Общероссийский математический портал

А. А. Серов, Оценки объемов окрестностей двоичных кодов в терминах их весовых спектров, *Матем. вопр. криптогр.*, 2013, том 4, выпуск 2, 17–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:45:15

УДК: 519.724

Оценки объемов окрестностей двоичных кодов в терминах их весовых спектров

А. А. Серов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Получено 20.IV.2012

В работе получены двусторонние оценки числа элементов, принадлежащих r -окрестности кода, в терминах спектра расстояний между кодовыми словами. Оценки конкретизированы для кодов Рида–Мюллера первого и второго порядков. Кроме того, приводится обзор кодов, для которых спектр расстояний известен, и отмечены некоторые приложения теории кодов к криптографии.

Ключевые слова: двоичные коды, объемы окрестностей, коды Рида–Мюллера, спектр расстояний, формула включения-исключения

Estimates of the neighborhood volumes of binary codes via their weight spectra

A. A. Serov

Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow

Abstract. We obtain two-sided estimates for the number of elements in the r -neighborhood of a code via the spectrum of distances between codewords. For the first and second order Reed–Muller codes the estimates are more explicit. A short review of codes with known distance spectrum is given and some applications of the coding theory to cryptography are discussed.

Key words: binary codes, neighborhood volumes, Reed–Muller codes, distance spectrum, inclusion-exclusion formula

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 2, pp. 17–42 (Russian).

© 2013 А. А. Серов

§ 1. Основные понятия и обозначения

Пусть $X = \{a_0, \dots, a_{q-1}\}$ — конечное q -элементное множество. Множество X^n состоит из всех n -мерных векторов с координатами из множества X . Очевидно, $|X^n| = q^n$. На множестве X^n вводится метрика Хемминга: расстояние $d(x, y)$ между векторами $x, y \in X^n$ считается равным числу позиций, в которых они различаются.

Произвольное подмножество элементов метрического пространства X^n называется кодом C (см., например, [45]), а элементы кода — кодовыми словами. Число n называют длиной кодовых слов и самого кода.

Расстоянием от произвольного $x \in X^n$ до кода C называется величина

$$d(x, C) = \min_{y \in C} d(x, y).$$

Кодовым расстоянием $d = d(C)$ кода C называется минимальное расстояние между двумя различными элементами кода C :

$$d(C) = \min_{a, b \in C: a \neq b} d(a, b).$$

Для удобства задания кода обычно в качестве X рассматривается множество с какой-либо алгебраической структурой, например конечное поле или конечное кольцо.

Если X — конечное поле $\mathbb{F}_q$, $q = p^l$, где p — простое число, то X^n можно рассматривать как n -мерное пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Будем обозначать его через $\mathbb{F}_q^n$.

Если в множестве X есть нулевой элемент 0, то в X^n выделяется нулевой вектор (все координаты которого равны 0), и расстояние от вектора $x \in X^n$ до нулевого вектора называется весом Хемминга (или просто весом) $\text{wt}(x)$ вектора x .

Линейное подпространство пространства $\mathbb{F}_q^n$ называется линейным кодом. Кодовое расстояние линейного кода $C \subset \mathbb{F}_q^n$ равно минимальному весу ненулевого вектора в линейном подпространстве C :

$$d(C) = \min_{a \in C \setminus \{0\}} \text{wt}(a).$$

Через $k = \dim C$ будем обозначать размерность линейного кода $C \subset \mathbb{F}_q^n$. Код длины n размерности k с кодовым расстоянием d будем называть $[n, k, d]$ -кодом.

Пусть $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ — базис пространства $\mathcal{C}$. Матрицу $A = A(\mathcal{C})$ размера $k \times n$, строками которой являются векторы $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$, принято называть *порождающей матрицей* кода $\mathcal{C}$. Любой вектор $x \in \mathcal{C}$ можно представить в виде

$$x = zA,$$

где z — вектор пространства $\mathbb{F}_q^k$.

Линейный код можно задавать также *проверочной матрицей* H размера $(n - k) \times n$ с $n - k$ линейно независимыми строками, т. е. как множество всех таких векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, что $Hx^T = 0$.

Пусть $\mathcal{C}$ — линейный код с порождающей матрицей A и проверочной матрицей H . Код $\mathcal{C}^\perp$ с порождающей матрицей H и проверочной матрицей A называется *дуальным кодом* для $\mathcal{C}$.

Многочлены $A(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i$ и $B(z) = \sum_{i=0}^n B_i z^i$, где A_i и B_i — числа кодовых слов веса i в кодах $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}^\perp$ соответственно, называются *весовыми эnumераторами* кодов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}^\perp$.

Для весовых эnumераторов $A(z)$ и $B(z)$ любого линейного кода $\mathcal{C}$ и дуального кода $\mathcal{C}^\perp$ справедливо *тождество Мак-Вильямса* ([42]):

$$B(z) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} (1+z)^n A\left(\frac{1-z}{1+z}\right).$$

Для нелинейного кода нет естественного определения дуального кода. Однако каждому нелинейному коду соответствует весовой эnumератор $A(z)$. Существуют примеры нелинейных кодов, весовые эnumераторы которых связаны тождеством Мак-Вильямса; такими являются, например, коды Препараты [28] и Кердока [13].

