Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, В. А. Миронова, Анализ спектра случайных симметрических булевых функций, *Матем. вопр. криптогр.*, 2013, том 4, выпуск 1, 59–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 10:57:45

УДК 519.212.2

Анализ спектра случайных симметрических булевых функций

Г. И. Ивченко¹, Ю. И. Медведев², В. А. Миронова³

^{1,3}НИУ Высшая школа экономики, Москва

²Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 20.IV.2012

Исследуются различные вероятностные свойства спектра Уолша случайной симметрической булевой функции в общей стохастической модели, определяемой заданием на множестве всех симметрических функций некоторой вероятностной меры. В рассматриваемой модели ключевую роль играют свойства многочленов Кравчука, поэтому в работе приводятся также сводка основных сведений о них.

Ключевые слова: симметрическая булева функция, преобразование Уолша, спектр функции, характеристическая функция, параметрическая мера, многочлены Кравчука, матрица Кравчука, спектральные характеристики, предельные теоремы

Analysis of the spectrum of random symmetric Boolean functions

G. I. Ivchenko¹, Yu. I. Medvedev², V. A. Mironova³

^{1,3}NRU Higher School of Economics, Moscow

²Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow

Abstract. General probabilistic model of a random symmetric Boolean function of n variables is proposed. The characteristic function of the Walsh spectrum of a random symmetric Boolean function is defined; exact and asymptotic distributions of some spectrum characteristics as $n \rightarrow \infty$ are obtained in the case of the parametric measure. The basic properties of the Krawtchouk's polynomials (which are used in proofs) are reviewed.

Key words: symmetric Boolean function, Walsh transform, spectrum of function, characteristic function, parametric measure, Krawtchouk's polynomials, Krawtchouk matrix, spectrum characteristics, limit theorems

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 59–88 (Russian).

© 2013 Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, В. А. Миронова

1. Введение: спектр симметрической булевой функции и вероятностная модель. Пусть S_n — множество симметрических булевых функций от n переменных $f(\bar{x})$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_n = \{0, 1\}^n$, то есть таких функций, которые принимают одно и то же значение на всех векторах $\bar{x}$ одинакового веса $\|\bar{x}\| = \sum_{i=1}^n x_i$. Симметрические булевы функции находят широкое применение в теории кодирования и криптографии, и их анализу посвящено значительное число работ. Обзор публикаций на эту тему можно найти в статьях А. Канто и М. Видо [1], С. Саркара и С. Майтры [2] и М. Муффрона [3].

Обозначим $f(\bar{x}) = f_k$, если $\|\bar{x}\| = k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда вместо таблицы истинности функции f (вектора размерности 2^n) можно использовать более экономное её представление в виде двоичного вектора $\bar{f}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ (номера единичных координат этого вектора называют иногда *рабочими величинами*, а нулевых — *нерабочими*).

Рассмотрим *спектр Уолша* (далее — просто спектр) произвольной такой функции:

$$w^f(\bar{u}) = \sum_{\bar{x} \in V_n} f(\bar{x}) (-1)^{(\bar{u}, \bar{x})}, \quad \bar{u} \in V_n. \quad (1)$$

Здесь, напомним, скалярное произведение $(\bar{u}, \bar{x})$ векторов пространства V_n вычисляется по формуле $(\bar{u}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^n u_i x_i \pmod{2}$.

Если $\|\bar{u}\| = m$, то соотношение (1) можно переписать в виде

$$w^f(\bar{u}) = \sum_{k=0}^n f_k \sum_{\bar{x}: \|\bar{x}\|=k} (-1)^{(\bar{u}, \bar{x})} = \sum_{k=0}^n f_k [N_0(m, k; n) - N_1(m, k; n)], \quad (2)$$

где

$$N_i(m, k; n) = \left| \left\{ \bar{x} : \|\bar{x}\| = k, \|\bar{u}\| = m, (\bar{u}, \bar{x}) = i \right\} \right|, \quad i = 0, 1. \quad (3)$$

Из (2) следует, что функция $w^f(\bar{u})$, $\bar{u} \in V_n$, также является симметрической, поэтому, обозначив $w^f(\bar{u}) = w_m^f$, если $\|\bar{u}\| = m$, будем далее под спектром симметрической функции f понимать вектор

$$\bar{w}_n^f = (w_0^f, w_1^f, \dots, w_n^f). \quad (4)$$

Далее для определённых в (3) величин нетрудно записать их явные выражения в виде следующих комбинаторных сумм:

$$N_0(m, k; n) = \sum_j \binom{m}{2j} \binom{n-m}{k-2j},$$

$$N_1(m, k; n) = \sum_j \binom{m}{2j+1} \binom{n-m}{k-2j-1},$$

а их разность в (2) можно записать в виде

$$\sum_j (-1)^j \binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j} = P_k(m; n), \quad (5)$$

где $P_k(m; n)$ — известные в анализе *многочлены Кравчука* [1], [2], [4].

