Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ролдугин, А. В. Тарасов, О булевых функциях без верхних биюнктивных аналогов, *Матем. вопр. криптогр.*, 2013, том 4, выпуск 1, 111–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk76>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:01:13

УДК 519.571

О булевых функциях без верхних биюнктивных аналогов

П. В. Ролдугин, А. В. Тарасов

Московский государственный технический университет радиотехники,
электроники и автоматики, г. Москва

Получено 20.IV.2012

Изучаются условия на вес булевой функции, при которых она не имеет мажорирующих ее биюнктивных функций. Решаются комбинаторные перечислительные задачи, связанные с множествами таких булевых функций.

Ключевые слова: булевы функции, биюнктивные мажоранты, перечислительные задачи

On the Boolean functions without upper bijunctive analogues

P. V. Roldugin, A. V. Tarasov

*Moscow State Technical University of Radio Engineering, Electronics and Automatics,
Moscow*

Abstract. Conditions on the weight of Boolean function of n variables are found under which there are no bijunctive majorants of this function. Some combinatorial enumeration problems on the sets of such functions are solved.

Key words: Boolean functions, bijunctive majorants, enumeration problems

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 111–128 (Russian).

© 2013 Ролдугин П. В. , Тарасов А. В.

Введение

Будем использовать следующие обозначения и определения. Через V_n обозначим множество двоичных векторов длины n . Для булевой функции f от n переменных обозначим через E_f множество ее выполняющих векторов, то есть $E_f = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_n : f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1\}$. Через $\|\alpha\|$ обозначается вес вектора $\alpha \in V_n$; весом функции f называется $\|f\| = |E_f|$. Имплицента булевой функции f называется (см. [1]) такая не равная константе булева функция g , что для любого значения набора переменных $(x_1, \dots, x_n) \in V_n$ верно $f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$; иными словами, $E_f \subseteq E_g$.

Напомним, что бионктивной функцией (см. [14]) называется булева функция f , представимая в виде $f = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{\alpha_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{\alpha_{i2}})$, $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, \dots, t\}$, $j \in \{1, 2\}$.

Иногда имплицента булевой функции f называется верхним аналогом функции f (см. [1]). В настоящей работе исследуются булевы функции, не имеющие в качестве имплицента бионктивных функций, то есть не имеющие верхних бионктивных аналогов.

§ 1. Некоторые свойства булевых функций, не имеющих бионктивных имплицента

Функции, имеющие бионктивные имплиценты, допускают простую характеристику.

Лемма 1. *Функция f имеет в качестве имплиценты бионктивную функцию тогда и только тогда, когда она имеет имплиценту, зависящую не более чем от двух переменных.*

Доказательство. Известно (см. [2]), что класс бионктивных функций есть класс функций, представимых в виде произведения функций от двух или менее переменных. В частности, каждая функция от одной или двух переменных является бионктивной. Отсюда сразу следует обратное утверждение леммы. Докажем прямое утверждение. Пусть функция f имеет в качестве имплиценты бионктивную функцию g . Тогда $g = \bigwedge_{i=1}^s g^{(i)}$, где каждая функция $g^{(i)}$, $i = 1, \dots, s$, зависит не более, чем от двух переменных, и для любых значений аргументов $f \cdot g = f$. Очевидно, что $g \cdot g^{(1)} = g$

и $f \cdot g^{(1)} = (f \cdot g) \cdot g^{(1)} = f \cdot (g \cdot g^{(1)}) = f \cdot g = f$. Следовательно, $g^{(1)}$ — имплицента функции f , зависящая не более чем от 2 переменных. ■

Зафиксируем значения $n, m, n \geq 1, m \geq 0$, и рассмотрим класс $D_{n,m}$ булевых функций от n переменных, имеющих вес m и не обладающих бионктивными имплицентами. Учитывая, что вес функции от n переменных не превосходит 2^n , при $m > 2^n$ верно равенство $D_{n,m} = \emptyset$.

Условию $m = 0$ соответствует только функция, тождественно равная 0; эта функция, очевидно, обладает имплицентами от n или менее переменных. Поэтому $D_{n,0} = \emptyset$. Также очевидно, что каждая функция, не равная тождественно константе, является своей же имплицентой. Поэтому $D_{1,m} = \emptyset$ и $D_{2,m} = \emptyset$ по лемме 1.

Рассмотрим множества $D_{n,m}$ при $1 \leq m \leq 3$ и произвольном $n \geq 1$. Пусть функция f от n переменных имеет вес m . Поскольку $m \leq 3$, найдется такая пара $(\mu, \eta) \in V_2$, что никакой вектор $(\mu, \eta, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$ не лежит в E_f . Рассмотрим бионктивную функцию $x_1^{\mu \oplus 1} \vee x_2^{\eta \oplus 1}$. Имеем

$$(x_1^{\mu \oplus 1} \vee x_2^{\eta \oplus 1}) \cdot f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = \mu \text{ и } x_2 = \eta, \\ f(x_1, \dots, x_n) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но если $x_1 = \mu$ и $x_2 = \eta$, то $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, значит, $(x_1^{\mu \oplus 1} \vee x_2^{\eta \oplus 1}) \cdot f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ при любых $(x_1, \dots, x_n) \in V_n$. Следовательно, всякая функция веса $m, 1 \leq m \leq 3$, от n переменных имеет бионктивную имплиценту. Это означает, что $D_{n,m} = \emptyset$ при $1 \leq m \leq 3$.