§ 2. Оценки объемов окрестностей двоичных кодов

В этом параграфе рассматриваются двоичные коды $\mathcal{C}$ длины n с минимальным расстоянием d . Теорема 1 относится к двоичным *дистанционно-инвариантным* кодам, т. е. к таким подмножествам $\mathcal{C}$ пространства $\mathbb{F}_2^n$, что для любого $x \in \mathcal{C}$ совокупность расстояний Хемминга $\{\rho(x, y), y \in \mathcal{C}\}$ не зависит от x . Частными случаями дистанционно-инвариантных кодов являются описанные в § 3 коды Рида-Мюллера, а также совершенные коды (см., например, [41, 48]). Теорема 2 относится к произвольным двоичным кодам.

Окрестности кодовых слов можно представлять себе, как в [37], шарами целочисленного радиуса r . Если при $r = a$, $a \in \mathbb{N}$, шары не пересекаются, а при $r = a + 1$ пересекаются, то a называется *радиусом сферической упаковки*

кода. Минимальное значение b радиуса r , при котором каждая точка $\mathbb{F}_2^n$ попадает в b -окрестность хотя бы одного кодового слова, называется *радиусом покрытия* кода.

Нахождение количеств векторов $v \in \mathbb{F}_2^n$, попадающих в r -окрестность кода C

$$\mathbb{F}_2(C, r) = \{v \in \mathbb{F}_2^n : d(v, C) \leq r\},$$

представляет практический интерес. При $r \leq a$ это количество равно произведению числа векторов в шаре радиуса r и числа кодовых слов, при $r \geq b$ оно равно 2^n . В настоящем параграфе для чисел векторов в r -окрестностях кодов при $a < r < b$ с помощью формул включения-исключения получены двусторонние неравенства в терминах весового спектра кода.

Пространство $\mathbb{F}_2^n$ разбивается на слои $\mathbb{F}_2^n(i) = \{x \in \mathbb{F}_2^n : \text{wt}(x) = i\}$:

$$\mathbb{F}_2^n = \bigcup_{i=0}^n \mathbb{F}_2^n(i).$$

Положим

$$N_n^{(2)}(i, r) \stackrel{\text{def}}{=} |\{x \in \mathbb{F}_2^n : \max\{d(x, 0), d(x, c)\} \leq r, \text{wt}(c) = i\}|.$$

Корректность этого определения следует из того, что при любом фиксированном значении i правая часть не зависит от вектора c , $\text{wt}(c) = i$, так как любой вектор веса i можно перевести в любой другой вектор такого же веса перенумерацией координат, а она не изменяет веса векторов и расстояния Хемминга между ними.

Теорема 1. Пусть $C \subset \mathbb{F}_2^n$ — двоичный дистанционно-инвариантный код длины n с минимальным расстоянием d и

$$W_i = \mathbb{F}_2^n(i) \cap C, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

— множества кодовых слов одинакового веса, $\{|W_i|\}_{i=0}^n$ — весовой спектр кода C . Тогда

$$|\mathbb{F}_2(C, r)| = (1 - q(n, r))|C| \sum_{m=0}^r C_n^m,$$

где $q(n, r) = 0$ при $0 \leq r < d/2$ и

$$0 \leq q(n, r) \leq \left(2 \sum_{m=0}^r C_n^m\right)^{-1} \sum_{i=1}^n |W_i| N_n^{(2)}(i, r), \quad d/2 \leq r \leq n.$$

Ряд явных оценок для $\sum_{m=0}^r C_n^m$ и $N_n^{(2)}(i, r)$ приведен ниже в утверждениях 1 и 2.

Теорема 2. Пусть $C \subset \mathbb{F}_2^n$ — двоичный код длины n с минимальным расстоянием d ,

$$W_i^{(2)} = \{(c_1, c_2) : c_1, c_2 \in C, d(c_1, c_2) = i\}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

— множества упорядоченных пар кодовых слов, расстояние между которыми принимает заданное значение, и $\mathbb{F}_2(C, r) = \{x \in \mathbb{F}_2^n : d(x, C) \leq r\}$ — r -окрестность кода C . Тогда

$$|\mathbb{F}_2(C, r)| = (1 - q(n, r))|C| \sum_{m=0}^r C_n^m,$$

где $q(n, r) = 0$ при $0 \leq r < d/2$ и

$$0 \leq q(n, r) \leq \left(2|C| \sum_{m=0}^r C_n^m\right)^{-1} \sum_{i=1}^n |W_i^{(2)}| N_n^{(2)}(i, r), \quad d/2 \leq r \leq n.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{|C|}\}$. Так как

$$\mathbb{F}_2(C, r) = \bigcup_{i=1}^{|C|} \{x \in \mathbb{F}_2^n : d(x, c_i) \leq r\},$$