В итоге спектральные коэффициенты w_m^f симметрической функции f можно записать в виде

$$w_m^f = \sum_{k=0}^n f_k P_k(m; n), \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (6)$$

Если ввести *матрицу Кравчука*

$$P_n = (P_k(m; n))_{k, m=0, 1, \dots, n}, \quad (7)$$

то соотношения (6) можно записать в матричном виде:

$$\bar{w}_n^f = \bar{f}_n P_n. \quad (8)$$

Это соотношение можно обратить. Действительно, как известно, булева функция однозначно определяется своим спектром (1) по формуле обращения

$$f(\bar{x}) = 2^{-n} \sum_{\bar{u} \in V_n} w^f(\bar{u}) (-1)^{(\bar{u}, \bar{x})}, \quad \bar{x} \in V_n,$$

что для симметрических функций, аналогично выводу соотношения (6), можно переписать в виде

$$f_k = 2^{-n} \sum_{m=0}^n w_m^f P_m(k; n), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

или в матричном виде

$$\bar{f}_n = 2^{-n} \bar{w}_n^f P_n. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что матрица Кравчука невырождена и что обратная к ней матрица имеет вид

$$P_n^{-1} = 2^{-n} P_n. \quad (10)$$

Отметим также следующее из (10) равенство

$$P_n^2 = 2^n I_{n+1}, \quad (11)$$

где I_m — единичная матрица порядка m .

Из (11) сразу следует известное соотношение ортогональности для многочленов Кравчука:

$$\sum_{m=0}^n P_k(m; n) P_m(r; n) = 2^n \delta_{kr}, \quad (12)$$

где δ_{kr} — символ Кронекера.

Дальнейшие свойства многочленов Кравчука будут представлены в следующем разделе.

Мы будем исследовать вероятностные свойства спектра $\bar{w}_n^f = (w_0^f, w_1^f, \dots, w_n^f)$ случайной симметрической булевой функции f в общей стохастической модели, когда на множестве S_n задаётся некоторая вероятностная мера $\mathbf{P}$, приписывающая каждому вектору $\bar{f}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ вес $\mathbf{P}(\bar{f}_n)$. Пусть

$$\phi_n(\bar{t}) = \mathbf{E} e^{i \bar{t} \bar{f}_n'}, \quad \bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n), \quad (13)$$

есть соответствующая характеристическая функция.

Тогда характеристическая функция спектра $\bar{w}_n^f = (w_0^f, w_1^f, \dots, w_n^f)$ с учётом (8) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi_n(\bar{t}) &= \mathbf{E} e^{i \bar{t} \bar{w}_n^f} = \mathbf{E} e^{i (\bar{t} P_n') \bar{f}_n'} = \phi_n(\bar{t} P_n') = \\ &= \phi_n \left(\sum_{m=0}^n t_m P_k(m; n), k = 0, 1, \dots, n \right). \end{aligned} \quad (14)$$

В данной работе мы будем детально анализировать случай, когда компоненты вектора $\bar{f}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ независимы и компонента f_k принимает

значения 0 и 1 с вероятностями соответственно q_k и p_k , $p_k + q_k = 1$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Такую модель мы будем называть для краткости $\bar{p}$ -моделью; в случае, когда все $p_k = p > 0$, мы будем говорить о p -модели.

Для $\bar{p}$ -модели формулы (13) и (14) принимают соответственно вид

$$\phi_n(\bar{t}) = \prod_{k=0}^n \mathbf{E} e^{it_k f_k} = \prod_{k=0}^n (q_k + p_k e^{it_k})$$

и

$$\Phi_n(\bar{t}) = \prod_{k=0}^n \left(q_k + p_k \exp \left\{ i \sum_{m=0}^n t_m P_k(m; n) \right\} \right). \quad (15)$$

Представление (15) является основой для дальнейшего анализа. Из него, а также из (8) видно, что в рассматриваемой модели ключевую роль играют свойства многочленов Кравчука, поэтому для удобства последующего изложения мы приводим в п. 2 сводку основных сведений о них.

2. Многочлены Кравчука и их свойства. Многочлены Кравчука были предложены в 30-х годах прошлого столетия украинским математиком М. Ф. Кравчуком, и они являются частным случаем обширного класса ортогональных многочленов дискретного переменного. Эти многочлены широко используются в различных задачах анализа и теории вероятностей, и они рассматривались в значительном числе работ. Это — монографии авторов Г. Сеге [4], Ф. Дж. Мак-Вильямса и Н. Дж. Слоэна [5], В. М. Сидельникова [6], Г. Бэйтмена, А. Эрдейи [7], В. Гузика и Р. Станицы [8], а также работы Р. Савицкого [9], В. И. Хохлова [10], [11] и других авторов. Из многочисленных свойств многочленов Кравчука здесь мы приводим лишь необходимые для последующего развития темы.