Однако, как показывает следующее утверждение, для любого значения $m > 3$ найдется такое значение n , что множество $D_{n,m}$ не пусто.

Утверждение 1. Пусть $m > 3$. Тогда $D_{[\log_2 m] + 1, m} \neq \emptyset$.

Доказательство. Положим $n_0 = [\log_2 m] + 1$. Поскольку $m = 2^{\log_2 m} < 2^{[\log_2 m] + 1} = 2^{n_0}$, то существуют булевы функции от n_0 переменных веса m . Покажем, что $D_{n_0, m} \neq \emptyset$, то есть покажем, что существует булева функция веса m от n_0 переменных, не имеющая бионктивных имплицент, или, что по лемме 1 то же самое, не имеющая имплицент от двух или одной переменной.

Поскольку $m > 3$, то $n_0 \geq 3$. Рассмотрим функцию $f'(x_1, \dots, x_{n_0}) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$. Очевидно, что f' не имеет имплицент от одной переменной: если $x_i^\alpha \cdot (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $\alpha \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, \dots, n_0\}$, то $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$ при $x_i = \bar{\alpha}$, что неверно, например, при $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Предположим, что функция g от двух переменных является имплицентой функции f' . Для упрощения обозначений считаем, что g зависит от переменных x_1, x_2 . Имеем по определению $f' \cdot g = f'$. Значит,

$$\begin{aligned} f'(x_1, \dots, x_{n_0}) \cdot g(x_1, x_2) &= (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \cdot g(x_1, x_2) = \\ &= (x_1 \oplus x_2) \cdot g(x_1, x_2) \oplus x_3 \cdot g(x_1, x_2) = f'(x_1, \dots, x_{n_0}) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$(x_1 \oplus x_2) \cdot \bar{g}(x_1, x_2) = x_3 \cdot \bar{g}(x_1, x_2). \quad (1)$$

По определению имплиценты g отлична от константы, следовательно, существуют такие α_1 и α_2 , что $g(\alpha_1, \alpha_2) = 0$. Выберем $\alpha_3 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus 1$. Подставляя вместо переменных x_1, x_2, x_3 значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, получаем из (1) равенство $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \alpha_3$, что противоречит выбору α_3 . Следовательно, у функции f' нет имплицент и от двух переменных и, следовательно, по лемме 1, у функции f' нет бионктивных имплицент.

У рассмотренной функции f' от $n_0 = \lceil \log_2 m \rceil + 1$ переменных вес равен 2^{n_0-1} . Докажем неравенство $0 \leq m - 2^{n_0-1} < 2^{n_0-1}$. Действительно, $n_0 > \log_2 m$, следовательно, $m < 2^{n_0}$ или $m - 2^{n_0-1} < 2^{n_0-1}$. С другой стороны, $\log_2 m \geq \lceil \log_2 m \rceil = n_0 - 1$, поэтому $m \geq 2^{n_0-1}$ или $0 \leq m - 2^{n_0-1}$.

Добавим к множеству $E_{f'}$ еще $m - 2^{n_0-1}$ новых различных n_0 -мерных двоичных векторов, выбрав их произвольно (это возможно сделать именно ввиду неравенства $0 \leq m - 2^{n_0-1} < 2^{n_0-1}$). Полученное множество является множеством выполняющих векторов некоторой функции f от n_0 переменных и веса m . Предположим, что функция g является имплицентой функции f . Имеем по определению $E_f \subset E_g$; поскольку по построению $E_{f'} \subset E_f$, то $E_{f'} \subset E_g$, то есть g — имплицента функции f' . Но, как показано выше, функция f' не имеет имплицент от двух или менее переменных. Получаем, что и у функции f нет таких имплицент. Таким образом, $D_{n_0, m} \neq \emptyset$. ■

Далее рассмотрим случай, когда n достаточно велико.

Утверждение 2. Пусть $m > 0$. Тогда для любых значений n , $n > 2^m$, $D_{n,m} = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Докажем, что, если $n > 2^m$, то у любой функции f от n переменных и веса m найдется имплицента, зависящая не более чем от 2 переменных. Согласно лемме 1 тогда существует бионктивная имплицента; это и означает, что при $n > 2^m$ все множества $D_{n,m}$ пусты. Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ веса m . Пусть $E_f = \{(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}): i = 1, \dots, m\}$ — множество ее выполняющих векторов. Рассмотрим для каждого $j = 1, \dots, n$ булевы векторы $(\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \dots, \alpha_j^{(m)})$. Это векторы размерности m , и их n штук. Так как $n > 2^m$, то среди указанных векторов найдутся два одинаковых вектора $(\alpha_u^{(1)}, \alpha_u^{(2)}, \dots, \alpha_u^{(m)}) = (\alpha_v^{(1)}, \alpha_v^{(2)}, \dots, \alpha_v^{(m)})$, $1 \leq u < v \leq n$. Это означает, что если $f(x_1, \dots, x_n) = 1$, то $x_u = x_v$. Тогда функция $g = x_u \vee \bar{x}_v$ является имплицентой функции f . Действительно, если $f(x_1, \dots, x_n) = 1$, то $x_u = x_v$ и, следовательно, $g = x_u \vee \bar{x}_v = x_u \vee \bar{x}_u = 1$. Значит, $E_f \subseteq E_g$, то есть g — имплицента функции f . ■

