Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашев, Об одной аддитивной задаче теории чисел со случайным числом слагаемых, *Матем. вопр. криптогр.*, 2013, том 4, выпуск 1, 129–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk77>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:32:02

УДК 511.34 + 519.212.2

Об одной аддитивной задаче теории чисел со случайным числом слагаемых

А. Н. Тимашев

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 23.VI.2012

Получены асимптотические формулы для первых двух моментов числа решений уравнения $x_1^m + \dots + x_s^m = N$ в целых неотрицательных числах, где m, s, N — целые положительные числа, m фиксировано, а s — случайная величина. Рассмотрены случаи, когда распределение $s - 1$ является биномиальным или пуассоновским. Доказательства основаны на методе перевала. Аналогичные вопросы рассматриваются и для числа целых неотрицательных решений неравенства $x_1^m + \dots + x_s^m \leq N$.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, производящие функции, метод перевала, первые моменты числа решений

**On an additive problem of number theory with random number
of summands**

A. N. Timashev

LLC «Certification Research Center», Moscow

Abstract. Asymptotic formulas for the mean and variance of the number of nonnegative integer solutions of the equation $x_1^m + \dots + x_s^m = N$ are obtained; here m, s, N are integer positive numbers, $m = \text{const}$, and s is a random variable. Cases of the binomial and Poisson distributions of $s - 1$ are considered. Proofs are based on the saddle point method. Analogous results for the number of nonnegative integer solutions of the inequality $x_1^m + \dots + x_s^m \leq N$ are obtained also.

Key words: Diophantine equations, generating functions, saddle-point method, first moments of the number of solutions

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 129–150 (Russian).

© 2013 Тимашев А. Н.

Рассматривается уравнение

$$x_1^m + \dots + x_s^m = N, \quad (1)$$

в котором $m, s, N \in \mathbb{N}$, в целых неотрицательных числах $x_1, \dots, x_s$. Всюду далее считаем, что $m = \text{const}$. При $|z| < 1$ положим

$$f_m(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n^m}. \quad (2)$$

Если $r_k(N)$ — число решений уравнения (1) в целых неотрицательных числах $x_1, \dots, x_{k+1}$, где $s = k + 1$, то согласно (2) и интегральной формуле Коши

$$r_k(N) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(f_m(z))^{k+1}}{z^{N+1}} dz, \dots k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где интегрирование осуществляется по окружности $|z| = z_0$ радиуса $z_0 \in (0, 1)$, пробегаемой в положительном направлении.

Заметим, что вопрос о разрешимости уравнения (1) в целых положительных числах $x_1, \dots, x_s$ при $m \geq 3$ называется проблемой Варинга [1; с. 177]. Асимптотическая формула для числа решений $t_s(N)$ этого уравнения при $N \rightarrow \infty$ и $s \geq cm^2 \ln m$ ($c = \text{const} > 0$) найдена И. М. Виноградовым [1; с. 192]. Эта формула имеет вид

$$t_s(N) = \frac{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right)^s}{\Gamma\left(\frac{s}{m}\right)} \cdot \delta(N) \cdot N^{\frac{s}{m}-1} + O\left(N^{\frac{s}{m}-1-\frac{c_0}{m^2}}\right), \quad c_0 = \text{const} > 0,$$

где $\delta(N)$ — некоторый «сингулярный» ряд, сумма которого превосходит положительную постоянную. При этом предполагалось, что числа s, m фиксированы.

Для случая, когда $m = \text{const} \in \mathbb{N}$ и $N, s \rightarrow \infty$ так, что $Ns^{-1} \geq \text{const} > 1$, асимптотическая формула для величины $t_s(N)$ получена Г. А. Фрейманом [2] (см. также [3, с. 124]). В монографии автора [4, гл. IV] получены, в частности, асимптотические оценки величин $t_s(N)$, справедливые при $N, s \rightarrow \infty$ и фиксированном $m \in \mathbb{N}$ (рассмотрены три области изменения параметров N, s). Там же выведена асимптотическая оценка величины $t_s(N)$ при условии, что $N, s \rightarrow \infty$ так, что $s^{m+1} = o(N)$. Эта оценка аналогична формуле

И. М. Виноградова и формально получается из неё (за исключением вида остаточных членов), если считать, что $\delta(N) = 1$.

Аналогичные оценки выведены и для числа решений неравенства

$$x_1^m + \dots + x_s^m \leq N \quad (4)$$

в целых положительных числах $x_1, \dots, x_s$.

Основным методом получения изложенных результатов в [4] является метод перевала в сочетании с теорией обобщенных схем размещения, ряд результатов которой изложен в [5] и [6].

В данной работе изучается случай, когда в уравнении (1) $x_1, \dots, x_s$ — целые неотрицательные числа. При этом предполагается, что число слагаемых s такая случайная величина, что

$$\mathbf{P}\{s = k + 1\} = p_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \quad (5)$$

Пусть $R \geq 1$ — радиус сходимости ряда

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad (6)$$

тогда равенство (6) справедливо при $|z| < R$. Далее будем считать, что $R = +\infty$ (так будет, например, если случайная величина $s - 1$ распределена по закону Пуассона с произвольным параметром $\lambda > 0$ или имеет биномиальное распределение).