то согласно формуле включения-исключения [47]

$$\begin{aligned} & \sum_{u=1}^{|C|} |\{x \in \mathbb{F}_2^n : d(x, c_u) \leq r\}| - \\ & - \sum_{1 \leq u < v \leq |C|} |\{x \in \mathbb{F}_2^n : \max\{d(x, c_u), d(x, c_v)\} \leq r\}| \leq \\ & \leq |\mathbb{F}_2(C, r)| \leq \sum_{u=1}^{|C|} |\{x \in \mathbb{F}_2^n : d(x, c_u) \leq r\}|. \end{aligned} \quad (1)$$

Очевидно, при каждом $u \in \{1, 2, \dots, |C|\}$

$$|\{x \in \mathbb{F}_2^n : d(x, c_u) \leq r\}| = \sum_{m=0}^r C_n^m.$$

Число таких слагаемых в (1) равно $|\mathcal{C}|$. Поэтому

$$|\mathbb{F}_2(\mathcal{C}, r)| \leq \sum_{1 \leq u \leq |\mathcal{C}|} |\{x \in \mathbb{F}_2^n : d(x, c_u) \leq r\}| = |\mathcal{C}| \sum_{m=0}^r C_n^m,$$

тем самым доказана оценка сверху.

Для любых кодовых слов $c_u, c_v \in \mathcal{C}$, $u, v \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{C}|\}$, $u \neq v$,

$$\begin{aligned} & |\{x \in \mathbb{F}_2^n : \max\{d(x, c_u), d(x, c_v)\} \leq r\}| = \\ & = |\{x \in \mathbb{F}_2^n : \max\{d(x \oplus c_u, c_u \oplus c_u), d(x \oplus c_u, c_v \oplus c_u)\} \leq r\}|. \end{aligned}$$

Число таких упорядоченных пар (c_u, c_v) кодовых слов кода $\mathcal{C}$, что $d(c_u, c_v) = i$, равно $|\mathcal{C}| \cdot |W_i|$, а неупорядоченных — в два раза меньше. Отсюда следует, что для каждого фиксированного $r \leq n$ вторая сумма в левой части (1) совпадает с

$$\begin{aligned} & \frac{|\mathcal{C}|}{2} \sum_{i=1}^n |W_i| |\{x \in \mathbb{F}_2^n : \max\{d(x, 0), d(x, b)\} \leq r, \text{wt}(b) = i\}| = \\ & = \frac{|\mathcal{C}|}{2} \sum_{i=1}^n |W_i| N_n^{(2)}(i, r). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(1 - q^*(n, r))|\mathcal{C}| \sum_{m=0}^r C_n^m \leq |\mathbb{F}_2(\mathcal{C}, r)| \leq |\mathcal{C}| \sum_{m=0}^r C_n^m,$$

если

$$q^*(n, r) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |W_i| N_n^{(2)}(i, r) / \sum_{m=0}^r C_n^m.$$

□

Доказательство теоремы 2 отличается от доказательства теоремы 1 лишь тем, что для каждого фиксированного $r \leq n$ вторая сумма в левой части (1) совпадает с

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |W_i^{(2)}| \cdot |\{x \in \mathbb{F}_2^n : \max\{d(x, 0), d(x, b)\} \leq r, \text{wt}(b) = i\}| = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |W_i^{(2)}| N_n^{(2)}(i, r). \end{aligned}$$

Тогда согласно формуле (1)

$$|\mathcal{C}| \sum_{m=0}^r C_n^m - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |W_i^{(2)}| N_n^{(2)}(i, r) \leq |\mathbb{F}_2(\mathcal{C}, r)| \leq |\mathcal{C}| \sum_{m=0}^r C_n^m,$$

поэтому при

$$q(n, r) = \left(2|\mathcal{C}| \sum_{m=0}^r C_n^m \right)^{-1} \sum_{i=1}^n |W_i^{(2)}| N_n^{(2)}(i, r)$$

получаем утверждения теоремы 2. $\square$

Утверждение 1. При $r \leq n/2$ справедливы оценки

$$2^n \Phi \left(-\sqrt{nV \left(1 - \frac{2r}{n} \right)} \right) \leq \sum_{m=0}^r C_n^m \leq 2^n \Phi \left(-\sqrt{nV \left(1 - \frac{2(r+1)}{n} \right)} \right), \quad (2)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$ — функция стандартного нормального распределения и при $|z| < 1$

$$V(z) = (1-z) \ln(1-z) + (1+z) \ln(1+z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^{2s}}{s(2s-1)} \geq z^2.$$

Доказательство. Будем обозначать через $X_{n,p}$ случайную величину, имеющую биномиальное распределение с параметрами (n, p) . Неравенство (2) следует из тождеств

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^r C_n^m &= \sum_{m=n-r}^n C_n^m = \\ &= 2^n \mathbf{P}\{X_{n,1/2} \geq n-r\} = 2^n (1 - \mathbf{P}\{X_{n,1/2} \leq n-r-1\}) \end{aligned}$$

и приведенных в [39, 40] переформулировок некоторых результатов статьи [2] о хвостах биномиального распределения.