Согласно утверждениям 1 и 2 для любого фиксированного $m > 3$ в последовательности множеств $D_{3,m}$, $D_{4,m}$, $D_{5,m}$, ... найдется непустое множество и, вместе с тем, начиная с некоторого номера, все множества пусты. Это обосновывает корректность следующего определения.

Определение. При фиксированном $m \geq 4$ положим величину $n_{\max}(m)$ равной наибольшему значению n , при котором $D_{n,m} \neq \emptyset$.

Дополнительно по определению положим $n_{\max}(1) = n_{\max}(2) = n_{\max}(3) = 0$.

Определение величины $n_{\max}(m)$ можно переформулировать так: это наибольшее возможное количество переменных булевой функции веса m , не имеющей верхних бионктивных аналогов.

Из доказанных утверждений получаем оценку для величины $n_{\max}(m)$.

Следствие 1. При $m > 3$ верны неравенства $0 < n_{\max}(m) \leq 2^m$.

Отметим свойство монотонности функции $n_{\max}(m)$, которое понадобится далее.

Утверждение 3. Если $m > 0$, то $n_{\max}(m) \leq n_{\max}(m+1)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное значение n , для которого $n \geq [\log_2 m] + 1$ и $D_{n,m} \neq \emptyset$ (по утверждению 1 хотя бы одно такое значение n существует). Далее возьмем произвольную функцию $f \in D_{n,m}$. Имеем $\|f\| = m = 2^{\log_2 m} < 2^{[\log_2 m] + 1} \leq 2^n$. Так как $m < 2^n$, то существует вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, который не лежит в множестве E_f . Добавим в E_f вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и рассмотрим полученное множество как множество выполняющих векторов некоторой функции f' . Функция f' зависит от n переменных и имеет вес $m+1$. Если бы у функции f' существовала бионктивная имплицента g , то выполнялось бы включение $E_{f'} \subset E_g$; поскольку по построению $E_f \subset E_{f'}$, то $E_f \subset E_g$, то есть g была бы бионктивной имплицентой функции f , что дает противоречие. Следовательно, у функции f' также нет бионктивных имплицентов, то есть $D_{n,m+1} \neq \emptyset$. Таким образом, если $D_{n,m} \neq \emptyset$, то $D_{n,m+1} \neq \emptyset$. Это и дает неравенство $n_{\max}(m) \leq n_{\max}(m+1)$. ■

Основным результатом настоящей работы является нахождение точного значения величины $n_{\max}(m)$, приведенное в § 3.

§ 2. Сведение к комбинаторно полным матрицам

Отсутствие у булевой функции бионктивных имплицентов имеет наглядный комбинаторный смысл. Введем следующее определение.

Определение. Назовём $(0,1)$ -матрицу A размера $m \times n$, $n > 1$, *комбинаторно полной*, если в любой подматрице размера $m \times 2$, образованной произвольными двумя столбцами, найдутся все 4 строки: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

Иначе говоря, при выборе любых двух столбцов в матрице A полученная подматрица должна содержать каждую из четырех возможных строк (но не обязательно только по одному разу).

Укажем несколько простых свойств комбинаторно полных матриц. Очевидно, что $m \geq 4$. Очевидно также, что инвертирование любого столбца комбинаторно полной матрицы (то есть инвертирование всех его элементов) приводит к комбинаторно полной матрице. В частности, инвертирование всей матрицы дает комбинаторно полную матрицу. Кроме того, добавление любого числа произвольных строк к комбинаторно полной матрице также дает комбинаторно полную матрицу.

Собственно, нахождение максимального значения числа столбцов комбинаторно полной матрицы при фиксированном значении числа строк и составляет основную цель данной работы. Это обусловлено простой связью, существующей между комбинаторно полными матрицами и булевыми функциями, не имеющими бионктивных имплицент. Матрицу, строки которой являются выполняющими векторами булевой функции f от n переменных, обозначим через $\tilde{E}_f$:

$$\tilde{E}_f = \begin{pmatrix} (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}) \\ \dots \\ (\alpha_1^{(\|f\|)}, \dots, \alpha_n^{(\|f\|)}) \end{pmatrix},$$

где $(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}) \in E_f$, $i = 1, \dots, \|f\|$.

Утверждение 4. Булева функция f , отличная от константы, имеет бионктивную имплиценту тогда и только тогда, когда матрица $\tilde{E}_f$ не является комбинаторно полной матрицей.

