Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, А. М. Шойтов, О числах множеств эквивалентных цепочек в последовательности независимых случайных величин, *Матем. вопр. криптогр.*, 2013, том 4, выпуск 1, 77–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk74>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:16:56

УДК: 519.212.2+519.214.5

О числах множеств эквивалентных цепочек в последовательности независимых случайных величин

В. Г. Михайлов¹, А. М. Шойтов²

¹Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

²Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 3.X.2012

В работе выведены предельные теоремы для распределения вектора из чисел r -множеств эквивалентных s -цепочек в последовательности $\mathbf{X}$ из $n + s - 1$ независимых одинаково распределенных на множестве $\{1, \dots, N\}$ случайных величин. Рассматриваются две области изменения параметров при $n, N \rightarrow \infty$, $s < N$. В первой из них при переходе к пределу ограничено среднее число s -цепочек из элементов $\mathbf{X}$, имеющих совпадения знаков в своей записи, а во второй, напротив, ограничено среднее число s -цепочек, которые не имеют совпадений знаков.

Ключевые слова: полиномиальные испытания, эквивалентные цепочки, сложное пуассоновское распределение

On the numbers of equivalent tuples sets in a sequence of independent random variables

V. G. Mihailov¹, A. M. Shoitov²

¹*Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow*

²*Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow*

Abstract. Let $\mathbf{X}$ be a sequence of $n + s - 1$ polynomial trials with N outcomes. Limit joint distributions of the numbers of r -sets of equivalent s -tuples in $\mathbf{X}$ are proved. Two types of conditions on the parameters $n, N \rightarrow \infty$, $s < N$ are considered. Under the conditions of the first type the mean number of s -tuples with coinciding outcomes is bounded. Under the conditions of the second type the mean number of s -tuples without coinciding outcomes is bounded.

Key words: polynomial trials, equivalent tuples, compound Poisson distribution

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 77–86 (Russian).

1. Введение

Задача об эквивалентных цепочках в случайных дискретных последовательностях ведет свое начало с работы [1]. Напомним, что цепочки $(x_1, \dots, x_s)$ и $(y_1, \dots, y_s)$ называют эквивалентными, если существует такая перестановка $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(N))$ знаков алфавита $\{1, \dots, N\}$, при которой $(y_1, \dots, y_s) = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_s))$. Эквивалентные цепочки всегда имеют одинаковую структуру, а именно, если $x_i = x_j$, то и $y_i = y_j$, и наоборот (подробности см. в [2]). Свойство эквивалентности цепочек $(x_1, \dots, x_s)$ и $(y_1, \dots, y_s)$ будем обозначать $(x_1, \dots, x_s) \sim (y_1, \dots, y_s)$. Структуру цепочки, все знаки которой различны, будем называть *тривиальной*. Все такие цепочки эквивалентны между собой.

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения в множестве $\{1, \dots, N\}$ с вероятностями $\mathbf{P}\{X_t = k\} = p_k$, $k = 1, \dots, N$. Положим $P_r = \sum_{k=1}^N p_k^r$.

Зададим натуральные числа s, n , $s < n$, и рассмотрим последовательность

$$\mathbf{Y}(n, s) = \{Y_1(s), \dots, Y_n(s)\}, \quad Y_t(s) = (X_t, \dots, X_{t+s-1}), \quad (1)$$

s -цепочек, встретившихся на начальном отрезке (длины $n + s - 1$) последовательности $\mathbf{X}$. Введем случайные величины: $\mu_r = \mu_r(N, n, s)$ — число множеств попарно эквивалентных цепочек в $\mathbf{Y}(n, s)$, состоящих из $r \geq 2$ цепочек, $\mu_1 = \mu_1(N, n, s)$ — число цепочек в $\mathbf{Y}(n, s)$, не имеющих в этой последовательности себе эквивалентных, и $\mu = \sum_{r \geq 1} \mu_r(N, n, s)$ — число всех таких множеств.