Стандартные неравенства для хвостов функции нормального распределения можно найти в [47], гл. 7, § 1:

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) < \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) < \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x}, \quad x > 0, \quad (3)$$

а также в справочнике [36], пп. 26.2.24–26.2.25.

Утверждение 2. Если $0 \leq r \leq [n/2]$ и $0 \leq i \leq n$, то

$$N_n^{(2)}(i, r) \leq \begin{cases} C_i^{i/2} C_{n-i}^{r-i/2} \frac{1+q_i}{(1-q_i)^2} \text{ при четном } i; \\ C_i^{[i/2]} C_{n-i}^{r-[i/2]} \frac{2}{(1-q_i)^2} \text{ при нечетном } i, \end{cases}$$

где $q_i = \frac{r-[i/2]}{n-i+[i/2]-r+1} \leq q = \frac{r}{n-r+1}$.

Доказательство. При фиксированном $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_2^n$ сопоставим каждому вектору $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_2^n$ величины

$$\begin{aligned} m_0 &= |\{i \in \{1, \dots, n\} : b_i = 0, a_i = 1\}|, \\ m_1 &= |\{i \in \{1, \dots, n\} : b_i = 1, a_i = 1\}|. \end{aligned}$$

Число векторов $a \in \mathbb{F}_2^n$ с фиксированными значениями m_0 и m_1 равно, очевидно, $C_{n-\text{wt}(b)}^{m_0} C_{\text{wt}(b)}^{m_1}$. Далее,

$$d(a, 0) = m_0 + m_1 \quad \text{и} \quad d(a, b) = m_0 + \text{wt}(b) - m_1,$$

т. е. при $\text{wt}(b)/2 \leq r < n$ условия $\{d(a, 0) \leq r, d(a, b) \leq r\}$ эквивалентны условиям

$$\begin{cases} 0 \leq m_0 \leq n - \text{wt}(b), \\ 0 \leq m_1 \leq \text{wt}(b), \\ m_0 + m_1 \leq r, \\ m_0 + \text{wt}(b) - m_1 \leq r, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m_0 \leq r - \text{wt}(b)/2, \\ 0 \leq m_1 \leq \text{wt}(b), \\ \text{wt}(b) - (r - m_0) \leq m_1 \leq r - m_0. \end{cases}$$

Значит,

$$\begin{aligned} N_n^{(2)}(\text{wt}(b), r) &= |\{a \in \mathbb{F}_2^n : \max\{d(a, 0), d(a, b)\} \leq r\}| = \\ &= \sum_{m_0=0}^{r-\text{wt}(b)/2} \sum_{m_1=\max\{\text{wt}(b)-(r-m_0), 0\}}^{\min\{r-m_0, \text{wt}(b)\}} C_{n-\text{wt}(b)}^{m_0} C_{\text{wt}(b)}^{m_1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы получить верхнюю оценку для $N_n^{(2)}(i, r)$, заменим все слагаемые во внутренней сумме (4) их максимальным значением $C_i^{[i/2]}$, положим $q_i = \frac{C_{n-i}^{r-[i/2]-1}}{C_{n-i}^{r-[i/2]}} = \frac{r-[i/2]}{n-i+[i/2]-r+1}$ и используем оценки $C_{n-i}^{r-[i/2]-m} \leq q_i^m C_{n-i}^{r-[i/2]}$.

Если i четное, то

$$\begin{aligned} N_n^{(2)}(i, r) &= \sum_{m_0=0}^{r-i/2} \sum_{m_1=\max\{i-(r-m_0), 0\}}^{\min\{r-m_0, i\}} C_{n-i}^{m_0} C_i^{m_1} < \\ &< C_i^{i/2} \sum_{m=0}^{r-i/2} C_{n-i}^{r-i/2-m} (1+2m) < C_i^{i/2} C_{n-i}^{r-i/2} \sum_{m=0}^{\infty} q_i^m (1+2m) = \\ &= C_i^{i/2} C_{n-i}^{r-i/2} \frac{1+q_i}{(1-q_i)^2}. \end{aligned}$$

Если i нечетное, то

$$\begin{aligned} N_n^{(2)}(i, r) &= \sum_{m_0=0}^{r-[i/2]} \sum_{m_1=\max\{i-(r-m_0), 0\}}^{\min\{r-m_0, i\}} C_{n-i}^{m_0} C_i^{m_1} < \\ &< 2 \cdot C_i^{[i/2]} \sum_{m=0}^{r-[i/2]} C_{n-i}^{r-[i/2]-m} (m+1) < \\ &< 2 \cdot C_i^{[i/2]} C_{n-i}^{r-[i/2]} \sum_{m=0}^{\infty} q_i^m (m+1) = \frac{2 \cdot C_i^{[i/2]} C_{n-i}^{r-[i/2]}}{(1-q_i)^2}. \end{aligned}$$