Пусть ξ_m — случайная величина, равная числу решений уравнения (1) в целых неотрицательных числах $x_1, \dots, x_s$ со случайным числом слагаемых, имеющим распределение вида (5). Тогда при $R = +\infty$ согласно (3), (6)

$$\mathbf{E} \xi_m = \sum_{k=0}^{\infty} p_k r_k(N) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{0 < |z| = z_0 < 1} \frac{f_m(z)}{z^{N+1}} P(f_m(z)) dz, \quad (7)$$

функция $f_m(z)$ определена в (2).

Если $s - 1$ имеет распределение Пуассона с параметром λ

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lambda = \text{const} > 0,$$

то при $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = \exp(\lambda(z-1)),$$

так что из (7) следует равенство

$$\mathbf{E} \xi_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{0 < |z|=z_0 < 1} \frac{f_m(z)}{z} \exp(\lambda(f_m(z)-1-\beta \ln z)) dz, \quad (8)$$

где $\beta = N\lambda^{-1}$.

Пусть $N, \lambda \rightarrow \infty$ так, что

$$0 < \beta_0 \leq \beta = N\lambda^{-1} \leq \beta_1 < +\infty, \quad \beta_0, \beta_1 = \text{const}, \quad (9)$$

тогда согласно (8), (9)

$$\mathbf{E} \xi_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{0 < |z|=z_0 < 1} \frac{f_m(z)}{z} \exp(\lambda \omega(z)) dz, \quad (10)$$

где

$$\omega(z) = f_m(z) - 1 - \beta \cdot \ln z. \quad (11)$$

Теорема 1. Пусть $s-1$ имеет распределение Пуассона с параметром λ и $N, \lambda \rightarrow \infty$ так, что выполнены условия (9). Тогда равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$ при любом $m = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E} \xi_m = \frac{f_m(z_0)}{z_0^N \sqrt{2\pi\lambda(z_0^2 f_m''(z_0) + \beta)}} \exp(\lambda(f_m(z_0)-1))(1+O(\lambda^{-1})), \quad (12)$$

где $z = z_0$ — единственный принадлежащий интервалу $(0,1)$ корень уравнения

$$z f_m'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^m z^{n^m} = \beta, \quad (13)$$

величина $f_m(z_0)$ определяется из (2) при $z = z_0$ и согласно (2)

$$z_0^2 f_m''(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n^m (n^m - 1) z_0^{n^m}.$$

Замечание 1. При $m=1$ из (2), (13) нетрудно вывести, что при $\beta > 0$

$$z_0 = 1 - \frac{\sqrt{1+4\beta}-1}{2\beta} \in (0,1),$$

так что согласно (12)

$$\mathbf{E}\xi_1 = \frac{(1+4\beta)^{1/4} + (1+4\beta)^{-1/4}}{2\sqrt{2\pi N}} z_0^{-N} \exp\left(\frac{\lambda}{2}(\sqrt{1+4\beta}-1)\right)(1+O(\lambda^{-1})).$$

Пусть η_m — случайная величина, равная числу решений неравенства

$$x_1^m + \dots + x_s^m \leq N \quad (14)$$

в целых неотрицательных числах $x_1, \dots, x_s$ при условии, что s — случайная величина, имеющая распределение вида (5), для которого $R = +\infty$.

Теорема 2. Пусть $s-1$ имеет распределение Пуассона с параметром λ и $N, \lambda \rightarrow \infty$ так, что $\lambda = o(N^{1/3})$. Тогда

$$\mathbf{E}\xi_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\lambda N)^{-1/4} \exp\left(2\sqrt{\lambda N} - \frac{\lambda}{2}\right)(1+o(1)),$$

$$\mathbf{E}\eta_1 = \sqrt{\frac{N}{\lambda}} \mathbf{E}\xi_1 (1+o(1)).$$

При фиксированном значении $s = k+1$ число решений неравенства (14) равно

$$T_k(N) = \sum_{l=0}^N r_k(l), \quad k=0,1,\dots;$$

величина $r_k(l)$ определена в (3) с заменой N на l . Поэтому согласно (3)

$$\begin{aligned} T_k(N) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{0 < |z|=z_0 < 1} \frac{(f_m(z))^{k+1}}{z} \sum_{l=0}^N z^{-l} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{0 < |z|=z_0 < 1} \frac{(f_m(z))^{k+1}}{z^{N+1}(1-z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{0 < |z|=z_0 < 1} \frac{(f_m(z))^{k+1}}{1-z} dz, \end{aligned}$$

причем второй интеграл согласно интегральной теореме Коши равен нулю.

Таким образом,

$$\mathbf{E}\eta_m = \sum_{k=0}^{\infty} p_k T_k(N) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{0 < |z|=z_0 < 1} \frac{f_m(z)}{z^{N+1}(1-z)} P(f_m(z)) dz.$$

Следствие 1. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$\mathbf{E} \eta_m = (1 - z_0)^{-1} \mathbf{E} \xi_m \left(1 + O(\lambda^{-1})\right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

В частности, при $m = 1$

$$\mathbf{E} \eta_1 = \frac{\sqrt{1 + 4\beta} + 1}{2} \mathbf{E} \xi_1 \left(1 + O(\lambda^{-1})\right).$$

Теорема 3. Пусть $s - 1$ имеет распределение Пуассона с параметром λ и $N, \lambda \rightarrow \infty$ так, что $\lambda = o(N^{1/4})$. Тогда при $m = 2$

$$\mathbf{E} \xi_2 = \frac{1}{2^{\frac{1}{6}} \sqrt{3N}} \exp \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi N \lambda^2}{2}} - \frac{\lambda}{2} \right) (1 + o(1)), \quad (16)$$

$$\mathbf{E} \eta_2 = 2 \sqrt[3]{\frac{2N^2}{\pi \lambda^2}} \mathbf{E} \xi_2 (1 + o(1)). \quad (17)$$