Если интерпретировать множество всех возможных структур s -цепочек как множество ячеек, а появление в $\mathbf{Y}(n, s)$ s -цепочки с определенной структурой — как помещение частицы в ячейку, отвечающую этой структуре, мы получим схему зависимого размещения частиц, в которой величины $\mu_r = \mu_r(N, n, s)$ имеют традиционный смысл: это числа ячеек, в каждую из которых попало r частиц, $r = 0, 1, \dots$, а $\mu = \mu(N, n, s)$ — число занятых ячеек.

В настоящей работе исследуется предельное распределение вектора $M_R = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_R)$ (здесь R — натуральное число) в случае, когда $n, N \rightarrow \infty$, а параметр s остается постоянным или растет вместе с n, N согласованным с ними образом, но $s < N$.

В разделе 2 рассматривается последовательность исходов полиномиальной схемы, причем параметры $n, N \rightarrow \infty$ и $p_1, \dots, p_N$ при переходе к пределу меняются так, что ограничено среднее число s -цепочек элементов рассматриваемой последовательности, имеющих совпадения знаков в своей за-

писи. В этом случае свойства вектора M_R определяются цепочками, имеющими лишь одно совпадение знаков. Такую структуру цепочки будем называть *простейшей* структурой. Здесь выводятся оценки скорости сближения распределения вектора M_R с сопровождающим дискретным распределением и выводится соответствующая предельная теорема для случая $s = \text{const} \geq 2$. Показано также, что в этом случае при $s \rightarrow \infty$ для величин μ_r возможны только несобственные либо сосредоточенные в нуле дискретные предельные распределения.

В разделе 3 рассматривается случай, когда $p_k = 1/N$, $k = 1, \dots, N$, $n, N \rightarrow \infty$, $sN^{-1} \rightarrow \lambda \in (0, 1)$. Накладывается также условие, ограничивающее среднее число s -цепочек, которые не имеют в своей записи совпадений знаков. Доказано, что в этом случае распределение бесконечномерного вектора $(\mu_2, \mu_3, \dots)$ сходится к специальному бесконечномерному дискретному распределению.

2. Случай, когда среднее число s -цепочек с нетривиальной структурой ограничено

В этом разделе рассмотрим случай, когда в последовательности $Y(n, s)$ имеются главным образом цепочки с не более чем одним повторением символов (цепочки с тривиальной и простейшей структурами). Изучается распределение вектора

$$M_R = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_R), \quad R \geq 1.$$

Рассмотрим независимые случайные величины $\pi_1(\rho), \dots, \pi_{s-1}(\rho)$, распределенные по закону Пуассона с параметром ρ , случайные величины

$$l_r(\rho) = \sum_{k=1}^{s-1} (s-k) I\{\pi_k(\rho) = r\}, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad (2)$$

и вектор $L_R(\rho) = (l_1(\rho), l_2(\rho), \dots, l_R(\rho))$. Распределению вектора $L_R(\rho)$ отвечает производящая функция

$$\varphi(z_1, \dots, z_R) = \prod_{m=1}^{s-1} \left(1 + \sum_{r=1}^R \left(\frac{\rho^r}{r!} e^{-\rho} (z_r^m - 1) \right) \right). \quad (3)$$

Через $\mathcal{L}(Z)$ условимся обозначать распределение случайной величины Z . Расстояние по вариации между распределениями случайных величин ξ

и ζ обозначим через $d(\mathcal{L}(\xi), \mathcal{L}(\zeta))$. Напомним, что для распределений на множестве неотрицательных целых чисел

$$d(\mathcal{L}(\xi), \mathcal{L}(\zeta)) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{P}\{\xi = k\} - \mathbf{P}\{\zeta = k\}|.$$

Теорема 1. Пусть натуральные числа $s \geq 2$, $R \geq 1$. Тогда

$$d(\mathcal{L}(M_R), \mathcal{L}(L_R(nP_2))) \leq 5s^3nP_3 + \left(1 + \left(1 - \frac{R}{n}\right)^{-1}\right)s^2P_2. \quad (4)$$

Непосредственно из (4) вытекает следующая предельная теорема.