Неравенство $q_i < q$ следует из того, что

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{r - [i/2]}{n - i + [i/2] - r + 1} = 1 - \frac{n - 2r + 1}{n - i + [i/2] - r + 1} \leq \\ &\leq 1 - \frac{n - 2r + 1}{n - r + 1} = \frac{r}{n - r + 1} = q. \end{aligned}$$

Утверждение 2 доказано. $\square$

§ 3. Коды с известными весовыми спектрами

Коды Рида–Мюллера

Подпространство пространства $\mathbb{F}_2^{2^m}$, образованное векторами значений многочленов Жегалкина от m переменных степени не выше s , называется двоичным кодом Рида–Мюллера длины $N = 2^m$ и порядка s ; для таких кодов используется обозначение $RM(s, m)$.

В частности, кодовые слова кода Рида–Мюллера первого порядка $RM(1, m)$ можно отождествить с табличными заданиями всех аффинных булевых функций от m булевых переменных. Так как расстояния Хемминга

между любыми двумя аффинными булевыми функциями от m переменных равны либо 2^{m-1} , либо 2^m , то для кода $RM(1, m)$ величины $|W_i|$ отличны от 0 только в трех случаях: $|W_0| = |W_{2^m}| = 1$, $|W_{2^{m-1}}| = 2^{m+1} - 2$. Приведенная в следующей теореме оценка для r -окрестности кода $RM(1, m)$ в терминах окрестностей булевых функций доказана в [39] и является следствием теоремы 1 настоящей работы.

Теорема 3. Если $m \geq 2$, то

$$|\mathbb{F}_2(RM(1, m), r)| = (1 - Q(m, r))2^{m+1} \sum_{i=0}^r C_{2^m}^i,$$

где

$$\begin{aligned} 0 \leq Q(m, r) &< \frac{2^m N_{2^m}^{(2)}(2^{m-1}, r)}{\sum_{i=0}^r C_{2^m}^i} \leq \\ &\leq \frac{2^m C_{2^{m-1}}^{2^{m-2}} C_{2^{m-1}}^{r-2^{m-2}}}{C_{2^{m-1}}^{r-1}} \frac{(2^{m-1} + 1)(3 \cdot 2^{m-2} - r + 1)}{(2^m - 2r + 1)^2}, \end{aligned}$$

в частности, $Q(m, r) = 0$ при $0 \leq r < 2^{m-2}$ и

$$0 < Q(m, r) < \frac{1}{15} 2^{-(c_r^2 - \frac{3}{2})m} \exp \left\{ \frac{2(c_r^2 m)^{3/2}}{2^{m/2}} \right\}$$

при $m \geq 8$, $r = 2^{m-1} - c_r \sqrt{2^{m-1} m \ln 2} \geq 0$, $c_r > 1$.

Аналогичная теорема справедлива для кода Рида–Мюллера второго порядка $RM(2, m)$. Спектр расстояний этого кода имеет более сложный вид (см., например, [42], § 15.2, с. 426):

$$|W_i| = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0 \text{ или } i = 2^m, \\ \frac{2^{s(s+1)}(2^m-1)(2^{m-1}-1)\dots(2^{m-2s+1}-1)}{(2^{2s}-1)(2^{2s-2}-1)\dots(2^2-1)}, & |i - 2^{m-1}| = 2^{m-s-1}, 1 \leq s \leq \frac{m}{2}, \\ 2^{C_m^2 + m+1} - \sum_{i \neq 2^{m-1}} |W_i|, & \text{если } i = 2^{m-1}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следующая теорема (в терминах окрестностей множества булевых функций степени не выше 2) доказана в [43]; см. также [44]. Ввиду громоздкости формул оценки величины $Q(m, r)$ в терминах комбинаторных сумм (как в теореме 3) не приводятся.

Теорема 4. Если $m \geq 3$, то

$$|\mathbb{F}_2(\text{RM}(2, m), r)| = (1 - Q(m, r))2^{\binom{m}{2}+m+1} \sum_{i=0}^r C_{2^m}^i,$$

где $Q(m, r) = 0$ при $0 \leq r < 2^{m-3}$,

$$0 < Q(m, r) < \frac{2^{-m^2(c_r^2-3)/6+m+1}}{m^2} \exp \left\{ \frac{(c_r m)^3}{7 \cdot 2^{m/2}} \right\}$$

при $m \geq 15$ и $r = 2^{m-1} - c_r m \sqrt{2^{m-2} \ln 2} \geq 0$, $c_r > 1$.

MDS-коды

Пусть C — $[n, k, d]$ -код над $GF(q)$ с проверочной матрицей $\mathbf{H}$ и порождающей матрицей $\mathbf{G}$. Для полноты изложения сформулируем и докажем теорему 5.