Доказательство. Имплицента называется элементарной, если существует ее запись в виде элементарной дизъюнкции. У функции f есть бионктивная имплицента тогда и только тогда, когда существует элементарная имплицента, зависящая от не более чем двух переменных. Действительно, если $g = \prod_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{\alpha_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{\alpha_{i2}})$, $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, \dots, t\}$, $j \in \{1, 2\}$, — бионктивная имплицента функции f , то $g' = x_{s_{11}}^{\alpha_{11}} \vee x_{s_{12}}^{\alpha_{12}}$ является элементарной имплицентой функции f , поскольку $g \cdot g' = g$ и $f \cdot g' = (f \cdot g) \cdot g' = f \cdot (g \cdot g') = f \cdot g = f$. Обратное очевидно: если есть элементарная имплицента $x_i^\alpha \vee x_j^\beta$ функции f , то она и является бионктивной.

Рассмотрим элементарную дизъюнкцию, зависящую от не более чем двух переменных вида $g = x_i^\alpha \vee x_j^\beta$ (i может совпадать с j : в этом случае $\alpha = \beta$). Эта дизъюнкция является имплицентой функции f от n переменных тогда и только тогда, когда для всех значений аргументов $f \cdot g = f \cdot (x_i^\alpha \vee x_j^\beta) = f$. Последнее равенство эквивалентно тому, что на всех таких векторах $(x_1, \dots, x_n)$, что $x_i = \alpha \oplus 1$, $x_j = \beta \oplus 1$, должно выполняться равенство $f(x_1, \dots, x_n) = 0$; иначе говоря, среди выполняющих векторов функции f нет таких, в которых на местах i, j стояли бы значения $(\alpha \oplus 1, \beta \oplus 1)$ соответственно. По определению матрицы $\tilde{E}_f$ это происходит

тогда и только тогда, когда в столбцах с номерами i, j матрицы $\tilde{E}_f$ не содержится строка, равная $(\alpha \oplus 1, \beta \oplus 1)$, то есть матрица $\tilde{E}_f$ не является комбинаторно полной. ■

Доказанное утверждение обнаруживает связь между величиной $n_{\max}(m)$ и максимальным значением числа столбцов комбинаторно полной матрицы, имеющей m строк. По определению $D_{n_{\max}(m), m} \neq \emptyset$, то есть существует булева функция f от $n_{\max}(m)$ переменных веса m , не имеющая бионктивных имплицент. Согласно утверждению 4 матрица $\tilde{E}_f$ является комбинаторно полной и имеет размеры $n_{\max}(m) \times m$. Следовательно, максимально возможное число столбцов в комбинаторно полной матрице, имеющей m строк, не меньше $n_{\max}(m)$. Верно и обратное неравенство, однако его доказательство несколько сложнее и приведено в следующем утверждении.

Утверждение 5. *Максимально возможное число столбцов в комбинаторно полной матрице, имеющей m строк, равно $n_{\max}(m)$.*

Доказательство. Обозначим максимально возможное число столбцов в комбинаторно полной матрице, имеющей m строк, через $r(m)$. Выше показано, что $r(m) \geq n_{\max}(m)$. Докажем обратное неравенство. Пусть A — комбинаторно полная матрица размера $m \times r(m)$. Если в этой матрице имеются одинаковые строки, то удалим повторы, то есть из каждой группы одинаковых строк оставим только по одной строке. Получим матрицу A' размера $m' \times r(m)$, $m' \leq m$. Очевидно, что матрица A' также комбинаторно полная. В матрице A' все строки различны, поэтому эта матрица задает некоторую функцию f , для которой $\tilde{E}_f = A'$. По утверждению 4 функция f от $r(m)$ переменных веса m' не имеет бионктивных имплицент. Следовательно, число переменных функции f не превышает максимальное число переменных у функции веса m' , не имеющей бионктивных имплицент. По определению это максимальное число равно $n_{\max}(m')$, то есть $r(m) \leq n_{\max}(m')$. Далее, $n_{\max}(m') \leq n_{\max}(m)$ при $m' \leq m$ по утверждению 3, следовательно, $r(m) \leq n_{\max}(m)$.

Соединяя оба неравенства, получаем $r(m) = n_{\max}(m)$. ■

Доказанное утверждение позволяет нам в следующем параграфе найти значение величины $n_{\max}(m)$ именно как максимально возможного числа столбцов в комбинаторно полной матрице, имеющей m строк.

§ 3. Значение $n_{\max}(m)$

Всюду далее в данном параграфе рассматривается случай $m > 3$.

Теорема 1. Для величины $n_{\max}(m)$ верны формулы:

$$\begin{aligned} & \text{— если } m \text{ четно, то } n_{\max}(m) = \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{m/2}, \\ & \text{— если } m \text{ нечетно, то } n_{\max}(m) = \binom{m-1}{(m-3)/2}. \end{aligned}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, введем некоторые понятия и докажем вспомогательные утверждения. Напомним (см. [4]), что два булевых вектора $\alpha, \beta \in V_m$ называются сравнимыми, если один вектор покоординатно не меньше другого. В противном случае эти векторы называются не сравнимыми; в этом случае используем обозначение $\alpha \not\geq \beta$. Множество векторов называется антицепью, если любые два вектора в этом множестве не сравнимы.

