Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Пичкур, Описание класса подстановок, представимых в виде произведения двух подстановок с фиксированным числом мобильных точек. II, *Матем. вопр. криптогр.*, 2013, том 4, выпуск 1, 87–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk75>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:52:45

УДК 512.542.74

**Описание класса подстановок,
представимых в виде произведения
двух подстановок с фиксированным числом
мобильных точек. II**

А. Б. Пичкур

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 19.VII.2012

В работе полностью описано строение класса подстановок степени N , представимых в виде произведения двух подстановок с q и $q+t$ мобильными точками, $2 \leq t < N-2$, $2 \leq q < \frac{N-t}{2} + 1$.

Ключевые слова: симметрическая группа, мультипликативные представления, неподвижные точки

Description of the set of permutations representable as a product of two permutations with fixed number of mobile points. II

A. B. Pichkur

LLC "Certification Research Center", Moscow

Abstract. We describe completely the structure of the set of N -element permutations representable as the product of two permutations with q and $q+t$ mobile points correspondingly, $1 \leq t < N-2$, $2 \leq q < \frac{N-t}{2} + 1$.

Key words: symmetric group, multiplicative representations, fixed points

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 87–109 (Russian).

© 2013 Пичкур А. Б.

Пусть подстановка $G \in S_N$ — множество мобильных точек подстановки G , $2 \leq q \leq N$ — натуральное число. Обозначим через

$$\Gamma_N(q) = \{G \in S_N \mid |\Gamma(G)| = q\}$$

множество всех подстановок степени N , имеющих ровно q мобильных точек. $\Gamma(G) \subseteq \Omega = \{1, \dots, N\}$.

В предшествующей работе [1] было полностью описано строение множества $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q)$ при $4 \leq q \leq \frac{N}{2}$ и $N \geq 8$.

§ 1

Сначала опишем множество всех подстановок из $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$, то есть всех подстановок, представимых в виде произведения двух подстановок с q и $q+1$ мобильными точками.

Утверждение 1. Если $q_1 \neq q_2$, то $\Gamma_N(q_1) \cdot \Gamma_N(q_2) = \Gamma_N(q_2) \cdot \Gamma_N(q_1)$.

Доказательство утверждения сразу вытекает из критерия сопряженности подстановок в S_N .

Утверждение 2. Если $N \geq 6$, $2 \leq q_1 < q_2 < N$, то имеет место включение

$$\Gamma_N(q_1) \cdot \Gamma_N(q_2) \subseteq \Gamma_N(q_1+1) \cdot \Gamma_N(q_2+1).$$

Доказательство проводится по аналогии с доказательством утверждения 3 работы [1].

Пусть $H \in \Gamma_N(q_1) \cdot \Gamma_N(q_2)$, то есть имеет место равенство $H = H_1 \cdot H_2$ для некоторых $H_1 \in \Gamma_N(q_1)$, $H_2 \in \Gamma_N(q_2)$.

1. Если $\Gamma(H_1) \not\subset \Gamma(H_2)$, то существуют $\alpha_1 \in \Gamma(H_1) \setminus \Gamma(H_2)$ и $\beta_1 \in \Gamma(H_2) \setminus \Gamma(H_1)$. Рассмотрим циклы из цикловой записи подстановок H_1, H_2 , содержащие α_1 и β_1 соответственно:

$$H_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1',$$

$$H_2 = (\beta_1, \dots, \beta_s) \cdot H_2'.$$

Нетрудно убедиться в выполнении равенства

$$\begin{aligned} & ((\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1) \cdot H_1') ((\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \cdot H_2') = \\ & = ((\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1') ((\beta_1, \dots, \beta_s) \cdot H_2') = H_1 \cdot H_2 = H. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}\Gamma((\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1) \cdot H_1') &= q_1 + 1, \\ \Gamma((\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \cdot H_2') &= q_2 + 1,\end{aligned}$$

то полученное равенство означает, что $H \in \Gamma_N(q_1 + 1) \cdot \Gamma_N(q_2 + 1)$.

2. Пусть теперь $\Gamma(H_1) \subseteq \Gamma(H_2)$. В этом случае $\Gamma(H) \subseteq \Gamma(H_2)$ и, значит, $|\Gamma(H)| \leq q_2$. Из соотношения

$$|\Omega \setminus (\Gamma(H_1) \cup \Gamma(H_2))| = N - |\Gamma(H_2)| = N - q_2 \geq 1$$

следует, что можно выбрать точку $\delta \in \Omega \setminus \Gamma(H_2)$.

Рассмотрим два возможных случая.

Сначала предположим, что $\Gamma(H) \neq \Gamma(H_2)$. Это означает, что существует $\alpha \in \Gamma(H_1)$ со свойством $H(\alpha) = \alpha$. Отсюда следует, что для некоторого $\beta \neq \alpha$, $\beta \in \Gamma(H_1)$ выполняются равенства $H_1(\alpha) = \beta$, $H_2(\beta) = \alpha$. Тогда выберем $\delta \in \Omega \setminus \Gamma(H_2)$ и положим

$$H_1'(x) = \begin{cases} \delta, & x = \alpha, \\ \beta, & x = \delta, \\ H_1(x), & x \in \Gamma(H_1) \setminus \{\alpha\}, \end{cases} \quad H_2'(x) = \begin{cases} \delta, & x = \beta, \\ \alpha, & x = \delta, \\ H_2(x), & x \in \Gamma(H_2) \setminus \{\beta\}. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $H = H_1' \cdot H_2'$. Так как при этом

$$|\Gamma(H_1')| = q_1 + 1, \quad |\Gamma(H_2')| = q_2 + 1,$$

то полученное равенство означает, что $H \in \Gamma_N(q_1 + 1) \cdot \Gamma_N(q_2 + 1)$.

Наконец, пусть $\Gamma(H) = \Gamma(H_2)$. Это означает, что $H_1(\alpha) = \beta$, $\beta \neq \alpha$ и $H_2(\beta) = \gamma$, $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \neq \beta$ для любого $\alpha \in \Gamma(H_1)$. Зафиксируем некоторую точку $\alpha \in \Gamma(H_1)$, выберем $\delta \in \Omega \setminus \Gamma(H_2)$ и положим

$$H_1'(x) = \begin{cases} \delta, & x = \alpha, \\ \beta, & x = \delta, \\ H_1(x), & x \in \Gamma(H_1) \setminus \{\alpha\}, \end{cases} \quad H_2'(x) = \begin{cases} \delta, & x = \beta, \\ \gamma, & x = \delta, \\ H_2(x), & x \in \Gamma(H_2) \setminus \{\beta\}. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $H = H_1' \cdot H_2'$. Так как при этом

$$|\Gamma(H_1')| = q_1 + 1, \quad |\Gamma(H_2')| = q_2 + 1,$$

то полученное равенство означает, что $H \in \Gamma_N(q_1 + 1) \cdot \Gamma_N(q_2 + 1)$.

Утверждение доказано полностью.

Теорема 1. Пусть $N \geq 8$, $3 \leq q \leq \frac{N}{2}$, $G \in S_N$. Если $1 < |\Gamma(G)| \leq 2q - 1$, то существуют подстановки $H_1 \in \Gamma_N(q)$, $H_2 \in \Gamma_N(q+1)$, для которых выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$.

Прежде чем приступать к доказательству этой теоремы, проверим ее выполнение для небольших значений $q \in \{3, 4\}$.

Сначала отметим один очевидный факт: если $H \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$, то любая подстановка, сопряженная с H , также лежит в $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$. Значит, множество $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$ является объединением некоторых классов сопряженных в группе S_N подстановок.