Следствие 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $nP_2 \rightarrow \rho$, $0 < \rho < \infty$, а параметры $s \geq 1, R \geq 1$ постоянны. Тогда $\mathcal{L}(M_R) \rightarrow \mathcal{L}(L_R(\rho))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ранее в работе [3] было показано, что при $N, n \rightarrow \infty$, $s = \text{const} \geq 2$ и таком изменении вероятностей $p_1, \dots, p_N$, что $nP_2 \rightarrow \rho$, $0 < \rho < 1$, вероятность наличия в последовательности $\mathbf{Y}(n, s)$ эквивалентных цепочек с нетривиальной структурой имеет пределом величину $1 - e^{-(s-1)\rho}(1+\rho)^{s-1}$. Эта граница достигается именно на цепочках с простейшей структурой.

Теорема 2. Пусть $N, n, s \rightarrow \infty$ так, что $s \leq n$ и $s^3nP_3 \rightarrow 0$. Тогда $\mathbf{P}\{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_R > 0\} \rightarrow 0$ при любом $R \geq 1$.

Далее потребуются следующие обозначения. Пусть $S^{(1)}(N, s)$ — множество тех структур цепочек длины s из букв алфавита $\{1, \dots, N\}$, в которых имеется ровно одно совпадение букв. Для структуры из $S^1(N, s)$, при которой совпадают знаки на i -м и j -м местах, $1 \leq i < j \leq s$, будем использовать обозначение « (i, j) ». Пусть $S^{(2)}(N, s)$ — множество тех структур, при которых цепочка имеет более одного совпадения букв. Тривиальную структуру удобно обозначить символом «0». Тогда

$$S(N, s) = S^{(1)}(N, s) \cup S^{(2)}(N, s) \cup \{0\}$$

множество всех возможных структур цепочек длины s из букв алфавита $\{1, \dots, N\}$.

В общем случае структуру будем обозначать символом σ . Число цепочек в $\mathbf{Y}(n, s)$, имеющих структуру σ , обозначим u_σ .

При $r = 1, 2, \dots, R$ введем обозначения

$$\begin{aligned}\mu_r^{(1)} &= \sum_{\sigma \in S^{(1)}(N, s)} I\{u_\sigma = r\} = \sum_{1 \leq i < j \leq s} I\{u_{i,j} = r\}, \\ \mu_r^{(2)} &= \sum_{\sigma \in S^{(2)}(N, s)} I\{u_\sigma = r\}, \quad \mu_r^{(0)} = I\{u_0 = r\}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\mu_r = \mu_r^{(1)} + \mu_r^{(2)} + \mu_r^{(0)}.$$

Из определений следует, что

$$\mu_r^{(1)} = \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{m=1}^{s-k} I\{u_{m,m+k} = r\}.$$

Определим случайные величины

$$\eta_k = \sum_{i=1}^n I\{X_i = X_{i+k}\}, \quad k = 1, \dots, s-1,$$

$$m_r^{(1)} = \sum_{k=1}^{s-1} (s-k) I\{\eta_k = r\}, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad (5)$$

$$m_r^{(0)} = I\left\{n - \sum_{k=1}^{s-1} (s-k) \eta_k = r\right\}, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad (6)$$

векторы $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{s-1})$ и $\bar{m}_R^{(i)} = (m_1^{(i)}, \dots, m_R^{(i)})$, $i = 0, 1$.