Теорема 5 (граница Синглтона; [42, с. 43]). Если C — $[n, k, d]$ -код, то

$$n - k + 1 \geq d.$$

Доказательство. Ранг проверочной матрицы $\mathbf{H}$ кода C , т. е. максимальное число ее линейно независимых столбцов, равен $n - k$. Значит, любые $n - k + 1$ столбцов являются линейно зависимыми. Поэтому в C существует ненулевой вектор, все координаты которого, не соответствующие $n - k + 1$ линейно зависимым столбцам, равны 0. Вес Хемминга такого вектора не больше $n - k + 1$, что и требовалось доказать. $\square$

Определение. Коды, для которых достигается граница Синглтона $d = n - k + 1$, называются MDS-кодами (maximum distance separable codes) или МДР-кодами, т. е. *максимальными дистанционно разделимыми* кодами).

Известно много конструкций MDS-кодов. В частности, q -значные коды Рида–Соломона (коды Боуза–Чоудхури–Хоквингема над $GF(q)$, см. ниже) являются MDS-кодами.

Перечислим основные свойства MDS-кодов.

Теорема 6 ([42, с. 310]). Код C является MDS-кодом тогда и только тогда, когда любые $n - k$ столбцов матрицы $\mathbf{H}$ линейно независимы.

Теорема 7 ([42, с. 311]). Если C — MDS-код, то дуальный ему код $C^\perp$ также является MDS-кодом.

Доказательство. Пусть C — MDS-код размерности k и длины n . Его проверочная матрица $\mathbf{H}$ размера $(n - k) \times n$ имеет ранг $n - k$ и является порождающей матрицей дуального кода $C^\perp$ размерности $n - k$.

Согласно теореме 6, любые $n - k$ столбцов матрицы $\mathbf{H}$ образуют невырожденную квадратную матрицу. Поэтому линейная комбинация строк матрицы $\mathbf{H}$ может иметь $n - k$ нулевых координат, только если все ее коэффициенты равны 0. Значит, в любых $n - k$ позициях кодовых слов из $C^\perp$ содержится хотя бы один ненулевой элемент. Следовательно, каждое кодовое слово кода $C^\perp$ имеет не меньше $k + 1$ ненулевых координат. Но в силу границы Синглтона кодовое расстояние кода $C^\perp$ удовлетворяет неравенству

$$d \leq n - (n - k) + 1 = k + 1,$$

значит, минимальное расстояние кода $C^\perp$ равно $k + 1$. $\square$

Следствие 1. Для кода C следующие утверждения эквивалентны:

1. C — MDS-код.
2. Любые k столбцов порождающей матрицы $\mathbf{G}$ линейно независимы.
3. Любые $n - k$ столбцов проверочной матрицы $\mathbf{H}$ линейно независимы.

Двоичный MDS-код может иметь только параметры вида $[n, 1, n]$, $[n, n - 1, 2]$ или $[n, n, 1]$. Такие коды называются *тривиальными MDS-кодами*.

Код с параметрами $[n, k, d]$ называется *нетривиальным*, если $2 \leq k \leq n - 2$.

Описание спектров весов Хемминга MDS-кодов, а значит, и их спектров расстояний, содержится в следующей теореме.

Теорема 8 ([42, с. 312]). Число кодовых слов веса ω в MDS-коде C с параметрами $[n, k, d = n - k + 1]$ над полем $GF(q)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} A_\omega &= \binom{n}{\omega} \sum_{j=0}^{\omega-d} (-1)^j \binom{\omega}{j} (q^{\omega-d+1-j} - 1) = \\ &= \binom{n}{\omega} (q - 1) \sum_{j=0}^{\omega-d} (-1)^j \binom{\omega-j}{j} q^{\omega-d-j}. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что число $A_{n-k+2} = \binom{n}{k-2} (q - 1) (q - n + k - 1)$ неотрицательно, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Следствие 2 ([42, с. 312]). Пусть MDS-код C имеет параметры $[n, k, n - k + 1]$. Если $k \geq 2$, то $q \geq n - k + 1$. Если $k \leq n - 2$, то $q \geq k + 1$.

Теорема 9 ([42, с. 311]). Если C — $[n, k, d]$ -код над $GF(q)$, то C является MDS-кодом тогда и только тогда, когда для любых d позиций в коде C найдется слово минимального веса, ненулевые элементы которого занимают эти позиции; в этом случае $d = n - k + 1$.

Следствие 3. Число кодовых слов веса $n - k + 1$ в коде C равно

$$(q - 1) \binom{n}{n - k + 1}.$$

Веса кодовых слов в MDS-коде с параметрами $[n, k, d]$ принимают не более k различных значений от $n - k + 1$ до n .