Пусть $q = 3$. Согласно теореме 1 должно выполняться включение

$$\Gamma_N(2) \cup \Gamma_N(3) \cup \Gamma_N(4) \cup \Gamma_N(5) \subseteq \Gamma_N(3) \cdot \Gamma_N(4).$$

С учетом сделанного выше замечания для проверки этого свойства необходимо выписать все возможные цикловые структуры подстановок из $\Gamma_N(2) \cup \Gamma_N(3) \cup \Gamma_N(4) \cup \Gamma_N(5)$ и в каждом случае указать подстановки из $\Gamma_N(3), \Gamma_N(4)$, произведение которых дает подстановку с нужной цикловой структурой. Выпишем результаты расчетов в виде таблицы.

	Цикловые структуры	Представление в виде произведения двух подстановок из $\Gamma_N(3), \Gamma_N(4)$
$\Gamma_N(2)$	$[2^1]$	$(1, 2, 3) \cdot (1, 3, 4, 2) = (2, 4)$
$\Gamma_N(3)$	$[3^1]$	$(1, 2, 3) \cdot (1, 3)(2, 4) = (1, 4, 2)$
$\Gamma_N(4)$	$[2^2]$	$(1, 2, 3) \cdot (1, 2)(4, 5) = (2, 3)(4, 5)$
	$[4^1]$	$(1, 2, 3) \cdot (1, 2, 3, 4) = (1, 3, 2, 4)$
$\Gamma_N(5)$	$[2^1, 3^1]$	$(1, 2, 3) \cdot (1, 2, 4, 5) = (1, 4, 5)(2, 3)$
	$[5^1]$	$(1, 2, 3) \cdot (1, 4)(3, 5) = (1, 2, 5, 3, 4)$

Пусть теперь $q = 4$. В силу утверждения 2

$$\Gamma_N(2) \cup \Gamma_N(3) \cup \Gamma_N(4) \cup \Gamma_N(5) \subseteq \Gamma_N(3) \cdot \Gamma_N(4) \subseteq \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(5).$$

Поэтому осталось проверить включение $\Gamma_N(6) \cup \Gamma_N(7) \subseteq \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(5)$. Снова выпишем результаты расчетов в виде таблицы.

	Цикловые структуры	Представление в виде произведения двух подстановок из $\Gamma_N(5)$
$\Gamma_N(6)$	$[6^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (2, 3, 4, 5, 6) = (1, 3, 5, 6, 2, 4)$
	$[2^1, 4^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (2, 3, 4)(5, 6) = (1, 3, 2, 4)(5, 6)$
	$[2^3]$	$(1, 2)(4, 5) \cdot (1, 2, 3)(6, 7) = (1, 3)(4, 5)(6, 7)$
	$[3^2]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 2)(5, 6, 7) = (2, 3, 4)(5, 6, 7)$
$\Gamma_N(7)$	$[7^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 5, 6)(2, 7) = (1, 7, 2, 3, 4, 5, 6)$
	$[2^1, 5^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 5, 6, 2, 7) = (2, 3, 4, 5, 6)(1, 7)$
	$[2^2, 3^1]$	$(1, 2, 3, 4) \cdot (1, 2, 5)(6, 7) = (1, 5)(2, 3, 4)(6, 7)$
	$[3^1, 4^1]$	$(1, 2)(3, 4) \cdot (2, 3)(5, 6, 7) = (1, 3, 4, 2)(5, 6, 7)$

Доказательство теоремы 1

1. Выше было показано, что теорема 1 верна при $q \in \{3, 4\}$. Далее доказательство теоремы проводится индукцией по q по аналогии с доказательством теоремы 4 из [1].

Пусть $q > 4$. Если $G \in S_N$ и $|\Gamma(G)| \leq 2q - 3$, то по предположению индукции $G \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q)$. Тогда $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$ по утверждению 2.

2. Рассмотрим случай $G \in S_N$ и $|\Gamma(G)| = 2q - 2$.

2а. Пусть в цикловой записи G имеются циклы одинаковой длины

$$G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(\beta_1, \dots, \beta_r)G_1,$$

$|\Gamma(G_1)| = 2(q-r) - 2$, $2 \leq r \leq q-1$. Обозначим $\Omega' = \{1, \dots, N\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r\}$, $|\Omega'| = N' = N - 2r$, $q' = q - r < q$, $G_1 \in S(\Omega')$. При этом выполнено неравенство $q' \leq \frac{N'}{2}$.

Если при этом $q' \geq 3$, то по предположению индукции существуют две подстановки $H_1, H_2 \in S(\Omega')$, $H_1 \in \Gamma_{N'}(q')$, $H_2 \in \Gamma_{N'}(q'+1)$, для которых имеет место равенство $G_1 = H_1 \cdot H_2$. Тогда

$$G = [(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1] \cdot [(\beta_1, \dots, \beta_r) \cdot H_2],$$

причем $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1 \in \Gamma_N(q)$, $(\beta_1, \dots, \beta_r) \cdot H_2 \in \Gamma_N(q+1)$. Значит, $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$.

Если $q' = 2$, то $|\Gamma(G_1)| = 2$, и подстановка G_1 является транспозицией: $G_1 = (\gamma_1, \gamma_2)$. Тогда $r = q - 2$ и имеет место равенство

$$G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{q-2})(\gamma_1, \delta) \cdot (\beta_1, \dots, \beta_{q-2})(\gamma_1, \delta, \gamma_2),$$

где $\delta \in \Omega \setminus \Gamma(G)$. Из данного равенства следует, что $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$.

Если $q' = 1$, то G_1 — тождественная подстановка, и

$$G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1})(\beta_1, \dots, \beta_{q-1}).$$

Тогда для любого $\delta \in \Omega \setminus \Gamma(G)$ имеем равенство

$$G = (\delta, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1})(\delta, \alpha_1)(\beta_1, \dots, \beta_{q-1}),$$

из которого следует включение $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$.

26. Пусть теперь в цикловой записи G длины всех неединичных циклов различны. Пусть один из этих циклов имеет нечетную длину $r = 2t + 1 \geq 3$:

$$G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2t+1})G_1,$$

$1 \leq t < q - 1$, $|\Gamma(G_1)| = 2(q - t - 1) - 1$. Обозначим $\Omega' = \{1, \dots, N\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_{2t+1}\}$, $|\Omega'| = N' = N - 2t - 1$, $q' = q - t - 1 < q$, $G_1 \in S(\Omega')$. При этом выполнено неравенство $q' \leq \frac{N}{2} - t - 1 = \frac{N - 2t - 2}{2} = \frac{N' - 1}{2} < \frac{N'}{2}$.