1) Из (5) легко находим вид производящей функции:

$$P(z; m, n) = \sum_k P_k(m; n) z^k = (1-z)^m (1+z)^{n-m}. \quad (16)$$

Используя обозначение $[z^n] f(z) = \text{coef}_{z^n} f(z)$, можно записать, что

$$P_k(m; n) = [z^k] (1-z)^m (1+z)^{n-m}. \quad (16')$$

Замечание. В литературе можно встретить и другие, несколько отличные, определения многочленов Кравчука, например

$$P_k(m; n) = [z^k] (1-z)^m (1+(l-1)z)^{n-m},$$

где l — дополнительный параметр (в нашем случае $l = 2$).

Из (16), в частности, следует, что

$$\sum_k P_k(m; n) = 0 \quad \text{при } m > 0, \quad (17)$$

$$P_k(0; n) = \binom{n}{k}, \quad P_k(n; n) = (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \text{а также } P_k(m; n) = (-1)^k P_k(n-m; n).$$

Кроме того, так как при $m > 0$

$$(1-z)^{m-1} (1+z)^{n-m} = (1-z)^{-1} P(z; m, n) = \sum_N \left(\sum_{k \leq N} P_k(m; n) \right) z^N,$$

то, с учётом (16') и (17), имеем также следующие соотношения:

$$\sum_{k \leq N} P_k(m; n) = - \sum_{k > N} P_k(m; n) = P_N(m-1; n-1). \quad (18)$$

Замечание. Целый класс линейных соотношений типа свёртки для многочленов Кравчука можно получить по следующей схеме: домножить левую и правую части соотношения (16) на $(1-z)^{\pm r}$ либо на $(1+z)^{\pm r}$ и разложить функцию в левой части по степеням z . Например, с учётом (16') получаем

$$\begin{aligned} [z^k] (1-z)^{-r} P(z; m, n) &= \sum_{j=0}^k \binom{r+j-1}{j} P_{k-j}(m; n) = \\ &= [z^k] (1-z)^{m-r} (1+z)^{n-m} = P_k(m-r; n-r). \end{aligned}$$

Далее, из (16) имеем

$$\begin{aligned} \sum_m P(z; m, n) \binom{n}{m} t^m &= (1+z+t(1-z))^n = (1+t+z(1-t))^n = \\ &= \sum_k \binom{n}{k} z^k (1-t)^k (1+t)^{n-k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_m \binom{n}{m} P_k(m; n) t^m = \binom{n}{k} (1-t)^k (1+t)^{n-k}.$$

Полагая здесь $t=1$, получаем при $k > 0$ соотношение

$$\sum_m \binom{n}{m} P_k(m; n) = 0 \quad (19)$$

(аналог соотношения (17)); отметим также, что $P_0(m; n) = 1$ для всех $m \geq 0$.

2) Имеют место следующие интегральные представления:
при чётном m

$$P_k(m; n) = (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos[(n-2k)x] \sin^m x \cos^{n-m} x \, dx,$$

при нечётном m

$$P_k(m; n) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin[(n-2k)x] \sin^m x \cos^{n-m} x \, dx.$$

Действительно, из (16) следует, что

$$\begin{aligned} P_k(m; n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1-z)^m (1+z)^{n-m}}{z^{k+1}} \, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\phi} (1-e^{i\phi})^m (1+e^{i\phi})^{n-m} \, d\phi. \end{aligned}$$

Но $1 - e^{i\phi} = -2i \sin \frac{\phi}{2} e^{i\frac{\phi}{2}}, \quad 1 + e^{i\phi} = 2 \cos \frac{\phi}{2} e^{i\frac{\phi}{2}},$

следовательно,

$$\begin{aligned} P_k(m; n) &= \frac{(-i)^m 2^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{\phi}{2}(n-2k)} \sin^m \frac{\phi}{2} \cos^{n-m} \frac{\phi}{2} \, d\phi = \\ &= \frac{(-i)^m 2^n}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^m \frac{\phi}{2} \cos^{n-m} \frac{\phi}{2} \left[e^{i(n-2k)\frac{\phi}{2}} + (-1)^m e^{-i(n-2k)\frac{\phi}{2}} \right] \, d\phi, \end{aligned}$$

откуда, в зависимости от чётности m , получаем указанные формулы.

Из указанных интегральных представлений, в частности, следует, что при нечётном m

$$P_n(m; 2n) = 0, \quad (20)$$

а при чётном m

$$\begin{aligned} P_n(m; 2n) &= (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2^{2n+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^{2n-m} x \, dx = \\ &= (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2^{2n}}{\pi} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{2n-m+1}{2}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

где $B(a, b)$ — бета-функция: $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} \, dt, \quad a > 0, b > 0.$

Из этих представлений непосредственно следует также общая оценка

$$|P_k(m; n)| \leq \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^{n-m} x \, dx = \frac{2^n}{\pi} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n-m+1}{2}\right). \quad (22)$$

Подчеркнём, что эта оценка равномерна по k .