Рассмотрим события

$D_1 = D_1(n, s) = \{\text{в последовательности } \mathbf{Y}(n, s) \text{ присутствуют } s\text{-цепочки из } S^{(2)}(N, s)\},$

$D_2 = D_2(n, s) = \{\text{величины } X_n, \dots, X_{n+s-1} \text{ различны}\}.$

Лемма 1. *Выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}\{M_R \neq \bar{m}_R^{(1)} + \bar{m}_R^{(0)}\} \leq \mathbf{P}\{D_1 \cup D_2\}. \quad (7)$$

Доказательство леммы. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\overline{D_1} \cap \overline{D_2} &\implies \\ \implies \{u_{(i,j)} = \eta_{j-i}, \quad 1 \leq i < j \leq s-1; \quad u_\sigma(N, n, s) = 0, \quad \sigma \in S^{(2)}(N, s)\} &\implies \\ \implies \{\mu_r^{(1)} = m_r^{(1)}, \quad \mu_r^{(2)} = 0, \quad \mu_r^{(0)} = m_r^{(0)}, \quad r = 1, 2, \dots\}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{M_R = \overline{m}_R^{(1)} + \overline{m}_R^{(0)}\} \geq \\ & \geq \mathbf{P}\{u_{(i,j)} = \eta_{j-i}, 1 \leq i < j \leq s-1; u_\sigma(N, n, s) = 0, \sigma \in S^{(2)}(N, s)\} \geq \\ & \geq 1 - \mathbf{P}\{D_1 \cup D_2\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует (7). Лемма доказана.

Лемма 2. *Выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}\{M_R \neq \overline{m}_R^{(1)}\} \leq \mathbf{P}\{D_1 \cup D_2\} + \frac{s^2 n P_2}{2(n-R)}. \quad (9)$$

Доказательство леммы. Из определений следует, что

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{s-1} (s-k) \eta_k \right) \leq \frac{s^2 n P_2}{2}.$$

Поэтому с помощью неравенства Иенсена приходим к оценке

$$\mathbf{P}\{\overline{m}_r^{(0)} \neq \overline{0}\} = \mathbf{P} \left\{ n - \sum_{k=1}^{s-1} (s-k) \eta_k \leq R \right\} \leq \frac{s^2 n P_2}{2(n-R)}. \quad (10)$$

Теперь (9) следует из (7), (10) и неравенства

$$\mathbf{P}\{M_R \neq \overline{m}_R^{(1)}\} \leq \mathbf{P}\{M_R \neq \overline{m}_R^{(1)} + \overline{m}_R^{(0)}\} + \mathbf{P}\{\overline{m}_r^{(0)} \neq \overline{0}\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $n \geq s \geq 3$. Тогда выполнено неравенство*

$$\mathbf{P}\{D_1 \cup D_2\} \leq \frac{1}{2}(s-1)(s-2)^2 n (P_3 + P_2^2) + \frac{1}{2}(s-1)_2 P_2. \quad (11)$$

Лемма 3 является прямым следствием леммы 1 работы [3].

Лемма 4. *Для расстояния по вариации между распределениями случайных векторов $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{s-1})$ и $\pi(nP_2) = (\pi_1(nP_2), \dots, \pi_{s-1}(nP_2))$ выполнено неравенство*

$$d(\eta, \pi(nP_2)) < 2(s-1)^2 n (P_3 + 3P_2^2). \quad (12)$$

Лемма 4 была доказана в работе [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценки лемм 3 и 4 внешне несколько отличаются от аналогичных оценок работы [3]. Это объясняется тем, что в [3] рассматривается последовательность $\mathbf{X}$ длины n , содержащая $n - s + 1$ цепочек длины s , а у нас таких цепочек ровно n .

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся неравенством

$$d(\mathcal{L}(M_R), \mathcal{L}(\overline{m}_R^{(1)})) \leq \mathbf{P}\{M_R \neq \overline{m}_R^{(1)}\} \quad (13)$$

и неравенством

$$d(\mathcal{L}(L_R)(nP_2), \mathcal{L}(\overline{m}_R^{(1)})) \leq d(\eta, \pi(nP_2)), \quad (14)$$

вытекающим из идентичности функциональных связей векторов $L_R(nP_2)$ и $\overline{m}_R^{(1)}$ с векторами $\pi(nP_2)$ и η соответственно (см. формулы (2) и (5)). Из (9), (13) и (14) получаем неравенство

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}(M_R), \mathcal{L}(L_R)(nP_2)) &\leq \\ &\leq \mathbf{P}\{D_1 \cup D_2\} + \frac{s^2 n P_2}{2(n - R)} + d(\eta, \pi(nP_2)), \end{aligned} \quad (15)$$