Определение. Векторы $\alpha, \beta \in V_m$ назовем сильно не сравнимыми, если не сравнимы векторы α, β и не сравнимы векторы $\bar{\alpha}, \beta$.

Очевидно, что если векторы α, β сильно не сравнимы, то множество векторов $\{\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}\}$ является антицепью.

Определение. Множество векторов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, $\alpha_i \in V_m$, $i = 1, \dots, t$, образует *сильную антицепь*, если любые два вектора из этого множества являются сильно не сравнимыми.

Очевидно, что в сильной антицепи не могут одновременно лежать вектор и его отрицание. В терминах сильных антицепей можно сформулировать критерий комбинаторной полноты.

Утверждение 6. Матрица A размера $m \times n$ является комбинаторно полной тогда и только тогда, когда ее столбцы образуют сильную антицепь.

Доказательство. Пусть матрица A размера $m \times n$ является комбинаторно полной. Рассмотрим пару ее столбцов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$. Из определения комбинаторной полноты следует, что существуют такие номера строк $i_0, \dots, i_3$, что

$$(\alpha_{i_0}, \beta_{i_0}) = (0, 0), (\alpha_{i_1}, \beta_{i_1}) = (0, 1), (\alpha_{i_2}, \beta_{i_2}) = (1, 0), (\alpha_{i_3}, \beta_{i_3}) = (1, 1).$$

Очевидно, что $\alpha \triangleleft \beta$, поскольку $\alpha_{i_1} < \beta_{i_1}$ и $\alpha_{i_2} > \beta_{i_2}$. Кроме того, поскольку $\alpha_{i_0} \oplus 1 > \beta_{i_0}$ и $\alpha_{i_4} \oplus 1 < \beta_{i_4}$, то $\alpha \triangleleft \bar{\beta}$. Значит векторы α , β сильно не сравнимы.

С другой стороны, предположим, что столбцы $\alpha, \beta \in V_m$ не являются сильно не сравнимыми. Перечислим возможные случаи:

- 1) $\alpha \geq \beta$, тогда в множестве $\{(\alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, m\}$ отсутствует пара $(0, 1)$;
- 2) $\alpha \leq \beta$, тогда отсутствует пара $(1, 0)$;
- 3) $\bar{\alpha} \geq \beta$, тогда отсутствует пара $(1, 1)$;
- 4) $\bar{\alpha} \leq \beta$, тогда отсутствует пара $(0, 0)$.

Во всех указанных случаях матрица A не будет комбинаторно полной порядка 2. ■

Для максимальной мощности сильных антицепей верна оценка, легко выводимая из теоремы Шпернера (мощность любой антицепи в множестве

m -мерных булевых векторов не превосходит $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$, см., например, [4]).

Утверждение 7. Если множество векторов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\} \subset V_m, t \geq 2$, является сильной антицепью, то

$$t \leq \frac{1}{2} \cdot \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}.$$

Доказательство. Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ — сильная антицепь. Если $t > 1$, то в ней, очевидно, не содержатся векторы $(0, \dots, 0)$ и $(1, \dots, 1)$. Рассмотрим цепочку векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_t$. Так как $\|\alpha\| \notin \{0, m\}$, то $\alpha_i \triangleleft \bar{\alpha}_i, i = 1, \dots, t$. Кроме того, если $\alpha_i \triangleleft \alpha_j$, то $\alpha_i \triangleleft \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_i \triangleleft \bar{\alpha}_j$, и наша последовательность образует антицепь. По теореме Шпернера ([5]) ее длина $2t$ не превосходит $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$. ■

Чтобы теперь доказать теорему 1, надо показать, что для четного m оценка из утверждения 7 достижима; для нечетного значения m необходимо уточнить оценку и также доказать ее достижимость.

Для уточнения оценки в случае нечетного m воспользуемся теоремой Эрдёша–Ко–Радо (см., например, [6]). В одной из эквивалентных форм ее

формулировка выглядит следующим образом. Пусть семейство подмножеств $A_1, \dots, A_t$ конечного множества X мощности m обладает следующими тремя свойствами: существует такое k , $k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, что $|A_i| \leq k$ для любого $i = 1, \dots, t$; для любых i и j , $i \neq j$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$; для любых i и j , $i \neq j$, $A_i \not\subset A_j$. Тогда верно неравенство $t \leq \binom{m-1}{k-1}$. Чтобы применить этот результат, возьмем натуральное число $m \geq 4$ нечетным и рассмотрим произвольную сильную антицепь $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, $\alpha_i \in V_m$, $i = 1, \dots, t$. Как указывалось выше, если два вектора сильно не сравнимы, то инвертирование одного вектора (или обоих) приводит также к сильно не сравнимой паре, поэтому, инвертируя векторы в сильной антицепи $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, добиваемся того, чтобы вес каждого вектора α_i , $i = 1, \dots, t$, не превышал $\frac{(m-1)}{2}$. Представим каждый из двоичных векторов $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ (размерности m) как характеристический вектор подмножества $I(\alpha_i)$ в конечном множестве $X = \{x_1, \dots, x_m\}$: $x_s \in I(\alpha_i)$ тогда и только тогда, когда s -я координата вектора α_i равна 1. Так как $\|\alpha_i\| \leq \frac{(m-1)}{2}$, то $|I(\alpha_i)| \leq \frac{(m-1)}{2}$ для всех $i = 1, \dots, t$. Пусть α_i, α_j — два различных вектора из семейства $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$. По утверждению 6 в матрице T , составленной из двух столбцов (α_i, α_j) , есть все возможные строки: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Наличие строк $(1, 0)$, $(0, 1)$ означает, что ни одно из множеств $I(\alpha_i)$, $I(\alpha_j)$ не лежит в другом. Наличие строки $(1, 1)$ означает, что $I(\alpha_i) \cap I(\alpha_j) \neq \emptyset$. Таким образом, набор множеств $I(\alpha_1), \dots, I(\alpha_t)$ удовлетворяет условиям используемой теоремы при $k = \frac{(m-1)}{2}$. Следовательно, доказано следующее.