Непосредственно проверяется, что

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{2t+1}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{t+1}) \cdot (\alpha_1, \alpha_{t+2}, \dots, \alpha_{2t+1}) \in \Gamma_N(t+1) \cdot \Gamma_N(t+1).$$

Если при этом $q' \geq 3$, то по предположению индукции существуют подстановки $H_1, H_2 \in S(\Omega')$, $H_1 \in \Gamma_{N'}(q')$, $H_2 \in \Gamma_{N'}(q'+1)$, для которых выполняется равенство $G_1 = H_1 \cdot H_2$. Тогда

$$G = [(\alpha_1, \dots, \alpha_{t+1}) \cdot H_1] \cdot [(\alpha_1, \alpha_{t+2}, \dots, \alpha_{2t+1}) \cdot H_2],$$

причем

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \dots, \alpha_{t+1}) \cdot H_1 &\in \Gamma_N(q-t-1+t+1) = \Gamma_N(q), \\ (\alpha_1, \alpha_{t+2}, \dots, \alpha_{2t+1}) \cdot H_2 &\in \Gamma_N(q-t-1+t+1+1) = \Gamma_N(q+1).\end{aligned}$$

Если $q' = 2$, то $t = q - 3$. Следовательно, $|\Gamma(G_1)| = 3$, и $G_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Тогда для любого $\delta \in \Omega \setminus \Gamma(G)$ имеем равенство

$$G = (\delta, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}) \cdot (\alpha_1, \delta, \alpha_q, \dots, \alpha_{2q-5}) (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Осталось заметить, что

$$\begin{aligned}(\delta, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}) &\in \Gamma_N(q), \\ (\alpha_1, \delta, \alpha_q, \dots, \alpha_{2q-5}) (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &\in \Gamma_N(q-2+3) = \Gamma_N(q+1).\end{aligned}$$

В случае $q' = 1$ получаем противоречие: $|\Gamma(G_1)| = 1$.

2в. Пусть в цикловой записи G длины всех неединичных циклов различны и четны. Пусть один из этих циклов имеет длину $2t$:

$$G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2t}) G_1,$$

$1 \leq t \leq q-1$, $|\Gamma(G_1)| = 2(q-t)-2$. Обозначим $\Omega' = \{1, \dots, N\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_{2t}\}$, $|\Omega'| = N' = N - 2t$, $q' = q - t < q$, $G_1 \in S(\Omega')$. При этом выполнено неравенство $q' \leq \frac{N}{2} - t = \frac{N-2t}{2} = \frac{N'}{2}$.

Поскольку $q > 4$ и длины всех неединичных циклов G различны, то можно выбрать цикл $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2t})$ с условием $t \geq 2$. Непосредственно проверяется, что

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{2t}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \cdot (\alpha_1, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{2t}) \in \Gamma_N(t) \cdot \Gamma_N(t+1).$$

Если при этом $q' \geq 4$, то по теореме 4 из [1] существуют подстановки $H_1, H_2 \in S(\Omega')$, $H_1, H_2 \in \Gamma_{N'}(q')$, для которых выполняется равенство $G_1 = H_1 \cdot H_2$. Тогда

$$G = [(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \cdot H_1] \cdot [(\alpha_1, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{2t}) \cdot H_2],$$

причем

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \cdot H_1 &\in \Gamma_N(q-t+t) = \Gamma_N(q), \\ (\alpha_1, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{2t}) \cdot H_2 &\in \Gamma_N(q-t+t+1) = \Gamma_N(q+1).\end{aligned}$$

Если $q' = 3$, то $t = q - 3$. Следовательно, $|\Gamma(G_1)| = 4$, и возможны только два случая: $[G_1] = [2^2]$ или $[G_1] = [4^1]$. В первом случае

$$G = (\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2)(\alpha_1, \dots, \alpha_{2t}) = (\beta_1, \beta_2) \cdot G_2,$$

где $|\Gamma(G_2)| = 2(q-1) - 2$. Так как $q > 4$, то $q-1 > 3$, и по предположению индукции $G_2 \in \Gamma_{N-2}(q-1) \cdot \Gamma_{N-2}(q)$. Тогда $G = (\beta_1, \beta_2) \cdot G_2 \in \Gamma_N(q+1) \cdot \Gamma_N(q)$. Осталось воспользоваться утверждением 1.

Во втором случае $G = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)(\alpha_1, \dots, \alpha_{2t})$. Непосредственно проверяется равенство

$$G = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \cdot (\alpha_1, \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_{2t})(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4),$$

причем

$(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \Gamma_N(q)$, $(\alpha_1, \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_{2t})(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \Gamma_N(q-5+4) = \Gamma_N(q-1)$. Итак, $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q-1)$. Далее, $G \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q)$ по утверждению 1 и $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$ по утверждению 2.

Если $q' = 2$, то $t = q - 2$. Следовательно, $|\Gamma(G_1)| = 2$, и G_1 является транспозицией: $G = (\beta_1, \beta_2)(\alpha_1, \dots, \alpha_{2t})$. Так как $|\Gamma((\alpha_1, \dots, \alpha_{2t}))| = 2(q-2) = 2(q-1) - 2$ и $q-1 > 3$, то по предположению индукции имеем включение $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2t}) \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q)$. Тогда $G = (\beta_1, \beta_2)(\alpha_1, \dots, \alpha_{2t}) \in \Gamma_N(q+1) \cdot \Gamma_N(q)$. Осталось воспользоваться утверждением 1.

В случае $q' = 1$ получаем условие $|\Gamma(G_1)| = 0$. Значит, $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2t})$ и $t = q - 1 > 3$. Включение $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2t}) \in \Gamma_N(t) \cdot \Gamma_N(t+1) = \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q)$ доказано выше. Тогда по утверждению 2 имеем включение $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$.

3. Наконец, рассмотрим случай $G \in S_N$ и $|\Gamma(G)| = 2q - 1$.

3а. Пусть в цикловой записи G имеются циклы одинаковой длины:

$$G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(\beta_1, \dots, \beta_r)G_1,$$

$$|\Gamma(G_1)| = 2(q-r) - 1, \quad 2 \leq r < q - 1.$$

Снова обозначим $\Omega' = \{1, \dots, N\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r\}$, $|\Omega'| = N' = N - 2r$, $q' = q - r < q$, $G_1 \in S(\Omega')$. При этом выполнено неравенство $q' \leq \frac{N'}{2}$.

Если при этом $q' \geq 3$, то по предположению индукции существуют две подстановки $H_1, H_2 \in S(\Omega')$, $H_1 \in \Gamma_{N'}(q')$, $H_2 \in \Gamma_{N'}(q'+1)$, для которых имеет место равенство $G_1 = H_1 \cdot H_2$. Тогда

$$G = [(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1] \cdot [(\beta_1, \dots, \beta_r) \cdot H_2],$$

причем $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot H_1 \in \Gamma_N(q)$, $(\beta_1, \dots, \beta_r) \cdot H_2 \in \Gamma_N(q+1)$.

Если $q' = 2$, то $q - r = 2$, $|\Gamma(G_1)| = 3$ и $G_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Тогда

$$\begin{aligned} G &= (\alpha_1, \dots, \alpha_{q-2})(\beta_1, \dots, \beta_{q-2})(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \\ &= (\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-2}) \cdot (\alpha_1, \gamma_3, \gamma_1)(\beta_1, \dots, \beta_{q-2}), \end{aligned}$$

причем $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-2}) \in \Gamma_N(q)$, $(\alpha_1, \gamma_3, \gamma_1)(\beta_1, \dots, \beta_{q-2}) \in \Gamma_N(q+1)$.

3б. Осталось рассмотреть случай, когда $|\Gamma(G)| = 2q - 1$ и все неединичные циклы подстановки G имеют различную длину. Пусть G является произведением r циклов, длины которых равны $1 < l_1 < l_2 < \dots < l_r$, $\sum_{i=1}^r l_i = 2q - 1$.

Тогда G сопряжена с подстановкой

$$\tilde{G} = (1, \dots, l_1)(l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2) \dots (l_1 + \dots + l_{r-1} + 1, \dots, 2q - 1).$$

Если $r = 1$, то при $q \geq 5$ подстановка

$$\begin{aligned} &(1, 2, \dots, q) \cdot [(1, q + 1, \dots, 2q - 2)(2, 2q - 1)] = \\ &= (1, 2q - 1, 2, \dots, q, q + 1, \dots, 2q - 2), \end{aligned}$$

с одной стороны, лежит в $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$, а с другой стороны, сопряжена с $\tilde{G}$. Значит, в рассматриваемом случае $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$.