подставив в которое оценки (11) и (12), после небольших огрублений получаем (4). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из условий $s \leq n$, $s^3 n P_3 \rightarrow 0$ и неравенства $P_2^2 \leq P_3$ следует соотношение $s^2 P_2 \rightarrow 0$. Поэтому из (4) и условия $R = \text{const}$ следует, что

$$d(\mathcal{L}(M_R), \mathcal{L}(L_R)(nP_2)) \rightarrow 0.$$

Осталось изучить поведение распределения случайной величины

$$\mu_{1,R} = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_R$$

при $s \rightarrow \infty$. Из формулы (3) следует, что производящая функция распределения этой величины имеет вид

$$\varphi(z) = \prod_{m=1}^{s-1} (1 - \Pi_{1,r}(nP_2) + \Pi_{1,r}(nP_2)z^m), \quad (16)$$

где

$$\Pi_{1,R}(\rho) = \sum_{r=1}^R \frac{\rho^r}{r!} e^{-\rho} \in (0, 1). \quad (17)$$

Производящая функция $\varphi(z)$ отвечает величине

$$S_{1,R} = \kappa_1 + 2\kappa_2 + \dots + (s-1)\kappa_{s-1},$$

где $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{s-1}$ независимые одинаково распределенные индикаторы,

$$\mathbf{P}\{\kappa_i = 0\} = 1 - \Pi_{1,R}(nP_2), \quad \mathbf{P}\{\kappa_i = 1\} = \Pi_{1,R}(nP_2), \quad i = 1, \dots, s-1.$$

Поэтому для любого $k = 0, 1, \dots, s-2$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{1 \leq \mu_{1,R} \leq k\} &= \mathbf{P}\{1 \leq S_{1,R} \leq k\} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \mathbf{P}\{\kappa_i = 1\} \prod_{j=k+1}^{s-1} \mathbf{P}\{\kappa_j = 0\} = \end{aligned} \quad (18)$$

$$= k\Pi_{1,R}(nP_2) (1 - \Pi_{1,R}(nP_2))^{s-k-1}. \quad (19)$$

При $s \rightarrow \infty$ выражение в правой части этой цепочки соотношений для любого k стремится к нулю независимо от поведения параметра nP_2 . Теорема 2 доказана.

3. Случай, когда среднее число s -цепочек с тривиальной структурой ограничено

Рассмотрим независимые случайные величины ξ и η , имеющие сложные пуассоновские распределения с производящими функциями

$$\begin{aligned} \mathbf{E}z^\xi &= \exp \left\{ \frac{\lambda_1(z-1)}{1 - (1-\alpha)^2 z} \right\}, \quad \mathbf{E}z^\eta = \exp \left\{ \frac{\alpha\lambda(z-1)}{1 - (1-\alpha)z} \right\}, \quad (20) \\ \lambda_1 &= \frac{\alpha(2-\alpha)\lambda^2}{2} \left(e^{\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть вероятности $p_1 = \dots = p_N = 1/N$, а параметры $N, n, s \rightarrow \infty$ таким образом, что

$$sN^{-1} \rightarrow \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (21)$$

$$n(N)_s N^{-s} \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (22)$$

Тогда

$$\mathcal{L}((\mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots)) \rightarrow \mathcal{L}((\xi + I\{\eta = 2\}, I\{\eta = 3\}, I\{\eta = 4\}, \dots)), \quad (23)$$

$$\mathcal{L}((n - \mu, n - \mu_1)) \rightarrow \mathcal{L}((\xi + (\eta - 1)I\{\eta \geq 2\}, 2\xi + \eta I\{\eta \geq 2\})), \quad (24)$$

причем совместное распределение векторов, указанных в левых частях (23) и (24), сходится к совместному распределению векторов, указанных в правых частях этих соотношений.