Известно [7], что функция $B(x) = B(x, a-x)$, $0 < x < a$, монотонно убывает на интервале $(0, a/2)$ и монотонно возрастает на интервале $(a/2, a)$, поэтому правая часть в (22) как функция m монотонно убывает на интервале от 0 до $\left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right]$, а далее монотонно возрастает. В крайних точках имеем оценки

$$|P_k(0; n)| = |P_k(n; n)| \leq \frac{2^n}{\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = 2^n \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \leq 2^n \sqrt{\frac{2}{n}} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

и это есть оценка максимума $P_k(m; n)$ при всех значениях k .

3) С помощью производящей функции (16) находим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P_k(l; n) P_k(m; n) &= [z^0] P(z; l, n) P\left(\frac{1}{z}; m, n\right) = \\ &= [z^0] (1-z)^l (1+z)^{n-l} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^m \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{n-m} = \\ &= (-1)^m [z^n] (1-z)^{l+m} (1+z)^{2n-l-m} = \\ &= (-1)^m P_n(l+m; 2n) = (-1)^l P_n(l+m; 2n) = \sigma_{lm}(n). \end{aligned}$$

Это с учётом (20) и (21) даёт следующий результат:

$$\sigma_{lm}(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } l+m \text{ нечётно,} \\ (-1)^{m+\frac{l+m}{2}} \frac{2^{2n}}{\pi} B\left(\frac{l+m+1}{2}, n - \frac{l+m-1}{2}\right), & \text{если } l+m \text{ чётно.} \end{cases} \quad (23)$$

Отметим важный частный случай этого результата:

$$\sigma_{mm}(n) = \sigma_m^2(n) = \sum_{k=0}^n P_k^2(m; n) = \frac{2^{2n}}{\pi} B\left(m + \frac{1}{2}, n - m + \frac{1}{2}\right), \quad (24)$$

при этом $\sigma_{n-m}^2(n) = \sigma_m^2(n)$.

Используя асимптотическую формулу Стирлинга для гамма-функции

$$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

из (24) нетрудно получить следующие асимптотические оценки (они нам понадобятся в дальнейшем):

$$\sigma_m^2(n) \sim \frac{2^{2n}}{\pi} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) n^{-m-\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

если $n \rightarrow \infty$, а $m \geq 0$ фиксировано;

$$\sigma_m^2(n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} 2^{2n} m^m (n-m)^{n-m} n^{-n}, \quad (26)$$

если $n, m, n-m \rightarrow \infty$.

В дальнейшем нам понадобится также следующая формула для суммы лишь по чётным значениям индекса k :

$$\sum_{k \geq 0} P_{2k}^2(m; n) = \frac{2^{2n-1}}{\pi} B\left(m + \frac{1}{2}, n - m + \frac{1}{2}\right) + \frac{(-1)^{m+n/2}}{2} \binom{n}{n/2} I(n \equiv 0 \pmod{2}) \quad (27)$$

(сумма по нечётным значениям индекса k получается вычитанием этого выражения из (24)). Подчеркнём, что при нечётном n эта сумма равна половине полной суммы (24).

Формула (27) доказывается аналогично (24), исходя из соотношений (см. (16))

$$\begin{aligned} P(z; m, n) + P(-z; m, n) &= 2 \sum_{k \geq 0} P_{2k}(m; n) z^k = \\ &= (1-z)^m (1+z)^{n-m} + (1+z)^m (1-z)^{n-m} = Q(z) \end{aligned}$$

и

$$\sum_{k \geq 0} P_{2k}^2(m; n) = [z^0] Q(z) Q\left(\frac{1}{z}\right).$$

4) Отметим дополнительно некоторые свойства матрицы Кравчука $P_n = (P_k(m; n))_{k, m=0, 1, \dots, n}$, определённой в (7). Первая её строка состоит целиком из единиц. Сумма всех строк составляет вектор $(2^n, 0, \dots, 0)$. Первый столбец

состоит из биномиальных коэффициентов: $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n} \right)'$. Симметричные относительно главной диагонали элементы связаны соотношением

$$\binom{n}{m} P_k(m; n) = \binom{n}{k} P_m(k; n), \quad 0 \leq k, m \leq n,$$

то есть матрица не является симметрической, в то же время нормированная матрица с элементами $\binom{n}{k}^{-1} P_k(m; n)$ свойством симметрии обладает.

Отметим также, что нулевые элементы матрицы расположены симметрично относительно главной диагонали.

При чётных значениях n средний столбец (с номером $1 + n/2$) состоит из элементов $(-1)^{k/2} \binom{n/2}{k/2}$ при чётных k , а при нечётных k эти элементы равны 0. Аналогичное свойство имеет место и для средней строки.