Пусть теперь $r \geq 2$. Тогда существует такое $2 \leq s \leq r$, что

$$\sum_{i=1}^{s-1} l_i < q, \quad \sum_{i=1}^s l_i \geq q.$$

Умножим подстановку $\tilde{G}$ слева на цикл $X = (l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})$ длины $s - 1$, а справа — на цикл $Y = (l_1 + \dots + l_{s-1} + 1, l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)$ длины $r - s + 1$. Если $s - 1$ или $r - s + 1$ равны единице, то соответствующие циклы равны тождественной подстановке. В результате имеем подстановку

$$\begin{aligned} H &= X \cdot \tilde{G} \cdot Y = \\ &= (1, 2, \dots, l_1, l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})(l_1 + \dots + l_{s-1} + 1, \dots, 2q - 1). \end{aligned}$$

Обозначим $l_1 + \dots + l_{s-1} + 1 = m \leq q$. Можно заметить, что подстановка H представима в виде произведения

$$H = (1, 2, \dots, q) \cdot (m, 1, q+1, \dots, 2q-1) \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= X^{-1} \cdot H \cdot Y^{-1} = \left[(l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})^{-1} \cdot (1, 2, \dots, q) \right] \times \\ &\times \left[(m, 1, q+1, \dots, 2q-1) \cdot (l_1 + \dots + l_{s-1} + 1, l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим подстановки

$$T_1 = (l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})^{-1} \cdot (1, 2, \dots, q),$$

$$T_2 = (m, 1, q+1, \dots, 2q-1) \cdot (m, l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)^{-1}.$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$\begin{aligned} T_1 &= (l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1})^{-1} \cdot (1, 2, \dots, q) = \\ &= (1, 2, \dots, l_1, l_1 + \dots + l_{s-1} + 1, \dots, q) (l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2) \dots (l_1 + \dots + l_{s-2} + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{s-1}). \end{aligned}$$

Значит, $T_1 \in \Gamma_N(q)$. (Если $s = 2$, то $T_1 = (1, 2, \dots, q)$ также лежит в $\Gamma_N(q)$.)

Так как $\sum_{i=1}^s l_i \geq q$, то $\sum_{i=1}^s l_i + 1 \geq q + 1$.

Если $\sum_{i=1}^s l_i + 1 = q + 1$, то

$$\begin{aligned} T_2 &= (m, 1, q+1, \dots, 2q-1) \cdot (m, q+1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)^{-1} = \\ &= (1, m) (q+1, \dots, l_1 + \dots + l_{s+1}) (l_1 + \dots + l_{s+1} + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{s+2}) \dots \\ &\dots (l_1 + \dots + l_{r-1} + 1, \dots, 2q-1). \end{aligned}$$

При этом подстановка T_2 имеет

$$2 + l_{s+1} + \dots + l_r = 2q - 1 - (l_1 + \dots + l_s) + 2 = 2q - 1 - q + 2 = q + 1$$

мобильных точек, то есть $T_2 \in \Gamma_N(q+1)$.

Пусть теперь $\sum_{i=1}^s l_i + 1 > q + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} T_2 &= (m, 1, q+1, \dots, 2q-1) \cdot (m, l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1} + 1)^{-1} = \\ &= (m, 1, q+1, \dots, l_1 + \dots + l_s) (l_1 + \dots + l_s + 1, \dots, l_1 + \dots + l_{s+1}) \dots (l_1 + \dots + l_{r-1} + 1, \dots, 2q-1). \end{aligned}$$

При этом подстановка T_2 имеет

$$2 + (l_1 + \dots + l_s - q) + l_{s+1} + \dots + l_r = 2q - 1 - q + 2 = q + 1$$

мобильных точек, то есть $T_2 \in \Gamma_N(q+1)$.

Итак, во всех возможных случаях доказано, что любая подстановка $G \in \Gamma_N(2q-1)$ принадлежит множеству $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$.

Теорема 1 доказана полностью.

Следствие. При $N \geq 8$, $3 \leq q \leq \frac{N}{2}$

$$\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1) \supseteq \bigcup_{r=2}^{2q-1} \Gamma_N(r).$$

Замечание. Очевидно, что при $q=2$ утверждение следствия не выполняется. Действительно, множество $\Gamma_N(2)$ состоит из всех транспозиций, а множество $\Gamma_N(3)$ — из всех циклов длины 3. Поэтому множество $\Gamma_N(2) \cdot \Gamma_N(3)$ состоит только из нечетных подстановок. Следовательно, в нем не содержится множество $\Gamma_N(3)$.

Далее рассмотрим, какие подстановки из множеств $\Gamma_N(2q)$, $\Gamma_N(2q+1)$ принадлежат произведению $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$. Пусть G является произведением r неединичных циклов, длины которых равны $m_1, m_2, \dots, m_r$.

Утверждение 3. Пусть $N \geq 4$, $2 \leq q < \frac{N}{2}$, подстановка $G \in \Gamma_N(2q+1)$ является произведением r неединичных циклов, длины которых равны $m_1, m_2, \dots, m_r$, $\sum_{i=1}^r m_i = 2q+1$. Подстановка G принадлежит множеству $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$ в том и только в том случае, когда существует такое подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$, что $m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q$.

Доказательство. Если для некоторых подстановок $H_1 \in \Gamma_N(q)$, $H_2 \in \Gamma_N(q+1)$ выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$, то $\Gamma(H_1) \cap \Gamma(H_2) = \emptyset$. Отсюда следует, что подстановки H_1, H_2 являются произведениями некоторых циклов из цикловой записи подстановки G . Пусть для подстановки H_1 длины этих циклов равны $m_{i_1}, \dots, m_{i_k}$. Поскольку $H_1 \in \Gamma_N(q)$, то $m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q$.

Обратно, пусть искомое подмножество $\{i_1, \dots, i_k\}$ существует. Обозначим $\{j_1, \dots, j_{r-k}\} \subseteq \{1, \dots, r\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. Тогда $m_{j_1} + \dots + m_{j_{r-k}} = 2q + 1 - q = q + 1$. Построим подстановку H_1 как произведение циклов подстановки G , имеющих длины $m_{i_1}, \dots, m_{i_k}$, а подстановку H_2 как произведение циклов подстановки G , имеющих длины $m_{j_1}, \dots, m_{j_{r-k}}$. Тогда $H_1 \in \Gamma_N(q)$, $H_2 \in \Gamma_N(q+1)$ и $G = H_1 \cdot H_2$.

Замечание. Из доказанного утверждения вытекает, что $\Gamma_N(2q+1) \not\subseteq \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$. Действительно, $(2q+1)$ -циклы лежат в $\Gamma_N(2q+1)$, однако они не удовлетворяют условию утверждения 4.

Утверждение 4. Пусть $N \geq 4$, $2 \leq q \leq \frac{N}{2}$, подстановка $G \in \Gamma_N(2q)$ является произведением r неединичных циклов, длины которых равны $m_1, m_2, \dots, m_r$, $\sum_{i=1}^r m_i = 2q$. Подстановка G принадлежит множеству $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$ в том и только в том случае, когда выполнено условие: существуют такое $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ и такое подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\} \setminus \{i_0\}$, что $m_{i_0} > 2$ и $q - m_{i_1} + m_{i_2} \dots + m_{i_k} \in \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}$.