Теорема 4. Пусть $s - 1$ имеет распределение Пуассона с параметром λ и $N, \lambda \rightarrow \infty$ так, что

$$N = o(\lambda^{1-2^{-m}}).$$

Тогда

$$\mathbf{E} \xi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \left(\frac{\lambda e}{N} \right)^N (1 + o(1)),$$

$$\mathbf{E} \eta_m = \mathbf{E} \xi_m (1 + o(1)), \quad m = 1, 2, \dots$$

Замечание 2. При $m = 1$ утверждение теоремы 4 можно уточнить. Можно показать, что если $N, \lambda \rightarrow \infty$ так, что $N = o(\lambda^{2/3})$, то

$$\mathbf{E} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \left(\frac{\lambda}{N} \right)^N \exp \left(\frac{N^2}{\lambda} + N \right) (1 + o(1)).$$

Предположим теперь, что $n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$ и $s - 1$ имеет биномиальное распределение с параметрами n и p . Далее считаем, что $p = \text{const}$. При таких условиях

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

так, что

$$P(z) = (1 + p(z-1))^n$$

и согласно (7) (с заменой z_0 на z_1)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_m &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{0 < |z|=z_1 < 1} \frac{f_m(z)}{z^{N+1}} (1 + p(f_m(z)-1))^n dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{0 < |z|=z_1 < 1} \frac{f_m(z)}{z} \exp(N\omega(z)) dz, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\omega(z) = \beta \ln(1 + p(f_m(z)-1)) - \ln z, \quad \beta = nN^{-1}, \quad (19)$$

величина β и функция $\omega(z)$ здесь имеют иной смысл, нежели в (9), (11).

Теорема 5. Пусть $s-1$ имеет биномиальное распределение с параметрами n, p и $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$0 < \beta_0 \leq \beta = nN^{-1} \leq \beta_1 < +\infty, \quad \beta_0, \beta_1 = \text{const}. \quad (20)$$

Тогда равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_m &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N(z_1 f_m''(z_1)(f_m'(z_1))^{-1} + 1 - \beta^{-1})}} z_1^{-N} f_m(z_1) \times \\ &\times (1 + p(f_m(z_1)-1))^n (1 + O(N^{-1})), \quad m=1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

где z_1 — единственный принадлежащий интервалу $(0, 1)$ корень уравнения

$$\beta z f_m'(z) - f_m(z) = p^{-1} - 1. \quad (22)$$

Замечание 3. При $\beta \rightarrow +\infty$

$$z_1 = z_1(\beta) \rightarrow 0.$$

Следствие 2. При условиях теоремы 5

$$\mathbf{E}\eta_m = (1 - z_1)^{-1} \mathbf{E}\xi_m (1 + O(N^{-1})), \quad m=1, 2, \dots$$

Следствие 3. При условиях теоремы 5 и $m=1$

$$\mathbf{E}\xi_1 = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi N(1-z_1)((1+\beta)z_1 + \beta - 1)}} z_1^{-N} \left(1 + \frac{pz_1}{1-z_1}\right)^n (1 + O(N^{-1})),$$

где

$$z_1 = \frac{2 - (1 - \beta)p - \sqrt{(1 - \beta)^2 p^2 + 4\beta p}}{2(1 - p)} \in (0, 1),$$

$$\mathbf{E}\eta_1 = \frac{2(1 - p)}{\sqrt{(1 - \beta)^2 p^2 + 4\beta p} - (1 + \beta)p} \mathbf{E}\xi_1 (1 + o(N^{-1})).$$

Теорема 6. Пусть $s-1$ имеет биномиальное распределение с параметрами n, p и $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N = o(\sqrt{n})$. Тогда

$$\mathbf{E}\xi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \left(\frac{npe}{N} \right)^N (1 + o(1)),$$

$$\mathbf{E}\eta_m = \mathbf{E}\xi_m (1 + o(1)), \quad m = 1, 2, \dots$$

Теорема 7. Пусть $s-1$ имеет биномиальное распределение с параметрами n, p и $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n = o(N^{2/3})$. Тогда при $m = 1$

$$\mathbf{E}\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left(\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \frac{n^2}{N} + n \right) \left(\frac{pN}{n} \right)^n (1 + o(1)),$$

$$\mathbf{E}\eta_1 = \frac{N}{n} \mathbf{E}\xi_1 (1 + o(1)).$$

Теорема 8. Пусть $s-1$ имеет биномиальное распределение с параметрами n, p и $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n = o(N^{1/3})$. Тогда

$$\mathbf{E}\xi_2 = \frac{p^n}{2\sqrt{2N}} \left(\frac{\pi e N}{2n} \right)^{\frac{n}{2}} (1 + o(1)),$$

$$\mathbf{E}\eta_2 = \frac{2N}{n} \mathbf{E}\xi_2 (1 + o(1)).$$

Для оценки дисперсии $\mathbf{D}\xi_m$ следует найти асимптотику второго момента $\mathbf{E}\xi_m^2$. Во избежание громоздких выкладок ограничимся случаем $m = 1$. В этом случае уравнение (1) при фиксированном значении $s \in \mathbb{N}$ имеет $\binom{N+s-1}{s-1}$ решений. Если s — случайная величина, имеющая распределение вида (5), то

$$\mathbf{E}\xi_1^2 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (C_{N+k}^k)^2. \quad (23)$$