Примеры. $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 P_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2^2 I_3,$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_3^2 = 2^3 I_4.$$

5) Наконец, отметим связь многочленов Кравчука с широко известной в анализе *гипергеометрической функцией* $F(a; b; c; z)$ [4]:

$$F(a; b; c; z) = 1 + \sum_{k \geq 1} \left[\prod_{j=0}^{k-1} \frac{(a+j)(b+j)}{(c+j)} \right] \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 1.$$

Пусть случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами m, n и k :

$$\mathbf{P}\{X = x\} = \frac{\binom{m}{x} \binom{n-m}{k-x}}{\binom{n}{k}}, \quad 0 \leq x \leq \min(k, m).$$

Тогда

$$P_k(m; n) = 2 \binom{n}{k} \left(P\{X \equiv 0 \pmod{2}\} - \frac{1}{2} \right),$$

а также

$$P_k(m; n) = \binom{n}{k} F(-k; -m; n-m; -1).$$

3. Моменты спектра симметрической функции. Общие формулы для первых и вторых моментов случайного спектра $\bar{w}_n^f = (w_0^f, w_1^f, \dots, w_n^f)$ в $\bar{p}$ -модели сразу следуют из представления (8):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \bar{w}_n^f &= \mathbf{E} \bar{f}_n P_n, \\ \mathbf{D} \bar{w}_n^f &= \left(\text{cov}(w_l^f, w_m^f) \right)_0^n = P_n' \mathbf{D} \bar{f}_n P_n. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \bar{f}_n &= \bar{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n), \\ \mathbf{D} \bar{f}_n &= \text{Diag}(p_0 q_0, p_1 q_1, \dots, p_n q_n), \end{aligned}$$

где $\text{Diag}(\bar{a})$ — диагональная матрица с главной диагональю $\bar{a}$, поэтому формулы (28) в координатной записи принимают вид (далее для упрощения записи верхний индекс f мы опускаем):

$$\begin{aligned} \mu_m(n) &= \mathbf{E} w_m = \sum_{k=0}^n p_k P_k(m; n), \quad m = 0, 1, \dots, n, \\ d_{lm}(n) &= \text{cov}(w_l, w_m) = \sum_{k=0}^n p_k q_k P_k(l; n) P_k(m; n), \quad l, m = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (29)$$

В частном случае, когда все $p_k = p > 0$ (p -модель), формулы (29) значительно упрощаются: из (17) следует, что

$$\mu_0(n) = p 2^n, \quad \mu_m(n) = 0, \quad m > 0, \quad (30)$$

а (см. (23))

$$d_{lm}(n) = pq \sum_{k=0}^n P_k(l; n) P_k(m; n) = pq \sigma_{lm}(n). \quad (31)$$

Таким образом, компоненты спектра с номерами разной чётности в этом случае оказываются некоррелированными, а для дисперсий получаем представления (см. (24))

$$d_m^2(n) = \mathbf{D} w_m = pq \sigma_m^2(n), \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (32)$$

Отметим также следующие свойства дисперсий в p -модели, являющиеся прямым следствием свойств бета-функции:

$$1) \text{ симметрия: } d_m^2(n) = d_{n-m}^2(n),$$

$$2) \text{ монотонность: } d_m^2(n) > d_{m+1}^2(n), \quad 0 \leq m \leq \frac{n}{2} - 1.$$

Из приведённой в (25)–(26) асимптотики следует, что с ростом m эти дисперсии весьма быстро убывают, достигая своего минимального значения, асимптотически равного $pq \sqrt{\frac{2}{\pi n}} 2^n$, при $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

4. Предельные распределения. В этом разделе мы обсудим вопросы асимптотического поведения при $n \rightarrow \infty$ различных характеристик спектра случайной симметрической булевой функции в общей $\bar{p}$ -модели (см. введение). Как следует из представления (6), в рассматриваемой модели компоненты спектра представляют собой линейные комбинации независимых бернуллиевских случайных величин, поэтому следует ожидать, что к ним применима центральная предельная теорема теории вероятностей, а специфика модели связана с асимптотическими свойствами многочленов Кравчука. Инструментом же для получения соответствующих результатов будет служить нам общая характеристическая функция спектра (15).

1) *Общая $\bar{p}$ -модель.* Введём нормированные случайные величины (см. (29)–(32))

$$w_m^* = \frac{w_m - \mu_m(n)}{d_m(n)}, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

где

$$d_m^2(n) = \mathbf{D} w_m = \sum_{k=0}^n p_k q_k P_k^2(m; n),$$

и будем предполагать выполненным условие

$$0 < c_1 \leq p_k \leq c_2 < 1, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (33)$$

Тогда $1 - c_2 \leq q_k \leq 1 - c_1$, $k = 0, 1, \dots, n$, и для всех k имеют место оценки

$$0 < c = \max(c_1(1 - c_2), c_2(1 - c_1)) \leq p_k q_k \leq \frac{1}{4},$$

и для дисперсий $d_m^2(n)$ получаем неравенства

$$c\sigma_m^2(n) \leq d_m^2(n) \leq \frac{1}{4}\sigma_m^2(n), \quad (34)$$

из которых следует (см. (32)), что асимптотическое поведение дисперсий элементов спектра в $\bar{p}$ -модели такое же, как и в p -модели.