Построение MDS-кодов связано с комбинаторными задачами, которые во многих случаях еще не решены. Ряд примеров MDS-кодов содержится в [42]. Приведем здесь только 2 примера. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ — ненулевые элементы поля $GF(q)$, то

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{q-1} & 0 \\ \alpha_1^2 & \dots & \alpha_{q-1}^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{q-k+1} & \dots & \alpha_{q-1}^{q-k+1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{q-1} & 0 & 0 \\ \alpha_1^2 & \dots & \alpha_{q-1}^2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{q-k+1} & \dots & \alpha_{q-1}^{q-k+1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются проверочными матрицами MDS-кодов с параметрами $[q, k, q - k + 1]$ и $[q + 1, k, q - k + 2]$.

Циклические и БЧХ коды

Коды БЧХ (Боуза–Чоудхури–Хоквингема) являются частными случаями линейных *циклических* кодов, т. е. кодов, которые вместе с кодовым словом $(c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0)$ содержат все его циклические сдвиги

$$(c_0, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1), (c_1, c_0, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2), \dots, (c_{n-2}, \dots, c_0, c_{n-1}).$$

Кодовые слова циклического кода длины n , в котором координаты кодовых слов рассматриваются как элементы конечного поля $\mathbb{F}$, удобно рассматривать как набор коэффициентов многочлена из кольца $R_n = \mathbb{F}[x]/(x^n - 1)$:

$$(c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0) \leftrightarrow c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}.$$

В этом кольце умножение на x соответствует циклическому сдвигу коэффициентов многочлена:

$$x(c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}) = c_{n-1} + c_0x + \dots + c_{n-2}x^{n-1} \pmod{x^n - 1}.$$

При такой интерпретации циклический код можно определить как идеал кольца R_n , т. е. как линейное подпространство кольца R_n , замкнутое относительно умножения на многочлены $r(x) \in R_n$.

Каждый идеал $\mathcal{C}$ кольца R_n является *главным*, т. е. все его элементы являются кратными некоторого *порождающего* многочлена $g(x) \in R_n$. Порождающий многочлен $g(x)$ имеет минимальную степень среди ненулевых элементов $\mathcal{C}$, является делителем многочлена $x^n - 1$, и коэффициент при старшем члене $g(x)$ равен 1 (см. [42, § 7.3, с. 191]). Циклический код $\mathcal{C}$ как линейный код в пространстве $\mathbb{F}^n$ порождается матрицей, строки которой соответствуют многочленам

$$g(x), xg(x), \dots, x^{n-r-1}g(x).$$

Строки проверочной матрицы такого кода соответствуют произведениям $x^m h(x)$, где $x^{n-\deg g(x)} h(x^{-1}) = (x^n - 1)/g(x)$.

Каждый код БЧХ длины n над $\text{GF}(q)$ порождается многочленом $g(x)$, который удовлетворяет следующему условию: если α — примитивный корень многочлена $x^n - 1$, лежащий в некотором расширении $\text{GF}(q^m)$ поля $\text{GF}(q)$, то существуют такие целые числа $b \geq 0, \delta \geq 2$, что $\alpha^b, \alpha^{b+1}, \dots, \alpha^{b+\delta-2}$ являются корнями $g(x)$. В этом случае минимальное расстояние БЧХ-кода не меньше конструктивного кодового расстояния δ .

В [45] получено асимптотическое представление некоторых элементов весового спектра БЧХ-кодов, а значит, и спектра расстояний, так как БЧХ-код — линейный.

Теорема 10 ([45, с. 221]). Пусть $p > 2$, $\mathcal{C} = \text{BCH}(B_{\mathbb{F}_q}^{(d)})$ — p -значный БЧХ-код длины $q = p^l$ с конструктивным кодовым расстоянием d , определяемый проверочной матрицей $B_{\mathbb{F}_q}^{(d)}$ и пусть $r_d = 1 + l \cdot \left(d - 2 - \left\lfloor \frac{d-2}{p} \right\rfloor\right)$ — размерность дуального кода $\text{BCH}^\perp(B_{\mathbb{F}_q}^{(d)})$. Тогда при

$$d = \text{const}, \quad q \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad i > 2 \left(d - 2 - \left\lfloor \frac{d-2}{p} \right\rfloor\right)$$

имеет место следующее асимптотическое представление элемента A_i спектра кода $\text{BCH}(B_{\mathbb{F}_q}^{(d)})$:

$$A_i = p^{-r_d} ((p-i)^i + (-1)^i (p-1)) \binom{q}{i} (1 + \varepsilon_{i,q}),$$

где $\varepsilon_{i,q} \asymp q^{-1/4} p^{r_d} (p-1)^{-i} \binom{q}{i}^{-1/2} \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$.

В [46] получены асимптотические формулы для числа кодовых слов определенного веса в БЧХ-коде $\mathcal{C}$ длины $n = 2^l - 1$ с конструктивным кодовым расстоянием $2t + 1$.