Для сходимости ряда (23) достаточно, чтобы $R > 1$. Известно [7, с. 73], что

$$(C_{N+k}^k)^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z|=z^*>0} \oint_{|u|=u^*>0} \frac{(1+z)^{N+k} (1+uz)^{N+k}}{z^{N+k+1} u^{k+1}} dz du, \quad N, k = 0, 1, \dots$$

Поэтому согласно (23) при $R > 1$

$$\mathbf{E} \xi_1^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z|=z^*>0} \oint_{|u|=u^*>0} \frac{(1+z^{-1})^N (1+uz)^N}{zu} P\left(1+z+\frac{1}{u}+\frac{1}{uz}\right) dz du, \quad (24)$$

где

$$\left| \frac{(1+z)(1+uz)}{zu} \right| < R,$$

или, что то же самое,

$$|(1+z)(1+uz)| < R|zu| = Rz^* u^*,$$

для чего, в свою очередь, достаточно, чтобы при $R > 1$

$$0 < z^* < R-1 \quad \text{и} \quad u^* > \frac{1+z^*}{z^*(R-1-z^*)}.$$

В случае, когда $R = +\infty$, в соотношении (24) можно интегрировать по произвольным окружностям $|z| = z^* > 0$; $|u| = u^* > 0$, пробегаемым в положительном направлении. Это соотношение можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{E} \xi_1^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z|=z^*>0} \oint_{|u|=u^*>0} \frac{(u+uz+u^2z+u^2z^2)^N}{z^{N+1} u^{N+1}} P((1+z^{-1})(z+u^{-1})) dz du. \quad (25)$$

Теорема 9. При условиях теоремы 1 и $m=1$ равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$\mathbf{E} \xi_1^2 = \frac{(1+\beta^{-1/4})^{2N}}{2\pi N \sqrt{\Delta}} \exp(\lambda(\sqrt{\beta} + 2\beta^{1/4}))(1+O(N^{-1})), \quad (26)$$

где

$$\Delta = \sqrt{\beta} \cdot (1+\beta^{1/4})^{-4} + \frac{2}{\sqrt{\beta}} (1+\beta^{1/4})^{-1} + \beta^{-3/2} (1+2\beta^{1/4}) > 0.$$

Теорема 10. При условиях теоремы 5 и $m=1$ равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$E\xi_1^2 = \frac{1}{2\pi N\sqrt{\Delta}} \left(1 + \frac{1}{z^*}\right)^{2N} (1 + pz^*(z^* + 2))^n \left(1 + O(N^{-1})\right), \quad (27)$$

где z^* — единственный положительный корень уравнения

$$\beta z^3 + (2\beta - 1)z^2 + (\beta - 2)z - p^{-1} = 0,$$

$$\Delta = (a + b) \left(a + b + \frac{2(1-p)b^2}{\beta p} \right) > 0,$$

$$a = z^* (1 + z^*)^{-2}, \quad b = \frac{\beta p z^*}{1 + p z^* (z^* + 2)}.$$

Замечание 4. Оценки (26), (27) имеют довольно высокую точность. Так, например, если положить $p = 1/2$ в теореме 10, то из точной формулы

$$E\xi_1^2 = 2^{-n} \sum_{k=0}^n C_n^k \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{N}{j}\right)^2$$

при $n=10$, $N=1000$, $\beta = nN^{-1} = 0.01$ следует, что $E\xi_1^2 = 8.2833 \dots \cdot 10^{43}$. При таких же условиях оценка (27) дает значение $8.4225 \dots \cdot 10^{43}$ с относительной погрешностью порядка 0,0168....

Доказательство теоремы 1. Если справедливо соотношение (13), то согласно (11)

$$\omega'(z) = f'_m(z) - \beta z^{-1} = 0.$$

Если $q_m(z) = z f'_m(z)$ при $|z| < 1$, то $q_m(0) = 0$; $\lim_{z \rightarrow 1} q_m(z) = +\infty$ и функция $q_m(z)$ строго возрастает и непрерывна на полуинтервале $[0, 1)$, поскольку при $z \in [0, 1)$

$$q'_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2m} z^{n^m-1} > 0.$$

Таким образом, уравнение (13) при любом $\beta > 0$ имеет единственный корень $z = z_0 \in (0, 1)$.

Далее получаем

$$\omega''(z_0) = f''_m(z_0) + \frac{\beta}{z_0^2} > 0,$$

и если $|z| = z_0$ и $z \neq z_0$, то $\operatorname{Re} \omega(z_0) > \operatorname{Re} \omega(z)$.

Следовательно, на окружности $|z| = z_0$ точка $z = z_0$ имеет наибольшую высоту, причем эта точка является точкой перевала первого порядка функции ω . Используя (8)–(10) и применяя стандартную технику метода перевала, из этих замечаний выводим оценку (12). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Используем оценку (12), имея в виду, что при условиях теоремы 2 эта оценка остается справедливой с заменой остаточного члена $O(\lambda^{-1})$ на $o(1)$. Если $\lambda = o(N^{1/3})$, то при $\beta = N\lambda^{-1} \rightarrow \infty$ имеем $\lambda = o(\sqrt{\beta})$, так что

$$\exp\left(\frac{\lambda}{2}(\sqrt{1+4\beta}-1)\right) = \exp\left(\lambda\sqrt{\beta} - \frac{\lambda}{2}\right)(1+o(1)) = \exp\left(\sqrt{\lambda N} - \frac{\lambda}{2}\right)(1+o(1)).$$