Доказательство. Если для некоторых подстановок $H_1 \in \Gamma_N(q)$, $H_2 \in \Gamma_N(q+1)$ выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$, то $|\Gamma(H_1) \cap \Gamma(H_2)| = 1$. Пусть $\Gamma(H_1) \cap \Gamma(H_2) = \{\alpha_1\}$. Отсюда следует, что в подстановке H_1 существует цикл $(\alpha_1, \dots, \alpha_u)$, в подстановке H_2 существует цикл $(\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_v)$, а остальные циклы в H_1, H_2 являются циклами из цикловой записи подстановки G .

Пусть для подстановки H_1 длины этих циклов равны $m_{i_1}, \dots, m_{i_k}$. Поскольку $H_1 \in \Gamma_N(q)$, то $m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q - u$. При вычислении произведения $H_1 \cdot H_2$ получится цикл длины $u + v - 1$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_u)(\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_v) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u, \beta_2, \dots, \beta_v),$$

причем этот цикл есть в цикловой записи подстановки G . Тогда выберем такое $i_0 \in \{1, \dots, r\}$, что $m_{i_0} = u + v - 1$. Поскольку $u \geq 2$, $v \geq 2$, то $m_{i_0} > 2$. Кроме того, $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\} \setminus \{i_0\}$ и $q - (m_{i_1} + \dots + m_{i_k}) = u \in \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}$.

Обратно, пусть исконое $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ и подмножество $\{i_1, \dots, i_k\}$ существует. Пусть $\{j_1, \dots, j_{r-k-1}\} \subseteq \{1, \dots, r\} \setminus \{i_0, i_1, \dots, i_k\}$. Тогда

$$q - (m_{i_1} + \dots + m_{i_k}) = u \in \{2, \dots, m_{i_0} - 1\},$$

$$m_{j_1} + \dots + m_{j_{r-k-1}} = 2q - m_{i_0} - (m_{i_1} + \dots + m_{i_k}) = 2q - m_{i_0} - q + u = q - m_{i_0} + u.$$

Обозначим $v = m_{i_0} + 1 - u \in \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}$. Тогда цикл $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m_{i_0}})$ из цикловой записи подстановки G можно представить в виде произведения двух циклов

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{m_{i_0}}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_u)(\alpha_1, \alpha_{u+1}, \dots, \alpha_{m_{i_0}})$$

длин u и v соответственно.

Построим подстановку H_1 как произведение циклов подстановки G , имеющих длины $m_{i_1}, \dots, m_{i_k}$, и цикла $(\alpha_1, \dots, \alpha_u)$. Подстановку H_2 построим как произведение циклов подстановки G , имеющих длины $m_{j_1}, \dots, m_{j_{r-k-1}}$, и цикла $(\alpha_1, \alpha_{u+1}, \dots, \alpha_{m_{i_0}})$. Тогда равенство $G = H_1 \cdot H_2$ выполнено, подстановка H_1 имеет $m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + u = q$ мобильных точек, а подстановка H_2 имеет $m_{j_1} + \dots + m_{j_{r-k-1}} + v = q + 1$ мобильных точек.

Замечание. Из доказанного утверждения вытекает, что $\Gamma_N(2q) \not\subset \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$. Рассмотрим подстановки из $\Gamma_N(2q)$, являющиеся произведением двух циклов длины q : $m_1 = q$ и $m_2 = q$. Покажем, что такие подстановки не могут удовлетворять условию утверждения 4.

Если $i_0 = 1$, то в случае $\{i_1, \dots, i_k\} = \{2\}$ имеем противоречие

$$q - m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q - q = 0 \notin \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}.$$

В случае $\{i_1, \dots, i_k\} = \emptyset$ снова имеем противоречие

$$q - m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q \notin \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}.$$

Случай $i_0 = 2$ рассматривается аналогично.

Итак, в теореме 1, утверждениях 3, 4 полностью описано строение множества $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+1)$ при $3 \leq q \leq \frac{N}{2}$.

§ 2

Теперь приступим к описанию строения множества $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+t)$ при $t \geq 2$. Прежде всего, заметим, что для всех $r < t$

$$\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+t) \cap \Gamma_N(r) = \emptyset.$$

Теорема 2. Пусть $N > 10$, $2 \leq t < N-2$, $2 \leq q < \frac{N-t}{2} + 1$, $G \in S_N$.

Если $t \leq |\Gamma(G)| \leq 2q+t-2$, то существуют подстановки $H_1 \in \Gamma_N(q)$, $H_2 \in \Gamma_N(q+t)$, для которых выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$.

Доказательство теоремы проведем индукцией по q и разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. Пусть $N \geq 4$, $2 \leq t \leq N-2$, $G \in S_N$. Если $t \leq |\Gamma(G)| \leq t+2$, то существуют подстановки $H_1 \in \Gamma_N(2)$, $H_2 \in \Gamma_N(t+2)$, для которых выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$.

Доказательство. Пусть $|\Gamma(G)| = t$. Выберем $\alpha, \beta \notin \Gamma(G)$ и положим $H_1 = (\alpha, \beta) \in \Gamma_N(2)$, $H_2 = G \cdot (\alpha, \beta) \in \Gamma_N(t+2)$. Тогда равенство $G = H_1 \cdot H_2$ выполнено.

Пусть $|\Gamma(G)| = t+1$ и $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s)$. Выберем $\gamma \notin \Gamma(G)$ и положим $H_1 = (\alpha_1, \gamma) \in \Gamma_N(2)$, $H_2 = (\alpha_1, \gamma, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s) \in \Gamma_N(t+2)$. Равенство $G = H_1 \cdot H_2$ снова выполнено.

Пусть $|\Gamma(G)| = t+2$. Если при этом G является циклом $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{t+2})$, то длина этого цикла не меньше 4. Тогда

$$G = (\alpha_1, \alpha_3) \cdot [(\alpha_2, \alpha_3)(\alpha_1, \alpha_4, \dots, \alpha_{t+2})] \in \Gamma_N(2) \cdot \Gamma_N(t+2).$$

Если же G не является циклом, то $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s)$, и тогда

$$G = (\alpha_1, \beta_1) \cdot [(\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \dots] \in \Gamma_N(2) \cdot \Gamma_N(t+2).$$

Лемма 2. Пусть $N \geq 6$, $2 \leq t \leq N-4$, $G \in S_N$. Если $t \leq |\Gamma(G)| \leq t+4$, то существуют подстановки $H_1 \in \Gamma_N(3)$, $H_2 \in \Gamma_N(t+3)$, для которых выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$.

Доказательство. Пусть $|\Gamma(G)| = t$. Выберем $\alpha, \beta, \gamma \notin \Gamma(G)$ и положим $H_1 = (\alpha, \beta, \gamma) \in \Gamma_N(3)$, $H_2 = G \cdot (\alpha, \gamma, \beta) \in \Gamma_N(t+3)$. Тогда равенство $G = H_1 \cdot H_2$ выполнено.

Пусть $|\Gamma(G)| = t+1$ и $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s)$. Выберем $\gamma, \delta \notin \Gamma(G)$ и положим $H_1 = (\alpha_1, \gamma, \delta) \in \Gamma_N(3)$, $H_2 = (\alpha_1, \delta, \gamma, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s) \in \Gamma_N(t+3)$. Равенство $G = H_1 \cdot H_2$ снова выполнено.