Утверждение 8. Если m нечетно и множество векторов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, $\alpha_i \in V_m$, $i = 1, \dots, t$, является сильной антицепью, то

$$t \leq \binom{m-1}{\frac{(m-3)}{2}}.$$

Докажем еще несколько простых лемм.

Лемма 2. Если t четно и различные векторы α и β таковы, что $\|\alpha\| = \|\beta\| = m/2$, то либо $\alpha = \bar{\beta}$, либо α и β сильно не сравнимы.

Доказательство. Обозначим через A множество номеров координат, которые в векторе α равны единице; через B — аналогичное множество для вектора β . По условию $|A| = |B| = m/2$ и $A \neq B$. Если $\alpha \neq \bar{\beta}$, то $A \cap B \neq \emptyset$. Следовательно, существуют $i_0 \in A \cap B$, $i_1 \in A \setminus B$, $i_2 \in B \setminus A$ и $i_3 \in (1, \dots, m) \setminus (A \cup B)$. Координата с номером i_1 в векторе α равна 1, а в векторе β равна 0. Координаты с номером i_2 соответственно равны 0 и 1. Поэтому векторы α и β не сравнимы. Координаты с номером i_0 равны 1; координаты с номером i_3 равны 0. Поэтому векторы $\bar{\alpha}$ и β не сравнимы, то есть α и β сильно не сравнимы. ■

Для векторов α и β из V_m через $\alpha \cdot \beta$ обозначим булев вектор размерности t , полученный перемножением координат векторов α и β .

Лемма 3. Если t нечетно и два различных вектора α и β таковы, что $\|\alpha\| = \|\beta\| = \frac{m-1}{2}$, то α и β сильно не сравнимы тогда и только тогда, когда $\alpha \cdot \beta \neq (0, \dots, 0)$.

Доказательство. Обозначим $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$. Так как веса векторов α и β одинаковы, то очевидно, что $\alpha \succ \beta$. Пусть $\alpha \cdot \beta = (0, \dots, 0)$, то есть нет координаты, которая одновременно и в α , и в β равна 1. Поскольку $\|\alpha\| = \|\beta\| = \frac{m-1}{2}$, то существует единственная такая координата i , что $(\alpha_i, \beta_i) = (0, 0)$ и $(\alpha_j, \beta_j) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$ для всех $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$. Следовательно, $(\alpha_i, \bar{\beta}_i) = (0, 1)$ и $(\alpha_j, \bar{\beta}_j) \in \{(0, 0), (1, 1)\}$ для всех $j \neq i$. Тогда $\alpha < \bar{\beta}$, то есть свойство сильной несравнимости отсутствует.

Пусть теперь $\alpha \cdot \beta \neq (0, \dots, 0)$, то есть существует такая координата v , что $(\alpha_v, \beta_v) = (1, 1)$. Поскольку $\|\alpha\| = \|\beta\| = \frac{m-1}{2}$, найдется такая координата l , что $(\alpha_l, \beta_l) = (0, 0)$. Значит, $(\bar{\alpha}_v, \beta_v) = (0, 1)$, а $(\bar{\alpha}_l, \beta_l) = (1, 0)$. Это означает, что $\bar{\alpha} \succ \beta$, то есть векторы α и β сильно не сравнимы. ■

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть m четно. Возьмем все векторы размерности m и веса $m/2$. Введем на этом множестве отношение эквивалентности: векторы α и β эквивалентны, если $\alpha = \bar{\beta}$. Очевидно, что каждый класс эквивалентности имеет мощность 2. Взяв по одному представителю из каждого класса, получим некоторое множество R . По лемме 2 это множество является сильной антицепью. Кроме того, мощность множества R равна $\frac{1}{2} \cdot \binom{m}{m/2}$, то есть верхняя оценка из утверждения 7 в случае четного m достижима.