Кроме того, согласно (13) $z_0 \rightarrow 1$ — при $\beta \rightarrow \infty$, и с учетом замечания 1

$$\ln z_0 = -\frac{1}{\sqrt{\beta}} + O(\beta^{-3/2}),$$

поэтому

$$z_0^{-N} = \exp(\sqrt{\lambda N})(1+o(1)).$$

Подставляя эти оценки в асимптотическую формулу для $E\xi_1$, выписанную в замечании 1, после элементарных преобразований получаем нужный результат. Поскольку при условиях теоремы 2

$$(1-z_0)^{-1} = \sqrt{\beta}(1+o(1)),$$

с учетом (15) при $m=1$ получаем оценку $E\eta_1$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Положим при $|z| < 1$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-z}}.$$

Известно [4, гл. IV], что

$$\lim_{z \rightarrow 1} (f_2(z) - g_2(z)) = \frac{1}{2}.$$

Пусть при условии $\operatorname{Re} t > 0$

$$\varphi(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi \cdot n^2 t).$$

Если положить $z = \exp(-\pi t)$, то $|z| < 1$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} t > 0$. Кроме того,

$$\varphi(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2} = 2f_2(z) - 1. \quad (28)$$

Известно также [8, с. 39], что согласно соотношению для тета-функции

$$\varphi\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t} \varphi(t).$$

Из равенства $z = \exp(-\pi t)$ следует, что $t = -\frac{\ln z}{\pi}$. С учетом (28) получаем

$$f_2(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{-\frac{\pi}{\ln z}} \right) + \sqrt{-\frac{\pi}{\ln z}} f_2\left(e^{\pi^2/\ln z}\right). \quad (29)$$

При $z \rightarrow 1$

$$-\frac{\pi}{\ln z} = \frac{\pi}{1-z} - \frac{\pi}{2} + O(1-z),$$

так что

$$\sqrt{-\frac{\pi}{\ln z}} = \sqrt{\frac{\pi}{1-z}} \left(1 - \frac{1-z}{4} + O((1-z)^2) \right).$$

Подставляя эти оценки в (29), после элементарных преобразований приходим к равенству: при $z \rightarrow 1-$

$$f_2(z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-z}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\pi(1-z)} + O\left((1-z)^{\frac{3}{2}}\right) \quad (30)$$

(при этом остаточный член вида $O\left(e^{\pi^2/\ln z}\right)$ можно опустить).

Из уравнения (13) при $m = 2$ следует, что при условиях теоремы 3

$$z_0 f_2'(z_0) = \beta = N \lambda^{-1} \rightarrow \infty,$$

так что $z_0 = z_0(\beta) \rightarrow 1-$, и поэтому $f_2'(z_0) \sim \beta$. В [4; гл. IV] показано, что при $z \rightarrow 1-$

$$f_2'(z) \sim g_2'(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (1-z)^{-3/2}.$$

Следовательно,

$$1 - z_0 \sim \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \beta^{-2/3}.$$

Таким образом,

$$N(1 - z_0)^2 = O(N\beta^{-4/3}) = o(1),$$

если $\lambda = o(N^{1/4})$. Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} \ln(z_0^{-N}) &= -N \ln(1 - (1 - z_0)) = N(1 - z_0) + O(N(1 - z_0)^2) = \\ &= N(1 - z_0) + o(1), \end{aligned}$$

то есть

$$z_0^{-N} = \exp(N(1 - z_0))(1 + o(1)). \quad (31)$$

Далее получаем

$$f_2'(z_0) = \frac{\beta}{z_0} = \beta(2 - z_0) + O(\beta(1 - z_0)^2) = \beta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \beta^{1/3} + o(\beta^{1/3}).$$

Из результатов, изложенных в [4, гл. IV], следует, что при $z_0 = e^{-\pi t_0} \rightarrow 1 -$ (или, что эквивалентно, при $t_0 \rightarrow 0 +$)

$$\begin{aligned} z_0 f_2'(z_0) &= \frac{\varphi(t_0)}{4\pi t_0} + O(t_0^{-5/2} e^{-\pi/t_0}) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} (1 - z_0)^{-3/2} - \frac{3\sqrt{\pi}}{16} (1 - z_0)^{-1/2} + O((1 - z_0)^{1/2}) = \beta; \end{aligned}$$

при этом используются оценки

$$-\ln z_0 = (1 - z_0) \left(1 + \frac{1}{2}(1 - z_0) + O((1 - z_0)^2) \right),$$

$$t_0 = -\frac{\ln z_0}{\pi} \sim \frac{1 - z_0}{\pi}.$$

Из полученных оценок нетрудно получить, что

$$1 - z_0 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \cdot \beta^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{4}} \cdot \beta^{-\frac{4}{3}} + o\left(\beta^{-\frac{4}{3}}\right),$$

то есть

$$N(1-z_0) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi N \lambda^2}{2}} + O(N \beta^{-4/3}) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi N \lambda^2}{2}} + o(1),$$

поскольку из условия $\lambda = o(N^{1/4})$ следует, что $N \beta^{-4/3} = o(1)$.