Однако такого нельзя сказать о корреляциях. Рассмотрим, например, корреляцию симметричных величин w_m и w_{n-m} . В силу свойства

$$P_k(m; n) = (-1)^k P_k(n - m; n) \quad (\text{см. (16)})$$

$$\rho_{m, n-m}(n) = \text{corr}(w_m, w_{n-m}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k p_k q_k P_k^2(m; n) / d_m^2(n), \quad (35)$$

и из (23)–(24) следует, что в p -модели этот коэффициент корреляции при нечётном n равен нулю, а при чётном n

$$\rho_{m, n-m}(n) = \sigma_{m, n-m}(n) / \sigma_m^2(n) = (-1)^{m+n/2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) / B\left(m + \frac{1}{2}, n - m + \frac{1}{2}\right).$$

Применение формулы Стирлинга для гамма-функции даёт, что если $n \rightarrow \infty$, а $m \geq 0$ фиксировано, то эта корреляция убывает как $O(n^m 2^{-n})$, то есть в этом случае рассматриваемые величины асимптотически не коррелированы.

Рассмотрим теперь ту же корреляцию (35) в следующем варианте $\bar{p}$ -модели: $p_k = p_1$, если k нечётно, и $p_k = p_2$, если k чётно. Тогда

$$\rho_{m, n-m}(n) = \frac{p_2 q_2 \sum_{k \geq 0} P_{2k}^2(m; n) - p_1 q_1 \sum_{k \geq 0} P_{2k+1}^2(m; n)}{p_2 q_2 \sum_{k \geq 0} P_{2k}^2(m; n) + p_1 q_1 \sum_{k \geq 0} P_{2k+1}^2(m; n)},$$

и из (27) следует, что при тех же условиях, что и выше, этот коэффициент корреляции имеет пределом величину $(p_2 q_2 - p_1 q_1) / (p_2 q_2 + p_1 q_1)$, которая отлична от нуля, если $p_1 \neq p_2$. Этот пример говорит о том, что свойство асимптотической некоррелированности спектральных коэффициентов симметрической булевой функции, имеющее место в p -модели, не выполняется, вообще говоря, в общей $\bar{p}$ -модели.

После этих предварительных рассмотрений перейдём к основному вопросу — анализу предельных распределений элементов спектра, и, прежде всего, установим следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (33) и для определённого в (35) коэффициента корреляции $\rho_{m,n-m}(n)$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $m \geq 0$ существует предел $\lim \rho_{m,n-m}(n) = \rho$. Тогда совместное распределение величин w_m и w_{n-m} асимптотически нормально:

$$\mathcal{L}(w_m^*, w_{n-m}^*) \sim \mathcal{N}\left((0,0), \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right).$$

В частности, в p -модели эти величины также и асимптотически независимы.

Доказательство. Из общей характеристической функции спектра (15) имеем (напомним, что $d_m = d_{n-m}$, так как $P_k(m;n) = (-1)^k P_k(n-m;n)$, и для сокращения записи аргумент n у μ_m и d_m опускаем)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{i(t_1 w_m^* + t_2 w_{n-m}^*)} &= \exp\{-i(t_1 \mu_m + t_2 \mu_{n-m})/d_m\} \times \\ &\times \prod_{k=0}^n \left(q_k + p_k \exp\{i(t_1 P_k(m;n) + t_2 P_k(n-m;n))/d_m\} \right). \end{aligned}$$

Из оценок (22), (25) и (34) с использованием известной связи бета- и гамма-функций, а также формулы Стирлинга для последней, следует, что в рассматриваемых условиях равномерно по k

$$|P_k(m;n)|/d_m = O(n^{-1/4}),$$

поэтому можем записать следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{E} e^{i(t_1 w_m^* + t_2 w_{n-m}^*)} &= -i(t_1 \mu_m + t_2 \mu_{n-m})/d_m + \\ &+ \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + p_k \left(\exp\{i(t_1 + (-1)^k t_2) P_k(m;n)/d_m\} - 1 \right) \right) = \\ &= -i(t_1 \mu_m + t_2 \mu_{n-m})/d_m + \sum_{k=0}^n \left(p_k \left(\exp\{i(t_1 + (-1)^k t_2) P_k(m;n)/d_m\} - 1 \right) \right) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(p_k \left(\exp\{i(t_1 + (-1)^k t_2) P_k(m;n)/d_m\} - 1 \right) \right)^2 + O\left(\sum_{k=0}^n |P_k(m;n)|^3 d_m^{-3} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n p_k \left((t_1 + (-1)^k t_2) P_k(m; n) / d_m \right)^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n p_k^2 \left((t_1 + (-1)^k t_2) P_k(m; n) / d_m \right)^2 + O(n^{-1/4}) = \\
&= -\frac{1}{2} (t_1^2 + 2t_1 t_2 \rho_{m, n-m}(n) + t_2^2) + O(n^{-1/4}).
\end{aligned}$$