Пусть теперь m нечетно. Рассмотрим множество P векторов размерности m и веса $\frac{m-1}{2}$, у которых первая координата равна 1. По лемме 3 мно-

жество P будет сильной антицепью; мощность P равна $\binom{m-1}{(m-3)/2}$. Значит,

верхняя оценка для мощности сильной антицепи из утверждения 8 также достижима, что завершает доказательство теоремы. ■

§ 4. Следствия из теоремы 1

Из теоремы 1 можно вывести несколько простых следствий. Поскольку функция $n_{\max}(m)$ описывается разными формулами для четных и нечетных значений m , то для простоты рассуждений отметим один элементарный факт. Пусть $\{a_s, s \in \mathbb{N}\}$ — произвольная последовательность вещественных чисел. Очевидно что, если $\lim_{s \rightarrow \infty} a_{2s} = t$ и $\lim_{s \rightarrow \infty} a_{2s+1} = t$, где $t \in \mathbb{R}$, то $\lim_{s \rightarrow \infty} a_s = t$.

Сначала отметим, что увеличение числа строк в комбинаторно полной матрице на 1 отражается примерно двукратным увеличением максимально возможного числа столбцов. Более строго сформулируем это в следующем утверждении.

Следствие 2. Для любого $m \geq 4$

$$\frac{n_{\max}(m+1)}{n_{\max}(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 2.$$

Доказательство. При $s \geq 2$

$$\frac{n_{\max}(2s+1)}{n_{\max}(2s)} = \frac{\binom{2s}{s-1}}{\frac{1}{2}\binom{2s}{s}} = 2 \cdot \frac{s}{s+1} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 2,$$

и при $s \geq 3$

$$\frac{n_{\max}(2s)}{n_{\max}(2s-1)} = \frac{\frac{1}{2}\binom{2s}{s}}{\binom{2s-2}{s-2}} = \frac{2s-1}{s-1} = 2 + \frac{1}{s-1} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 2.$$

Следовательно, $\frac{n_{\max}(m+1)}{n_{\max}(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 2$. ■

Следствие 3. При $m \geq 4$ функция $n_{\max}(m)$ — строго возрастающая.

Доказательство. Для любого s верно $\frac{n_{\max}(2s+1)}{n_{\max}(2s)} = 2 \cdot \frac{s}{s+1} > 1$

и $\frac{n_{\max}(2s)}{n_{\max}(2s-1)} = 2 + \frac{1}{s-1} > 1$. ■

Теорема 1 показывает, что при четных и нечетных значениях m функция $n_{\max}(m)$ обладает одинаковой асимптотикой.

Следствие 4. Если $m \rightarrow \infty$, то $n_{\max}(m) \sim \frac{2^m}{\sqrt{2\pi m}}$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Стирлинга и найдем асимптотику функции $\binom{2s}{s}$. Имеем при $s \rightarrow \infty$

$$\binom{2s}{s} = \frac{(2s)!}{(s!)^2} \sim \frac{\left(\frac{2s}{e}\right)^{2s} \cdot \sqrt{4\pi s}}{\left(\left(\frac{s}{e}\right)^s \cdot \sqrt{2\pi s}\right)^2} = \frac{2^{2s}}{\sqrt{\pi s}}.$$

Отсюда получаем, что $n_{\max}(2m) = \frac{1}{2} \cdot \binom{2m}{m} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{2\pi(2m)}}$ при $m \rightarrow \infty$ и

$$n_{\max}(2m+1) = \binom{2m}{m-1} = \frac{(2m)!}{m! \cdot m!} \cdot \frac{m}{m+1} \sim \frac{(2m)!}{m! \cdot m!} = \binom{2m}{m} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \sim \frac{2^{2m+1}}{\sqrt{2\pi(2m+1)}}.$$

Следовательно, $n_{\max}(m) \sim \frac{2^m}{\sqrt{2\pi m}}$ при $m \rightarrow \infty$. ■

В заключение параграфа рассмотрим вопрос о количестве сильных антицепей длины $n_{\max}(m)$.

Утверждение 9. Число сильных антицепей из $n_{\max}(m)$ векторов размерности m равно $2^{n_{\max}(m)}$, если m четно, и $m \cdot 2^{n_{\max}(m)}$, если m нечетно.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся известными фактами об антицепях, на которых достигаются оценки в теореме Шпернера и Эрдеша–Ко–Радо (см., например, [3]). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ — сильная антицепь из булевых векторов размерности m максимальной длины $t = n_{\max}(m)$.

Пусть m четно, тогда $n_{\max}(m) = \frac{1}{2} \binom{m}{m/2}$ по теореме 1. Рассмотрим множество векторов $\{\beta_1, \dots, \beta_{2t}\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_t\}$. Из определения сильной несравнимости очевидно следует, что $\{\beta_1, \dots, \beta_{2t}\}$ — антицепь длины $2t = \binom{m}{m/2}$. Известно ([5]), что при четном m существует единственная анти-

цепь максимальной длины $\binom{m}{m/2}$: это антицепь, составленная из всех век-

торов веса $\frac{m}{2}$. Следовательно, набор $\{\beta_1, \dots, \beta_{2t}\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_t\}$ и является такой антицепью. Таким образом, получаем, что любая сильная антицепь максимальной длины получается путем выбора среди всех векторов веса $\frac{m}{2}$ половины так, чтобы вектор и его отрицание одновременно не выби-
рались.