С учетом (31) имеем

$$z_0^{-N} = \exp\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi N \lambda^2}{2}}\right) (1 + o(1)). \quad (32)$$

В [4, гл. IV] показано также, что

$$f_2''(z_0) \sim \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (1-z_0)^{-5/2},$$

и так как

$$1-z_0 \sim \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \beta^{-2/3},$$

то

$$(1-z_0)^{-5/2} \sim C \beta^{5/3}, \text{ где } C = 2^{5/3} \cdot \pi^{-5/6}.$$

Используя эти оценки, а также соотношение

$$f_2(z_0) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-z_0}},$$

получаем, что

$$\frac{f_2(z_0)}{\sqrt{2\pi\lambda(z_0^2 f_2''(z_0) + \beta)}} \sim \frac{1}{2^{1/6} \sqrt{3N}}. \quad (33)$$

Если $\lambda = o(N^{1/4})$, то с учетом (30)

$$\exp(\lambda(f_2(z_0) - 1)) = \exp\left(\frac{\lambda}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{1-z_0}} - 1\right)\right) (1 + o(1)),$$

причем

$$\frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-z_0}} = \sqrt[3]{\frac{\pi N \lambda^2}{2}} + o(1),$$

и поэтому

$$\exp(\lambda(f_2(z_0) - 1)) = \exp\left(\sqrt[3]{\frac{\pi N \lambda^2}{2}} - \frac{\lambda}{2}\right)(1 + o(1)). \quad (34)$$

Так как при условиях теоремы 3 оценка (12) остается справедливой с заменой остаточного члена $O(\lambda^{-1})$ на $o(1)$, то из соотношений (12) (при $m = 2$), (32)–(34) следует (16). Формула (17) следует из (15) (при $m = 2$), а также из соотношения

$$(1 - z_0)^{-1} \sim 2\sqrt[3]{\frac{2\beta^2}{\pi}}.$$

Тем самым теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. При условиях теоремы 4 $\beta = N \cdot \lambda^{-1} \rightarrow 0$, так что уравнение (13) имеет такой единственный корень $z = z_0 \in (0, 1)$, что

$$z_0 f'_m(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^m z_0^{n^m} = z_0 + O(z_0^{2^m}) = \beta,$$

и поэтому

$$z_0 = \beta(1 + O(\beta^{2^m-1})).$$

Следовательно,

$$\lambda(f_m(z_0) - 1) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z_0^{n^m} = N + O(\lambda \beta^{2^m}) = N + o(1),$$

если

$$N = o(\lambda^{1-2^{-m}}).$$

При таком условии

$$\exp(\lambda(f_m(z_0) - 1)) = e^N (1 + o(1)),$$

$$z_0^{-N} = \exp(-N \ln z_0) = \exp\left(-N \ln \beta + O(N \beta^{2^m-1})\right) = \left(\frac{\lambda}{N}\right)^N (1 + o(1)).$$

Далее имеем

$$f_m(z_0) = 1 + o(1), \quad z_0^2 f_m''(z_0) \sim 2^m (2^m - 1) \beta^{2^m} = o(\beta),$$

поскольку $2^m \geq 2$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\frac{f_m(z_0)}{\sqrt{2\pi\lambda(z_0^2 f_m''(z_0) + \beta)}} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi N}}.$$

Из этих оценок и соотношения (12) получаем асимптотическую формулу для $\mathbf{E}\xi_m$, приведенную в формулировке теоремы 4. Так как $z_0 = o(1)$, то $(1 - z_0)^{-1} = 1 + o(1)$, и поэтому с учетом (15)

$$\mathbf{E}\eta_m = \mathbf{E}\xi_m (1 + o(1)).$$

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Доказательство оценки (21) проводится аналогично обоснованию оценки (12) (вместо равенств (10), (11) следует воспользоваться соотношениями (18), (19) и учесть, что уравнение $\omega'(z) = 0$ имеет единственный корень $z = z_1 \in (0, 1)$ и равносильно уравнению (22)). Тем самым теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Имеем $\beta = nN^{-1} \rightarrow \infty$, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N = o(\sqrt{n})$. Согласно замечанию 3 отсюда следует, что $z_1 = z_1(\beta) = o(1)$, и поэтому

$$f_m(z_1) - 1 \sim z_1,$$

так что

$$\beta z_1 f_m'(z_1) = \beta \left(z_1 + O(z_1^{2^m}) \right) \sim \beta z_1.$$

Согласно (22) имеем $\beta z_1 \sim p^{-1}$, то есть

$$z_1 = \frac{1}{\beta p} (1 + o(1)).$$

Если положить

$$z_1 = \frac{1}{\beta p} (1 + \varepsilon(\beta)),$$

то $\varepsilon(\beta) \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow \infty$.

Далее,

$$\beta z_1 f_m'(z_1) - f_m(z_1) + 1 = (\beta - 1)z_1 + (\beta 2^m - 1)z_1^{2^m} + O(\beta^{-3^m+1}) = p^{-1},$$

и отсюда нетрудно получить, что

$$\varepsilon(\beta) = O(\beta^{-1}), \quad z_1 = \frac{1}{\beta p} (1 + O(\beta^{-1})).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} n \ln(1 + p(f_m(z_1) - 1)) &= np(f_m(z_1) - 1) + O(n\beta^{-2}) = \\ &= n\beta^{-1} + O(n\beta^{-2}) = n\beta^{-1} + o(1), \end{aligned}$$

если $N = o(\sqrt{n})$. Значит,

$$(1 + p(f_m(z_1) - 1))^n = e^N (1 + o(1)).$$

Кроме того,

$$-N \ln z_1 = N \ln(\beta p) + O\left(\frac{N^2}{n}\right) = N \ln(\beta p) + o(1),$$