Здесь все остаточные члены разложений имеют вид $O\left(\sum_{k=0}^n |P_k(m; n)|^3 d_m^{-3}\right)$.

Вынося за знак суммы максимум из $|P_k(m; n)|/d_m$, имеющий порядок $O(n^{-1/4})$, получим сумму квадратов, которая в силу соотношений (24), (34) имеет порядок $O(1)$. Отсюда следует вид остатка.

В условиях теоремы это выражение имеет пределом $-\frac{1}{2}(t_1^2 + 2t_1 t_2 \rho + t_2^2)$, что и требовалось доказать.

Аналогично устанавливается и асимптотическая нормальность произвольного конечного набора $\bar{w}^*(n) = (w_{m_1}^*, \dots, w_{m_s}^*)$, $0 \leq m_1 < \dots < m_s$, спектральных коэффициентов.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (33) и для коэффициентов корреляции $\rho_{lm}(n) = d_{lm}(n) / (d_l(n) d_m(n))$ (см. (29)) при $n \rightarrow \infty$ и любых фиксированных l и m существуют пределы $\lim \rho_{lm}(n) = \rho_{lm}$. Тогда вектор $\bar{w}^*(n) = (w_{m_1}^*, \dots, w_{m_s}^*)$ при любых фиксированных $0 \leq m_1 < \dots < m_s$ асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и матрицей вторых моментов $(\rho_{m_i m_j})_{i, j=1, \dots, s}$.

Для доказательства достаточно установить, что характеристическая функция

$$\mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^s t_j w_{m_j}^* \right\} = \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^s t_j \frac{\mu_{m_j}}{d_{m_j}} \right\} \prod_{k=0}^n \left(1 + p_k \left(\exp \left\{ i \sum_{j=1}^s t_j \frac{P_k(m_j; n)}{d_{m_j}} \right\} - 1 \right) \right)$$

в указанных условиях имеет пределом величину $\exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^s t_i t_j \rho_{m_i m_j} \right\}$, что обосновывается аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание. В случае p -модели для коэффициентов корреляции имеем представления (см. (23)–(24))

$$\rho_{lm}(n) = (-1)^{l+\frac{l+m}{2}} \frac{B\left(\frac{l+m+1}{2}, n - \frac{l+m-1}{2}\right)}{\sqrt{B\left(l+\frac{1}{2}, n-l+\frac{1}{2}\right) B\left(m+\frac{1}{2}, n-m+\frac{1}{2}\right)}}$$

(если $l+m$ чётно), а применение здесь формулы Стирлинга для гамма-функции даёт, что в рассматриваемых условиях эти величины имеют пределы

$$\lim \rho_{lm}(n) = \rho_{lm} = (-1)^{l+\frac{l+m}{2}} \Gamma\left(\frac{l+m+1}{2}\right) / \sqrt{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}.$$

Подчеркнём следующую особенность этого результата. Как следует из соотношений (34) и (25), при $n \rightarrow \infty$ и ограниченных значениях m дисперсии $d_m^2(n) = \mathbf{D}w_m$ весьма быстро убывают с увеличением m : $d_{m+1}(n)/d_m(n) = O(n^{-1/2})$ (напомним, что $d_m = d_{n-m}$), поэтому компоненты вектора $\bar{w}^*(n) = (w_{m_1}^*, \dots, w_{m_k}^*)$ имеют разный порядок нормировки. Отсюда следует, в частности, что спектральные коэффициенты весьма сильно «разделены»: с большой вероятностью максимальными являются крайние из них. Например, в условиях теоремы 2

$$\mathbf{P}(|w_{m+1} - \mu_{m+1}| < |w_m - \mu_m|) = \mathbf{P}\left(|w_{m+1}^*| < |w_m^*| \frac{d_m}{d_{m+1}}\right) \rightarrow 1,$$

поскольку множитель $\frac{d_m}{d_{m+1}}$ неограниченно возрастает, а случайные величины w_m^* и w_{m+1}^* имеют собственные предельные распределения.

Более детально эти важные для приложений вопросы мы обсудим в рамках аналитически более просто устроенной p -модели.

2) *Симметричная p -модель.* В этом случае (см. (30)–(32)) выражения для моментов спектральных коэффициентов значительно упрощаются, что позволяет осуществить дальнейшее продвижение в анализе асимптотических свойств спектра.