Пусть $|\Gamma(G)| = t+2$. Выберем $\gamma \notin \Gamma(G)$. Если при этом G является циклом $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{t+2})$, то длина этого цикла не меньше 4, и тогда

$$G = (\alpha_1, \gamma, \alpha_2) \cdot [(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{t+2})(\alpha_2, \gamma)] \in \Gamma_N(3) \cdot \Gamma_N(t+3).$$

Если же G не является циклом, то $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s)$, и тогда

$$G = (\alpha_1, \gamma, \beta_1) \cdot [(\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \beta_1, \gamma, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \dots] \in \Gamma_N(3) \cdot \Gamma_N(t+3).$$

Пусть $|\Gamma(G)| = t+3$. Если при этом в G существует цикл $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, длина которого не меньше 3, то

$$G = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2) \cdot [(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \dots] \in \Gamma_N(3) \cdot \Gamma_N(t+3).$$

Если же G является произведением транспозиций, то в силу условия $|\Gamma(G)| = t+3 \geq 5$ таких транспозиций должно быть не менее 3: $G = (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2) \dots$. Тогда

$$G = (\alpha_1, \gamma_1, \beta_1) \cdot [(\alpha_1, \beta_2, \beta_1, \gamma_2, \gamma_1, \alpha_2) \dots] \in \Gamma_N(3) \cdot \Gamma_N(t+3).$$

Пусть $|\Gamma(G)| = t+4$. Если при этом G является циклом $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{t+4})$, то длина этого цикла не меньше 6, и тогда

$$G = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_{t+4}) \cdot [(\alpha_4, \dots, \alpha_{t+4})(\alpha_2, \alpha_3)] \in \Gamma_N(3) \cdot \Gamma_N(t+3).$$

Если же G не является циклом, то $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s)$, и тогда

$$G = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1) \cdot [(\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \beta_1, \alpha_3, \dots, \alpha_r) \dots] \in \Gamma_N(3) \cdot \Gamma_N(t+3).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $N \geq 8$, $2 \leq t \leq N-6$, $G \in S_N$. Если $t \leq |\Gamma(G)| \leq t+6$, то существуют подстановки $H_1 \in \Gamma_N(4)$, $H_2 \in \Gamma_N(t+4)$, для которых выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$.

Доказательство. Пусть $|\Gamma(G)| = t$. Выберем $\alpha, \beta, \gamma, \delta \notin \Gamma(G)$ и положим $H_1 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \Gamma_N(4)$, $H_2 = G \cdot (\alpha, \delta, \gamma, \beta) \in \Gamma_N(t+4)$. Тогда равенство $G = H_1 \cdot H_2$ выполнено.

1. Пусть $|\Gamma(G)| = t+1$ и $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \dots$. Выберем $\beta, \gamma, \delta \notin \Gamma(G)$ и положим $H_1 = (\alpha_1, \beta, \gamma, \delta) \in \Gamma_N(4)$, $H_2 = (\alpha_1, \delta, \gamma, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \dots \in \Gamma_N(t+4)$. Равенство $G = H_1 \cdot H_2$ снова выполнено.

2. Пусть $|\Gamma(G)| = t+2$. Выберем $\gamma, \delta \notin \Gamma(G)$. Если при этом G является циклом $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{t+2})$, то длина этого цикла не меньше 4, и тогда

$$G = (\alpha_1, \alpha_3)(\gamma, \delta) \cdot [(\alpha_1, \alpha_4, \dots, \alpha_{t+2})(\alpha_2, \alpha_3)(\gamma, \delta)] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

Если же G не является циклом, то $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s)$, и тогда

$$G = (\alpha_1, \gamma, \delta, \beta_1) \cdot [(\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \beta_1, \delta, \gamma, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \dots] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

3. Пусть $|\Gamma(G)| = t+3$. Выберем $\delta \notin \Gamma(G)$. Если при этом в G существует цикл $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, длина которого не меньше 3, то

$$G = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \delta) \cdot [(\alpha_1, \delta, \alpha_3, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \dots] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

Если же G является произведением транспозиций, то в силу условия $|\Gamma(G)| = t+3 \geq 5$ таких транспозиций должно быть не менее 3: $G = (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2) \dots$. Тогда

$$G = (\alpha_1, \gamma_1, \beta_1, \delta) \cdot [(\alpha_1, \delta, \beta_2, \beta_1, \gamma_2, \gamma_1, \alpha_2) \dots] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

4. Пусть $|\Gamma(G)| = t+4$. Если при этом G является циклом $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{t+4})$, то длина этого цикла не меньше 6, и тогда

$$G = (\alpha_1, \alpha_3)(\alpha_2, \alpha_4) \cdot [(\alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_5, \dots, \alpha_{t+4})] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

Если же G не является циклом, то $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s)$, и тогда

$$G = (\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2) \cdot [(\alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \alpha_2, \beta_3, \dots, \beta_s)] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

5. Пусть $|\Gamma(G)| = t+5$. Если при этом G является циклом $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{t+5})$, то длина этого цикла не меньше 7, и тогда

$$G = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_4) \cdot (\alpha_1, \alpha_5, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \dots, \alpha_{t+5}) \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

Пусть G не является циклом $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s)$ и $r \geq 3$. Тогда

$$G = (\beta_1, \beta_2, \alpha_2, \alpha_1) \cdot [(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \alpha_2, \beta_3, \dots, \beta_s)] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

Наконец, пусть G является произведением транспозиций. Тогда в силу условия $|\Gamma(G)| = t + 5 \geq 7$ таких транспозиций должно быть не менее 4: $G = (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2)(\delta_1, \delta_2) \dots$ Тогда

$$G = (\alpha_1, \gamma_1, \beta_2, \beta_1) \cdot [(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \gamma_1, \alpha_2)(\delta_1, \delta_2) \dots] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

6. Пусть $|\Gamma(G)| = t + 6$. Если при этом G является циклом $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_{t+6})$, то длина этого цикла не меньше 8, и тогда

$$G = (\alpha_1, \alpha_2)(\alpha_3, \alpha_4) \cdot (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \dots, \alpha_{t+6}) \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

Пусть G не является циклом $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s)$. Если при этом $r \geq 3, s \geq 3$, то

$$G = (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2) \cdot [(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_s)] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

Если среди неединичных циклов подстановки G только один цикл не является транспозицией и при этом $r \geq 4$, то

$$G = (\alpha_1, \alpha_2)(\alpha_3, \alpha_4) \cdot [(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_r) \dots (\beta_1, \dots, \beta_s)] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

Если в подстановке G не является транспозицией только один цикл длины 3, то в силу условия $|\Gamma(G)| = t + 6 \geq 8$ число транспозиций в подстановке G должно быть не менее 3: $G = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2)(\delta_1, \delta_2) \dots$ Тогда

$$G = (\alpha_1, \gamma_1)(\beta_1, \beta_2) \cdot [(\alpha_1, \gamma_2, \gamma_1, \alpha_2, \alpha_3)(\delta_1, \delta_2) \dots] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

Наконец, пусть G является произведением транспозиций. Тогда в силу условия $|\Gamma(G)| = t + 6 \geq 8$ таких транспозиций должно быть не менее 4: $G = (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2)(\delta_1, \delta_2) \dots$ Тогда

$$G = (\alpha_1, \alpha_2)(\gamma_1, \beta_1) \cdot [(\beta_1, \gamma_2, \gamma_1, \beta_2)(\delta_1, \delta_2) \dots] \in \Gamma_N(4) \cdot \Gamma_N(t+4).$$

Лемма 3 доказана.

Из лемм 1, 2, 3 вытекает, что теорема 2 выполняется для $q \in \{2, 3, 4\}$.

Пусть теперь $q > 4$. Если $G \in S_N$ и $t \leq |\Gamma(G)| \leq 2q + t - 4$, то по предположению индукции $G \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q-1+t)$. Тогда

$$q + t - 1 < \frac{N-t}{2} + 1 + t - 1 = \frac{N+t}{2} < N,$$

и $G \in \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+t)$ по утверждению 2.

