 1$ и $y \in R$, то для всякого $x \in R$

$$t_{s+1}(a + p^s x) = t_1(a) \Leftrightarrow \bar{y} = (\bar{e} - \bar{\alpha})\bar{x}.$$

2. Если $f_s(a) = a + p^s y$ для некоторых $s \geq 1$ и $y \in R$, то для всякого $x \in R$

$$t_{s+1}(a + p^s x) = t_s(a) \Leftrightarrow \bar{y} = (\bar{e} - \bar{\alpha}_s)\bar{x}.$$

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из эквивалентных друг другу соотношений

$$\begin{aligned} t_{s+1}(a + p^s x) &= t_1(a), \\ f(a + p^s x) &\equiv a + p^s x \pmod{I^{s+1}}, \\ a + p^s y + p^s \alpha x &\equiv a + p^s x \pmod{I^{s+1}}, \\ p^s y &\equiv p^s(e - \alpha)x \pmod{I^{s+1}}, \\ \bar{y} &= (\bar{e} - \bar{\alpha})\bar{x}. \end{aligned}$$

2. Доказательство получается из доказательства утверждения 1 путем замены t_1 на t_s , f на f_s и α на α_s . $\triangleright$

Доказательство теоремы 7. 1) По условию $t_s(a) = t$, и существует такой элемент $x' \in R$, что

$$t_{s+1}(a + p^s x') = dt.$$

Так как $d \mid q - 1$ и $d > 1$, по утверждению 7 имеем $\delta \neq p$. Тогда ввиду следствия 4 и теоремы 6

$$t_1(a) = \dots = t_s(a) = t, \quad d = \delta.$$

Поскольку $\bar{\alpha} \neq \bar{e}$, уравнение относительно x

$$y \equiv (e - \alpha)x \pmod{I}$$

имеет единственное по модулю I решение x'' . По п. 1 леммы 9, следствию 4 и теореме 6

$$\forall x \in R: \quad t_{s+1}(a + p^s x) = \delta t \Leftrightarrow x \not\equiv x'' \pmod{I}.$$

Это означает, что у вершины $\tilde{a}$ есть единственный прообраз, лежащий на t -цикле, и $q - 1$ прообразов, лежащих на δt -циклах.

На одном δt -цикле лежит δ прообразов вершины $\tilde{a}$ (они расположены на цикле с шагом $t = t_s(a)$). Поэтому прообраз цикла C состоит из одного цикла длины t и $\frac{q-1}{\delta}$ циклов длины δt .

2) Пусть в графе $G_{\tilde{F}}$ вершина $\tilde{a}$ лежит на t -цикле, и в прообразе цикла C есть pt -цикл. Достаточно показать, что все прообразы вершины $\tilde{a}$ лежат на pt -циклах. Возможны два случая: $\bar{\alpha} = \bar{e}$ и $\bar{\alpha} \neq \bar{e}$.

Пусть $\bar{\alpha} = \bar{e}$. При доказательстве утверждения 7 было показано, что в этой ситуации $\bar{\alpha}_s = \bar{e}$. По пункту 2 леммы 9 равенство

$$t_{s+1}(a + p^s x) = t_s(a)$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{y} = 0$. Однако для некоторого $x' \in R$ верно равенство

$$t_{s+1}(a + p^s x') = pt_s(a).$$

Это означает, что $\bar{y} \neq 0$, и для любого $x \in R$

$$t_{s+1}(a + p^s x) > t_s(a).$$

Поскольку $\delta_s = p$, всякий прообраз вершины $\tilde{a}$ лежит на цикле длины pt .

Рассмотрим случай $\bar{\alpha} \neq \bar{e}$. Достаточно доказать, что $\bar{\alpha}_s = \bar{e}$ (дальнейшее доказательство проводится так же, как в предыдущем случае). Поскольку

$$t_{s+1}(a + p^s x') = pt_s(a),$$

по следствию 4 и теореме 6 имеем

$$\delta \mid \Delta = d_1 d_2 \dots d_{s-1}.$$

Отсюда вытекает цепочка сравнений по модулю I

$$\alpha_s \equiv (f^{[\Delta]})'(a) \equiv (f'(a))^\Delta = \alpha^\Delta \equiv e.$$

3) Пусть существуют такие $x_1, x_2 \in R$, что $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ и

$$t_{s+1}(a + p^s x_1) = t_s(a) = t_{s+1}(a + p^s x_2).$$

По пункту 2 леммы 9 имеем

$$(\bar{e} - \bar{\alpha}_s)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0.$$

Отсюда $\bar{e} = \bar{\alpha}_s$. Поскольку

$$t_{s+1}(a + p^s x_1) = t_s(a),$$

получаем, что $\bar{y} = 0$. Но тогда согласно пункту 2 леммы 9 всякий прообраз элемента $\tilde{a}$ лежит на цикле длины $t = t_s(a)$. Поэтому прообраз цикла C состоит из циклов длины t . Количество этих циклов совпадает с количеством прообразов элемента $\tilde{a}$, то есть с q . $\triangleright$

9. Заключение

В работе исследована цикловая структура полиномиального генератора над кольцом Галуа $R = GR(q^n, p^n)$. В частности, доказано, что для произвольного полиномиального преобразования F и любого элемента $a \in R$ имеет место неравенство

$$t_n(a) \leq p^{n-2}(q-1) \cdot t_1(a). \quad (43)$$

В некоторых ситуациях эта оценка достижима. Путем вычислений на ЭВМ показано, что над кольцами $R_1 = GR(8^3, 2^3)$ и $R_2 = GR(25^3, 5^3)$ существуют пары (F, a) , для которых неравенство (43) обращается в равенство. Получены первые нетривиальные результаты о цикловом типе произвольного полиномиального преобразования F .

Авторы выражают глубокую признательность профессору А. А. Нечаеву за постановку задачи и внимание к этой работе.

Список литературы

1. Анашин В. С. О группах и кольцах, обладающих транзитивными полиномами // XVI Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы. — Часть II. — 1981. — С. 4–5.
2. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 288 с.
3. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А. Алгебра. — М.: Гелиос, 2003. — 749 с.
4. Елизаров В. П. Конечные кольца. — М.: Гелиос, 2006. — 304 с.
5. Козлитин О. А. Полиномиальные преобразования ГЕО-кольца простой характеристики // Дискретная математика. — 2004. — Т. 16. Вып. 3. — С. 105–117.
6. Ларин М. В. Транзитивные полиномиальные преобразования колец вычетов // Дискретная математика. — 2002. — Т. 14. Вып. 2. — С. 20–32.
7. Нечаев А. А. Полиномиальные преобразования конечных коммутативных колец главных идеалов // Математические заметки. — 1980. — Т. 27. Вып. 6. — С. 885–899.