так что

$$\begin{aligned} z_1^{-N} &= \left(\frac{np}{N}\right)^N (1 + o(1)), \\ z_1 f_m''(z_1) (f_m'(z_1))^{-1} &\sim \frac{2^m (2^m - 1)}{(\beta p)^{2^m - 1}} = o(1), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

С учетом этих оценок получаем асимптотическую формулу для $\mathbf{E}\xi_m$, приведенную в формулировке теоремы 6. Так как $z_1 = o(1)$, то $\mathbf{E}\eta_m \sim (1 - z_1)^{-1} \mathbf{E}\xi_m \sim \mathbf{E}\xi_m$. Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. При сформулированных условиях $\beta = nN^{-1} = o(N^{-1/3}) \rightarrow 0$, причем утверждение теоремы 5 остается справедливым с заменой в (21) остаточного члена $O(N^{-1})$ на $o(1)$. При $m = 1$ с учетом следствия 3 после элементарных преобразований получаем оценку $\mathbf{E}\xi_1$, приведенную в формулировке теоремы 7. Так как $(1 - z_1)^{-1} \sim \beta^{-1} = \frac{N}{n}$, то $\mathbf{E}\eta_1 \sim \frac{N}{n} \mathbf{E}\xi_1$. Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Имеем $\beta = nN^{-1} = o(N^{-2/3}) \rightarrow 0$, причем при $m = 2$ утверждение теоремы 5 также остается справедливым (с заменой в (21) остаточного члена $O(N^{-1})$ на $o(1)$). Используя оценки, полученные при доказательстве теоремы 3, и замечая, что $z_1 \rightarrow 1$, выводим соотношения:

$$f_2(z_1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-z_1}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \sqrt{\pi(1-z_1)} + O((1-z_1)^{3/2}),$$

$$\beta z_1 f_2'(z_1) = \frac{\beta \sqrt{\pi}}{4} (1-z_1)^{-3/2} - \frac{3\beta \sqrt{\pi}}{16} (1-z_1)^{-1/2} + O(\beta \sqrt{1-z_1}).$$

С учетом (22) отсюда следует, что $1-z_1 \sim \frac{\beta}{2}$, и поэтому

$$N(1-z_1)^2 \sim \frac{n^2}{4N} = o(1),$$

так что

$$z_1^{-N} = \exp(N(1-z_1))(1+o(1)).$$

Полагая $1-z_1 = \frac{\beta}{2} + \psi(\beta)$, имеем $\psi(\beta) = o(\beta)$ при $\beta \rightarrow 0$. Подставляя значение $1-z_1$ в приведенные выше оценки и используя (22), нетрудно вывести, что

$$\psi(\beta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \beta^{3/2} + o(\beta^{3/2}).$$

Далее получаем

$$N(1-z_1) = \frac{N\beta}{2} + O(N\beta^{3/2}) = \frac{n}{2} + o(1), \text{ если } n = o(N^{1/3}).$$

Таким образом,

$$z_1^{-N} = e^{n/2} (1+o(1)).$$

Кроме того,

$$f_2(z_1) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-z_1)^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} = \sqrt{\frac{\pi N}{2n}},$$

$$\begin{aligned} (1 + p(f_2(z_1) - 1))^n &= \exp \left(n \ln(pf_2(z_1)) + O\left(\frac{n}{f_2(z_1)}\right) \right) = \\ &= \exp(n(\ln p + \ln f_2(z_1))) \left(1 + O\left(\sqrt{\frac{n^3}{N}}\right) \right) = p^n \exp(n \ln f_2(z_1))(1 + o(1)), \end{aligned}$$

и так как

$$f_2(z_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - z_1)^{-1/2} (1 + O(\sqrt{\beta})),$$

то

$$\begin{aligned} (1 + p(f_2(z_1) - 1))^n &= p^n \exp \left(n \ln \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - z_1)^{-1/2} \right) + O(n\sqrt{\beta}) \right) = \\ &= \left(\frac{p\sqrt{\pi}}{2} \right)^n \exp \left(-\frac{n}{2} \ln \left(\frac{\beta}{2} \right) + O(n\sqrt{\beta}) \right) = \left(\frac{p\sqrt{\pi}}{2} \right)^n \left(\frac{2}{\beta} \right)^{n/2} (1 + o(1)) = \\ &= \left(p \sqrt{\frac{\pi N}{2n}} \right)^n (1 + o(1)), \end{aligned}$$

поскольку

$$\ln(1 - z_1) = \ln \left(\frac{\beta}{2} \right) + O(\sqrt{\beta}).$$

Наконец,

$$f_2''(z_1) \sim \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (1 - z_1)^{-5/2} \sim 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta^{-5/2},$$

так что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi N \left(z_1 f_2''(z_1) (f_2'(z_1))^{-1} + 1 - \beta^{-1} \right)}} = \frac{1}{2N} \sqrt{\frac{n}{\pi}} (1 + o(1)).$$

Из полученных оценок и (21) при $m = 2$ получаем асимптотическую формулу для $E\xi_2$, приведенную в формулировке теоремы 8. Так как

$$(1 - z_1)^{-1} \sim \frac{2}{\beta} = \frac{2N}{n},$$

то

$$E\eta_2 \sim \frac{2N}{n} E\xi_2.$$

Теорема 8 доказана.