Как и в доказательстве теоремы 1, все множество векторов длины $\frac{m}{2}$ разобьем на $\frac{1}{2} \binom{m}{m/2}$ непересекающихся классов по два элемента в каждом — каждый класс содержит некоторый вектор и его отрицание. Выбор сильной антицепи мощности $\frac{1}{2} \binom{m}{m/2}$ векторов эквивалентен выбору представителя от каждого класса. Следовательно, всего существует $2^{\frac{1}{2} \binom{m}{m/2}}$ сильных антицепей указанной мощности.

Пусть теперь m нечетно и $t = n_{\max}(m) = \binom{m-1}{(m-3)/2}$ по теореме 1. Из определения очевидно, что инвертирование любых векторов в $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ (инвертирование вектора есть инвертирование каждой его координаты) приводит также к сильной антицепи. Поэтому инвертированием векторов в $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ добьемся того, что их веса не превосходили $\frac{(m-1)}{2}$. Как известно ([6]), при нечетном m , если длина антицепи совпадает с оценкой из теоремы Эрдеша–Ко–Радо, то все векторы антицепи имеют одинаковый вес, равный k (в нашем случае мы применяем эту теорему при $k = \frac{(m-1)}{2}$), и найдется такая координата, что во всех векторах из этой антицепи данная координата равна 1. Поскольку сильная антицепь, в частности, является антицепью, это означает, что $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ имеет вид (*): одна из координат (назовем ее i_0) в каждом из векторов α_j , $j = 1, \dots, t$, равна 1; векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ получаются распределением по $m-1$ оставшимся координатам $\frac{m-3}{2}$ единиц всеми возможными способами.

Таким образом, всякая сильная антицепь максимальной длины получается из сильной антицепи вида (*) инвертированием части векторов. Сильных антицепей вида (*) ровно m (координату i_0 можно выбрать m способами). Инвертировать можно любое подмножество из $t = \binom{m-1}{(m-3)/2}$ век-

торов, то есть 2^t способов. Следовательно, всего существует $m \cdot 2^{\binom{m-1}{(m-3)/2}}$ сильных антицепей максимальной длины. ■

Пользуясь утверждениями 3 и 6 и формулами для числа сильных антицепей максимальной длины, можно вычислить количества булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих какому-нибудь из условий:

- 1) $n = n_{\max}(m)$ при некотором натуральном m ;
- 2) никакая бионктивная функция не является имплицентай функции f ;
- 3) функция f имеет минимально возможный вес (равный m) среди всех булевых функций, удовлетворяющих условиям 1 и 2.

Отметим, что число булевых функций от $n = n_{\max}(m)$ переменных и веса m равно $\binom{2^{n_{\max}(m)}}{m} \approx \frac{2^{m \cdot n_{\max}(m)}}{m!}$ (асимптотическая формула верна, поскольку $2^{n_{\max}(m)} \gg m$).

Утверждение 10. Число булевых функций, удовлетворяющих условиям 1–3, равно $\frac{2^{n_{\max}(m)} \cdot n_{\max}(m)!}{m!}$, если m четно, и $\frac{2^{n_{\max}(m)} \cdot m \cdot n_{\max}(m)!}{m!}$, если m нечетно.

Доказательство. Каждая сильная антицепь из $n_{\max}(m)$ векторов дает $n_{\max}(m)!$ различных комбинаторно полных матриц за счет перестановки векторов (столбцов матрицы). Очевидно также, что две различные сильные антицепи не могут образовать одну и ту же комбинаторно полную матрицу. Поэтому общее число комбинаторно полных матриц размера $m \times n_{\max}(m)$ порядка 2 равно $2^{n_{\max}(m)} \cdot n_{\max}(m)!$ для четного m и $2^{n_{\max}(m)} \cdot m \cdot n_{\max}(m)!$ для нечетного m .

Остается заметить, что из полученного в доказательстве утверждения 9 описания вида сильных антицепей максимальной длины и для четных и для нечетных значений m в любой комбинаторно полной матрице размера $m \times n_{\max}(m)$ нет одинаковых строк. А любая перестановка строк в матрице $\tilde{E}_f$ приводит к той же булевой функции f . Следовательно, каждой булевой функции, удовлетворяющей условиям 1–3, соответствует ровно $m!$ комбинаторно полных матриц размера $m \times n_{\max}(m)$ порядка 2. Отсюда получаем искомое значение числа таких функций. ■

Список литературы

1. Горшков С. П. О сложности распознавания мультиаффинности, буюнктивности, слабой положительности и слабой отрицательности булевых функций // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1997. — Т. 4. Вып. 2. — С. 216–237.
2. *Schaefer T.* Complexity of satisfiability problems // Proceedings of the 10 Annual ACM Symposium on Theory of Computing. — 1978. — P. 216–226.
3. Горшков С. П. Применение теории NP-полных задач для оценки сложности решения систем булевых уравнений // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1995. — Т. 2. Вып. 3. — С. 325–398.
4. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
5. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982.
6. Райгородский А. М. Системы общих представителей и их приложения в геометрии. — М.: МЦНМО, 2006.