Предельное распределение рассматриваемого в (23) бесконечномерного вектора является вырожденным. Оно задается сложными пуассоновскими распределениями независимых случайных величин ξ и η .

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим случайные величины

$$\xi_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} I\{Y_{i_1}(s) \sim Y_{i_2}(s) \sim \dots \sim Y_{i_r}(s)\},$$

равные числу r -кратных совпадений структур цепочек в последовательности $\mathbf{Y}(n, s)$. Здесь $r \geq 2$ — натуральное число. Свойства распределений этих случайных величин изучались в работах [1, 2, 4–7].

Для чисел множеств попарно эквивалентных цепочек в $\mathbf{Y}(n, s)$, состоящих из цепочек с тривиальной и нетривиальной структурой, будем использовать обозначения $\mu_r^{(0)}$ и $\mu_r^{(1,2)} = \mu_r^{(1)} + \mu_r^{(2)}$ соответственно. Введем также случайные величины:

$\xi_r^{(1,2)}$ — число наборов по r цепочек с одинаковой нетривиальной структурой в последовательности $\mathbf{Y}(n, s)$,

$\xi_r^{(0)}$ — число наборов по r цепочек с тривиальной структурой в последовательности $\mathbf{Y}(n, s)$,

ζ — число цепочек с тривиальной структурой в $\mathbf{Y}(n, s)$.

Ясно, что

$$\xi_r = \xi_r^{(1,2)} + \xi_r^{(0)}, \quad \xi_r^{(0)} = C_\zeta^r, \quad r \geq 2. \quad (25)$$

Тогда

$$\xi_r^{(0)} = C_\zeta^r, \quad \mu_r^{(0)} = I\{\zeta = r\}, \quad \mu_r = \mu_r^{(1,2)} + I\{\zeta = r\}, \quad (26)$$

$$\xi_r = \xi_r^{(1,2)} + C_\zeta^r, \quad \xi_r^{(1,2)} = \sum_{k=r}^n C_k^r \mu_r^{(1,2)}. \quad (27)$$

Свойства случайных величин $\xi_r^{(1,2)}$ и ζ исследовались в работе [7]. Воспользуемся одной из теорем этой работы, которая в нашем случае может быть сформулирована следующим образом.

Теорема А. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда $\mathcal{L}((\xi_2^{(1,2)}, \zeta)) \rightarrow \mathcal{L}((\xi, \eta))$ и $\xi_r^{(1,2)} \rightarrow 0$ по вероятности, $r \geq 3$, где случайные величины ξ и η те же, что в теореме 3.

Из теоремы А, соотношений (26), (27) и

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + n\mu_n = n, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

следует заключение теоремы. Теорема 3 доказана.

Авторы признательны А. М. Зубкову за полезные замечания.

Список литературы

1. Буравлев С. М. Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний // Дискретная математика. — 1999. — Т. 11. Вып. 2. — С. 53–75.
2. Михайлов В. Г., Шойтов А. М. Структурная эквивалентность s -цепочек в случайных дискретных последовательностях // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15. Вып. 4. — С. 7–34.
3. Михайлов В. Г. Об асимптотическом поведении вероятности наличия в последовательности эквивалентных цепочек с нетривиальной структурой // Дискретная математика. — 2008. — Т. 20. Вып. 4. — С. 113–119.
4. Михайлов В. Г. Об асимптотических свойствах распределения числа пар H -связанных цепочек // Дискретная математика. — 2002. — Т. 14. Вып. 3. — С. 122–129.
5. Шойтов А. М. Пуассоновское приближение для числа повторений значений дискретной функции от цепочек // Дискретная математика. — 2005. — Т. 17. Вып. 2. — С. 56–69.
6. Шойтов А. М. Дискретные предельные распределения для числа цепочек с одинаковой структурой в последовательности равновероятных испытаний // Обзор прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 14. Вып. 3. — С. 474–484.
7. Шойтов А. М. Структурно эквивалентные цепочки в равновероятной полиномиальной схеме // Математические вопросы криптографии. — 2012. — Т. 3. Вып. 3. — С. 129–151.