Доказательство теоремы 9. Для обоснования оценки (26) используем соотношение (25), полагая в нём согласно (24)

$$P\left((1 + z^{-1})(z + u^{-1})\right) = \exp\left(\lambda(z + u^{-1} + z^{-1}u^{-1})\right).$$

Если обозначить

$$f(z, u) = u(1 + z)(1 + uz) \exp\left(\beta^{-1}(z + u^{-1} + z^{-1}u^{-1})\right), \quad (35)$$

то с учетом (9), (25) имеем

$$E\xi_1^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z|=z^*>0} \oint_{|u|=u^*>0} \frac{(f(z, u))^N}{z^{N+1}u^{N+1}} dz du. \quad (36)$$

Для нахождения точек перевала подынтегральной функции в (36) составим систему уравнений

$$\begin{cases} z \frac{\partial f}{\partial z}(z, u) = f(z, u), \\ u \frac{\partial f}{\partial u}(z, u) = f(z, u). \end{cases}$$

Подставляя значение $f(z, u)$ из (35) и вычисляя частные производные $\frac{\partial f}{\partial z}(z, u)$ и $\frac{\partial f}{\partial u}(z, u)$ после элементарных преобразований, получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases} (uz^2 - 1)(1 + u \cdot z) = 0, \\ \beta z^2 u^3 = 1. \end{cases}$$

При условии $u > 0; z > 0$ решение этой системы имеет вид

$$z = z^* = \sqrt[4]{\beta} > 0, \quad u = u^* = \frac{1}{\sqrt{\beta}} > 0. \quad (37)$$

Из (35), (37) выводим, что

$$f(z^*, u^*) = (\beta^{-1/8} + \beta^{-3/8})^2 \exp(2\beta^{-3/4} + \beta^{-1/2}). \quad (38)$$

Применяя метод перевала к оценке интеграла в (36), получаем

$$\mathbf{E} \xi_1^2 = \frac{(f(z^*, u^*))^N}{2\pi N (z^*)^N (u^*)^N \sqrt{\Delta}} (1 + O(N^{-1})), \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(\Delta_{i,j}) (1 \leq i, j \leq 2), \\ \Delta_{11} &= z \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial(\ln f)}{\partial z} \right) \Big|_{\substack{z=z^* \\ u=u^*}} = \frac{2}{2 + z^* + z^* u^*} + 2\beta^{-1} z^*, \\ \Delta_{22} &= u \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial(\ln f)}{\partial u} \right) \Big|_{\substack{z=z^* \\ u=u^*}} = \frac{z^* u^*}{(1 + z^* u^*)^2} + \frac{1 + z^*}{\beta z^* u^*}, \\ \Delta_{12} &= \Delta_{21} = \frac{z^* u^*}{(1 + z^* u^*)^2} + \frac{u^*}{z^*}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений с учетом (37) и равенства

$$\Delta = \Delta_{11} \Delta_{22} - \Delta_{12} \Delta_{21}$$

следует, что величина Δ определяется по формуле, приведенной в формулировке теоремы 9.

Оценка (26) является следствием соотношений (37)–(39). Теорема 9 доказана.

Доказательство теоремы 10 проводится аналогично. Чтобы обосновать оценку (27), используем (25), полагая

$$P((1 + z^{-1})(z + u^{-1})) = (1 + p(z + u^{-1} + z^{-1}u^{-1}))^{\beta \cdot N}.$$

Обозначая

$$g(z, u) = u(1 + z)(1 + uz)(1 + p(z + u^{-1} + z^{-1}u^{-1}))^\beta,$$

из (20), (25) выводим, что

$$\mathbf{E} \xi_1^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z|=z^* > 0} \oint_{|u|=u^* > 0} \frac{(g(z, u))^N}{z^{N+1} u^{N+1}} dz du. \quad (40)$$

Решая аналогичную систему уравнений с заменой функции $f(z, u)$ на $g(z, u)$, получаем, что при условии $u > 0; z > 0$

$$uz^2 = 1,$$

причем $z = z^*$ — единственный положительный корень уравнения, приведенного в формулировке теоремы 10. Таким образом

$$u = u^* = (z^*)^{-2} > 0 \quad (41)$$

(в этих соотношениях величины z^*, u^* имеют, вообще говоря, другие значения по сравнению с теоремой 9).

Кроме того,

$$g(z^*, u^*) = \left(1 + \frac{1}{z^*}\right)^2 (1 + pz^*(z^* + 2))^\beta. \quad (42)$$

Вычисляя определитель Δ согласно приведенным выше формулам с заменой $f(z, u)$ на $g(z, u)$, получаем его выражение в формулировке теоремы 10. Поскольку при наших условиях соотношение (39) остается справедливым (с указанной заменой), с учетом оценок (40)–(42) отсюда следует (27). Теорема 10 доказана.

Список литературы

1. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. — М.: Наука, 1983.
2. Фрейман Г. А. Проблема Варинга с растущим числом слагаемых // Учен. зап. Елабужск. гос. пед. института. — 1958. — Вып. 3. — С. 105–119.
3. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971.
4. Тимашев А. Н. Обобщенная схема размещения в задачах вероятностной комбинаторики. — М.: Издательский дом «Академия», 2011.
5. Колчин В. Ф. Случайные отображения. — М.: Наука, 1984.
6. Тимашев А. Н. Асимптотические разложения в вероятностной комбинаторике. — М.: ТВП, 2011.
7. Тимашев А. Н. Большие отклонения в вероятностной комбинаторике. — М.: Издательский дом «Академия», 2011.
8. Чандрасекхаран К. Арифметические функции. — М.: Наука, 1975.