Осталось рассмотреть случай $G \in S_N$ и $|\Gamma(G)| \in \{2q+t-3, 2q+t-2\}$. Исходя из очевидных неравенств

$$t+2 \leq 2q+t-3 \leq 2(q-1) + (t+2) - 2,$$

$$t+2 \leq 2q+t-2 \leq 2(q-1) + (t+2) - 2,$$

по предположению индукции получаем включение $G \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q-1+t+2)$, или $G \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q+t+1)$.

Лемма 4. Пусть $N > 10$, $2 \leq t < N-2$, $4 < q < \frac{N-t}{2} + 1$, $G \in S_N$ и $|\Gamma(G)| \in \{2q+t-3, 2q+t-2\}$. Тогда существуют подстановки $H_1 \in \Gamma_N(q)$, $H_2 \in \Gamma_N(q+t)$, для которых выполняется равенство $G = H_1 \cdot H_2$.

Доказательство. В силу сделанных выше замечаний $G \in \Gamma_N(q-1) \cdot \Gamma_N(q+t+1)$, то есть существуют подстановки $R_1 \in \Gamma_N(q-1)$, $R_2 \in \Gamma_N(q+t+1)$, для которых выполняется равенство $G = R_1 \cdot R_2$. При этом очевидно, что $|\Gamma(R_1) \cap \Gamma(R_2)| \geq 2$.

Основная идея доказательства заключается в том, чтобы построить такую подстановку T , что $R_1 T \in \Gamma_N(q)$, $T^{-1} R_2 \in \Gamma_N(q+t)$. Тогда для подстановок $H_1 = R_1 T$, $H_2 = T^{-1} R_2$ выполняется искомое равенство $G = H_1 \cdot H_2$. Обозначим

$$R_1 = (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{m_1}^{(1)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}), \quad \sum_{i=1}^s m_i = q-1,$$

$$R_2 = (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{t_1}^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}), \quad \sum_{i=1}^r t_i = q+t+1.$$

Случай 1. Пусть в подстановке R_2 существует неединичный цикл длины больше 2, не все точки которого входят в $\Gamma(R_1)$. Точнее, пусть $t_1 \geq 3$, $\alpha_1^{(2)} = \alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_{t_1}^{(2)} \notin \Gamma(R_1)$. Тогда положим $T = (\alpha_{t_1}^{(2)}, \alpha_1^{(1)})$ и получим

$$\begin{aligned} R_1 T &= (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{m_1}^{(1)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \cdot (\alpha_{t_1}^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) = \\ &= (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{m_1}^{(1)}, \alpha_{t_1}^{(2)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \in \Gamma_N(q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{-1} R_2 &= (\alpha_{t_1}^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{t_1}^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) = \\ &= (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{t_1}^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) \in \Gamma_N(q+t). \end{aligned}$$

Случай 2. Пусть в подстановке R_2 существуют неединичные циклы, не все точки которых входят в $\Gamma(R_1)$, и все такие циклы являются транспозициями. Точнее, пусть $t_1 = 2$, $\alpha_1^{(2)} = \alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_2^{(2)} \notin \Gamma(R_1)$. По условию существует еще одна точка (кроме $\alpha_1^{(2)}$), принадлежащая $\Gamma(R_1) \cap \Gamma(R_2)$. Пусть $\beta_1^{(2)} \in \Gamma(R_1) \cap \Gamma(R_2)$.

2.1. Пусть $R_1(\alpha_1^{(2)}) \neq \beta_1^{(2)}$, $R_1(\beta_1^{(2)}) \neq \alpha_1^{(2)}$. Тогда положим $T = (\alpha_1^{(2)}, \beta_1^{(2)})$ и получим

$$R'_1 = R_1 T \in \Gamma_N(q-1), \quad \alpha_2^{(2)} \notin \Gamma(R'_1),$$

$$\begin{aligned} R'_2 = T^{-1} R_2 &= (\alpha_1^{(2)}, \beta_1^{(2)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) = \\ &= (\alpha_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) \in \Gamma_N(q+t+1), \end{aligned}$$

$$G = R'_1 \cdot R'_2.$$

Видно, что подстановки R'_1, R'_2 удовлетворяют условиям случая 1.

2.2. Пусть теперь $m_1 \geq 3$, $R_1(\alpha_1^{(2)}) = \beta_1^{(2)}$ (то есть $\alpha_2^{(1)} = \beta_1^{(2)}$) или $R_1(\beta_1^{(2)}) = \alpha_1^{(2)}$ (то есть $\alpha_{m_1}^{(1)} = \beta_1^{(2)}$). В первом случае положим $T = (\alpha_1^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)})$ и получим

$$\begin{aligned} R_1 T &= (\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \dots, \alpha_{m_1}^{(1)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \cdot (\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) = \\ &= (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \alpha_{m_1}^{(1)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \in \Gamma_N(q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{-1} R_2 &= (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \beta_1^{(2)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) = \\ &= (\alpha_2^{(2)}, \beta_2^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}, \beta_1^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) \in \Gamma_N(q+t). \end{aligned}$$

Во втором случае положим $T = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \beta_1^{(2)})$ и получим аналогичный результат:

$$\begin{aligned} R_1 T &= (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{m_1-1}^{(1)}, \beta_1^{(2)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \cdot (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \beta_1^{(2)}) = \\ &= (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{m_1-1}^{(1)}) (\beta_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \in \Gamma_N(q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{-1}R_2 &= (\alpha_1^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) = \\ &= (\alpha_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}, \beta_1^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) \in \Gamma_N(q+t). \end{aligned}$$

2.3. Пусть $m_1 = 2$, $R_1(\alpha_1^{(2)}) = \beta_1^{(2)}$ или $R_1(\beta_1^{(2)}) = \alpha_1^{(2)}$ (то есть $R_1 = (\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)})$). Также предположим, что $\beta_2^{(2)} \in \Gamma(R_1)$. Положим $T = (\alpha_2^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)})$ и получим

$$R_1T = (\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \cdot (\alpha_2^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}) \in \Gamma_N(q),$$

$$\begin{aligned} T^{-1}R_2 &= (\alpha_2^{(2)}, \beta_2^{(2)}, \beta_1^{(2)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) = \\ &= (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \beta_3^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}, \beta_1^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) \in \Gamma_N(q+t). \end{aligned}$$

2.4. Пусть $m_1 = 2$, $R_1(\alpha_1^{(2)}) = \beta_1^{(2)}$ или $R_1(\beta_1^{(2)}) = \alpha_1^{(2)}$ (то есть $R_1 = (\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)})$). Предположим, что $\beta_2^{(2)} \notin \Gamma(R_1)$. Тогда по условию случая 2 имеем $t_2 = 2$, то есть

$$R_2 = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}).$$

Кроме того, найдется точка $\beta_1^{(1)} \in \Gamma(R_1)$, $\beta_1^{(1)} \notin \Gamma(R_2)$. Действительно, в противном случае $\Gamma(R_1) \subset \Gamma(R_2)$, и при $q > 4$ получаем противоречие:

$$|\Gamma(G)| = |\Gamma(R_1R_2)| \leq |\Gamma(R_2)| = q+t+1 < 2q+t-3.$$

В этом случае положим $T = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \beta_1^{(1)})$ и получим

$$\begin{aligned} R_1T &= (\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \beta_1^{(1)}) = \\ &= (\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \in \Gamma_N(q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{-1}R_2 &= (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \beta_1^{(1)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) = \\ &= (\beta_1^{(2)}, \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) \in \Gamma_N(q+t). \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть последний возможный случай.