Будем под w_0 понимать далее центрированную величину $w_0 - p2^n$ (остальные спектральные коэффициенты в рассматриваемом случае центрированы в нуле) и рассмотрим следующую характеристику спектра:

$$\Delta_m(n) = \max_{m \leq k \leq n-m} |w_k|/d_m, \quad m \geq 0. \quad (36)$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. В p -модели при $n \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $m \geq 0$ случайная величина (36) имеет предельную функцию распределения $(2\Phi(x)-1)^2$, $x > 0$, где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Доказательство. Как следует из теоремы 1, при $n \rightarrow \infty$ и, ограниченных значениях m предельное распределение величины

$$\delta_m(n) = \max(|w_m^*|, |w_{n-m}^*|)$$

существует:

$$\mathbf{P}(\delta_m(n) < x) = \mathbf{P}(|w_m^*| < x, |w_{n-m}^*| < x) \rightarrow (2\Phi(x)-1)^2, \quad x > 0.$$

Такое же предельное распределение в этих условиях имеет и определённая в (36) характеристика. Чтобы установить это, достаточно показать, что величина

$$\Delta'_m(n) = \max_{m+1 \leq k \leq n-m-1} |w_k|/d_m$$

стремится по вероятности к нулю. Используя неравенство Чебышева, имеем

$$\mathbf{P}(\Delta'_m(n) > \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=m+1}^{n-m-1} \{|w_k| > \varepsilon d_m\}\right) \leq \sum_{k=m+1}^{n-m-1} \mathbf{P}(|w_k| > \varepsilon d_m) \leq \sum_{k=m+1}^{n-m-1} \frac{d_k^2}{\varepsilon^2 d_m^2}. \quad (37)$$

Из (25) и (26), а также свойства монотонности дисперсий следует, что $d_k^2/d_m^2 = O(n^{-1})$ при $k = m+1$ и $k = n-m-1$ и $d_k^2/d_m^2 = O(n^{-2})$ при $m+2 \leq k \leq n-m-2$. Поэтому вся сумма в правой части (37) есть величина $O(n^{-1})$, что и требовалось показать.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно также установить, что если вместо характеристики (36) рассмотреть характеристику

$$\Delta_{m,s}(n) = \max_{m \leq k \leq n-s} |w_k|/d_{\min(m,s)}, \quad m \neq s,$$

то при любых фиксированных m и s она имеет предельную функцию распределения $2\Phi(x)-1$, $x > 0$, такую же, как и случайная величина

$$|w_{\min(m,s)}^*|.$$

Эти результаты позволяют заключить, что в p -модели с вероятностью, стремящейся к 1, максимальными среди всех (либо части) спектральных коэффициентов являются крайние из них. Если же говорить более конкретно, то структура спектра $\bar{w}_n = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ случайной симметрической булевой функции устроена асимптотически следующим образом.

Максимальным коэффициентом является w_0 : он принимает значения в окрестности точки $p2^n$, и размер этой окрестности имеет порядок $O(2^n/n^{1/4})$; все остальные коэффициенты принимают значения в окрестностях нуля, причём размеры соответствующих окрестностей резко различаются: для w_n разброс имеет порядок $O(2^n/n^{1/4})$, для w_1 и w_{n-1} — порядок $O(2^n/n^{3/4})$, для w_2 и w_{n-2} — порядок $O(2^n/n^{5/4})$, и так далее.

Список литературы

1. Canteaut A., Videau M. Symmetric Boolean Function // IEEE Trans. Inf. Theory. — 2005. — V. 51. № 8. — P. 2791–2811.
2. Sarkar S., Maitra S. Efficient search for symmetric Boolean functions under constraints on Walsh spectra values // J. Comb. Math. and Comb. Comput. — 2009. — V. 68. — P. 163–191.
3. Mouffron M. Balanced alternating and symmetric functions over finite sets // Workshop on Boolean Functions: Cryptography and Applications (BFCA'08). — 2008. — Copenhagen, Denmark. — P. 27–44.
4. Сегё Г. Ортогональные многочлены. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1962.
5. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.
6. Сидельников В. М. Теория кодирования. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
7. Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965.
8. Cusick Th. W., Stanica P. Cryptographic Boolean Functions and Applications // AP Elsevier, Amsterdam etc. — 2009.
9. Savicky P. On the bent Boolean functions that are symmetric // European J. Comb. — 1994. — V. 15. — P. 407–410.
10. Хохлов В. И. Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм // Теория вероятности и её применение. — 2001. — Т. 46. Вып. 3. С. 585–592.
11. Хохлов В. И. Многочлены Эрмита и многочлены Пуассона-Шарлье как классические пределы многочленов Кравчука // Обозр. прикл. и промышл. матем. — 2005. — Т. 16. Вып. 5. — С. 937–940.