Случай 3. Для любого неединичного цикла подстановки R_2 либо все точки этого цикла принадлежат $\Gamma(R_1)$, либо все точки этого цикла

не принадлежат $\Gamma(R_1)$. Поскольку $|\Gamma(R_1) \cap \Gamma(R_2)| \geq 2$, то существует цикл $(\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{t_1}^{(2)})$, удовлетворяющий первому условию (то есть $\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{t_1}^{(2)} \in \Gamma(R_1)$). В то же время существует цикл, удовлетворяющий второму условию. Действительно, если это не так, то получаем противоречие $\Gamma(R_2) \subset \Gamma(R_1)$ и

$$|\Gamma(R_2)| = q + t + 1 > q - 1 = |\Gamma(R_1)|.$$

Будем считать, что $\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)} \notin \Gamma(R_1)$.

3.1. Пусть существует $j \in \{1, \dots, t_1\}$ со свойством $R_1(\alpha_j^{(2)}) \neq \alpha_{j-1}^{(2)}$. Тогда положим $T = (\alpha_j^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \alpha_{j-1}^{(2)})$ и получим

$$R_1 T = R_1 \cdot (\alpha_j^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \alpha_{j-1}^{(2)}) \in \Gamma_N(q),$$

$$\begin{aligned} T^{-1} R_2 &= (\alpha_j^{(2)}, \alpha_{j-1}^{(2)}, \beta_1^{(2)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{t_1}^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) = \\ &= (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{j-1}^{(2)}, \beta_2^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \alpha_{j+1}^{(2)}, \dots, \alpha_{t_1}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) \in \Gamma_N(q+t). \end{aligned}$$

3.2. Пусть $R_1(\alpha_j^{(2)}) = \alpha_{j-1}^{(2)}$ для всех $j \in \{1, \dots, t_1\}$. Это означает, что в подстановке R_1 имеется неединичный цикл $(\alpha_1^{(2)}, \alpha_{t_1}^{(2)}, \alpha_{t_1-1}^{(2)}, \dots, \alpha_2^{(2)}) = (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{t_1}^{(2)})^{-1}$. Кроме того, выше отмечалось, что включение $\Gamma(R_1) \subset \Gamma(R_2)$ противоречит условию леммы. Значит, в подстановке R_1 имеется неединичный цикл $(\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)})$ со свойством $\gamma_1^{(1)} \notin \Gamma(R_2)$.

Если $t_1 \geq 3$, то положим $T = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)})$ и получим

$$\begin{aligned} R'_1 &= R_1 T = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_{t_1}^{(2)}, \dots, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)}) = \\ &= (\alpha_1^{(2)}, \alpha_{t_1}^{(2)}, \alpha_{t_1-1}^{(2)}, \dots, \alpha_3^{(2)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}, \beta_1^{(2)}) \in \Gamma_N(q-1), \\ R'_2 &= T^{-1} R_2 = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{t_1}^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) = \\ &= (\alpha_1^{(2)}, \alpha_3^{(2)}, \dots, \alpha_{t_1}^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)}, \beta_2^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) \in \Gamma_N(q+t+1), \\ G &= R'_1 \cdot R'_2. \end{aligned}$$

При этом подстановки R'_1, R'_2 удовлетворяют условиям случая 1.

Если же $t_1 = 2$, то выберем точку $\delta \notin \Gamma(R_1) \cup \Gamma(R_2)$. Такая точка существует ввиду условия $2q + t - 2 < N$ леммы. Положим $T = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) \times (\beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)}, \delta)$ и получим

$$\begin{aligned} R'_1 &= R_1 T = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)}, \delta) = \\ &= (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_2}^{(1)}) \dots (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{m_s}^{(1)}, \delta, \beta_1^{(2)}) \in \Gamma_N(q-1), \\ R'_2 &= T^{-1} R_2 = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \delta, \gamma_1^{(1)}) \cdot (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) = \\ &= (\beta_1^{(2)}, \delta, \gamma_1^{(1)}, \beta_2^{(2)}, \dots, \beta_{t_2}^{(2)}) \dots (\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{t_r}^{(2)}) \in \Gamma_N(q+t+1), \end{aligned}$$

$$G = R'_1 \cdot R'_2.$$

При этом снова подстановки R'_1, R'_2 удовлетворяют условиям случая 1. Лемма 4 и теорема 2 доказаны.

Следствие. При $N > 10$, $2 \leq t < N - 2$, $2 \leq q < \frac{N-t}{2} + 1$

$$\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+t) \supseteq \bigcup_{r=t}^{2q+t-2} \Gamma_N(r).$$

Далее рассмотрим, какие подстановки из множеств $\Gamma_N(2q+t-1)$, $\Gamma_N(2q+t)$ принадлежат произведению $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+t)$. Пусть G является произведением r неединичных циклов, длины которых равны $m_1, m_2, \dots, m_r$.

Утверждение 5. Пусть $N > 10$, $2 \leq t < N - 2$, $2 \leq q < \frac{N-t}{2} + 1$, подстановка $G \in \Gamma_N(2q+t)$ является произведением r неединичных циклов, длины которых равны $m_1, m_2, \dots, m_r$, $\sum_{i=1}^r m_i = 2q+t$. Подстановка G принадлежит множеству $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+t)$ в том и только в том случае, когда существует такое подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$, что $m_{i_1} + \dots + m_{i_k} = q$.

Доказательство полностью аналогично доказательству утверждения 3.

Замечание. Из доказанного утверждения вытекает, что $\Gamma_N(2q+t) \not\subseteq \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+t)$. Действительно, $(2q+t)$ -циклы лежат в $\Gamma_N(2q+t)$, однако они не удовлетворяют условию утверждения 11.

Утверждение 6. Пусть $N > 10$, $2 \leq t < N - 2$, $2 \leq q < \frac{N-t}{2} + 1$, подстановка $G \in \Gamma_N(2q+t-1)$ является произведением r неединичных циклов, длины которых равны $m_1, m_2, \dots, m_r$, $\sum_{i=1}^r m_i = 2q+t-1$. Подстановка G принадлежит множеству $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+t)$ в том и только в том случае, когда существуют такое $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ и такое подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\} \setminus \{i_0\}$, что $m_{i_0} > 2$ и $q - m_{i_1} + m_{i_2} \dots + m_{i_k} \in \{2, \dots, m_{i_0} - 1\}$.

Доказательство полностью аналогично доказательству утверждения 4.

Замечание. Из доказанного утверждения вытекает, что в общем случае $\Gamma_N(2q+t-1) \not\subseteq \Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+t)$.

Действительно, пусть $2q+t-1=2d$ — четное число. Тогда в $\Gamma_N(2q+t-1)$ содержатся подстановки, являющиеся произведением d транспозиций. В обозначениях утверждения 6 имеем $r=d$, $m_1=m_2=\dots=m_d=2$. Следовательно, не существует $i_0 \in \{1, \dots, d\}$ со свойством $m_{i_0} > 2$, и такие подстановки не удовлетворяют условию утверждения 6.

Итак, в теореме 2, утверждениях 5, 6 полностью описано строение множества $\Gamma_N(q) \cdot \Gamma_N(q+t)$ при $2 \leq t < N - 2$, $2 \leq q < \frac{N-t}{2} + 1$.

Список литературы

1. Пичкур А. Б. Описание класса подстановок, представимых в виде произведения двух подстановок с фиксированным числом мобильных точек // Математические вопросы криптографии. — 2012. — Т. 3. Вып. 2. — С. 79–95.