При $2t + \nu(t) \leq i \leq n - (2t + \nu(t))$, где

$$\nu(t) = \left\lceil \frac{2t \ln t + 4\frac{1}{2}t + 0.1 \ln n}{\frac{1}{2} \ln n - \ln t - \frac{9}{4}} \right\rceil,$$

и $0 < t < 0.1\sqrt{n}$, показано (см. [46]), что $A_i = (n+1)^{-t} \binom{n}{i} (1+\varepsilon)$, $|\varepsilon| < \text{const} \times n^{-0.1}$. Заметим, что при $t \leq 0.2 \frac{\ln n}{\ln \ln n}$ и достаточно больших n функция $\nu(t)$ равна 1.

Статья [5] содержит ряд известных и новых результатов для весовых энумераторов неприводимых циклических кодов. В формулировках этих результатов циклические коды задаются способом, отличающимся от использованного в начале этого пункта

Пусть p — простое число, $q = p^s$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, $r = q^m$, $N \mid (r-1)$ и $n = (r-1)/N$. Пусть α — примитивный элемент $\text{GF}(r)$ и $\theta = \alpha^N$. Множество

$$C(r, N) = \left\{ \left(\text{Tr}_{r/q}(\beta), \text{Tr}_{r/q}(\beta\theta), \dots, \text{Tr}_{r/q}(\beta\theta^{n-1}) \right) \mid \beta \in \text{GF}(r) \right\}$$

называется *неприводимым циклическим* $[n, m_0]$ кодом над $\text{GF}(q)$, где m_0 — мультипликативный порядок q по модулю n , m_0 делит m , $\text{Tr}_{r/q}: \text{GF}(r) \rightarrow \text{GF}(q)$ — функция след, переводящая каждый элемент $\beta \in \text{GF}(r)$ в элемент $\beta + \beta^q + \dots + \beta^{q^{m-1}} \in \text{GF}(q)$.

Теорема 11 ([5]). а) Если $\text{НОД}((r-1)/(q-1), N) = 1$, то множество $C(r, N)$ является $[(q^m - 1)/N, m, (q-1)q^{m-1}/N]$ -кодом постоянного веса с весовым энумератором

$$1 + (r-1)x^{\frac{(q-1)q^{m-1}}{N}}.$$

б) Если $\text{НОД}((r-1)/(q-1), N) = 2$, то $C(r, N)$ — двухвесовой $[(q^m - 1)/N, m, (q-1)(r - \sqrt{r})/Nq]$ -код с весовым энумератором

$$1 + \frac{r-1}{2} x^{\frac{(q-1)(r-\sqrt{r})}{Nq}} + \frac{r-1}{2} x^{\frac{(q-1)(r+\sqrt{r})}{Nq}}.$$

в) Если $\text{НОД}((r-1)/(q-1), N) = 3$, то $C(r, N)$ — $[(q^m - 1)/N, m]$ -код с весовым энумератором

$$1 + \frac{r-1}{3} x^{\frac{(q-1)(r-c_1\sqrt[3]{r})}{Nq}} + \frac{r-1}{3} x^{\frac{(q-1)(r+\frac{1}{2}(c_1+9d_1)\sqrt[3]{r})}{Nq}} + \frac{r-1}{3} x^{\frac{(q-1)(r+\frac{1}{2}(c_1-9d_1)\sqrt[3]{r})}{Nq}}.$$

г) Если $\text{НОД}((r-1)/(q-1), N) = 4$ и $p \equiv 1 \pmod{4}$, то $C(r, N)$ — $[(r-1)/N, m]$ -код с весовым эnumerатором

$$1 + \frac{r-1}{4} x^{\frac{(q-1)(r+\sqrt{r}+2u_1\sqrt[4]{r})}{Nq}} + \frac{r-1}{4} x^{\frac{(q-1)(r+\sqrt{r}-2u_1\sqrt[4]{r})}{Nq}} + \\ + \frac{r-1}{4} x^{\frac{(q-1)(r-\sqrt{r}+4v_1\sqrt[4]{r})}{Nq}} + \frac{r-1}{4} x^{\frac{(q-1)(r-\sqrt{r}-4v_1\sqrt[4]{r})}{Nq}},$$

где u_1 и v_1 удовлетворяют условиям $q^{m/2} = u_1^2 + 4v_1^2$, $u_1 \equiv 1 \pmod{4}$, и $\text{НОД}(u_1, p) = 1$.

д) Если $\text{НОД}((r-1)/(q-1), N) = 4$ и $p \equiv 3 \pmod{4}$, то $C(r, N)$ — двухвесовой $[(r-1)/N, m]$ -код с весовым эnumerатором

$$1 + 3 \frac{r-1}{4} x^{\frac{(q-1)(r-\sqrt{r})}{Nq}} + \frac{r-1}{4} x^{\frac{(q-1)(r+3\sqrt{r})}{Nq}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существование корней из r следует из условий на НОД чисел $(r-1)/(q-1)$ и N .

В [31] описан весовой эnumerатор неприводимого циклического кода длины n , где n — степень простого числа.

Теорема 12. Пусть t — простое, l — положительное целое и мультипликативный порядок q по модулю t^l равен t^d , $0 \leq d < l$. Положим $m = t^d$ и $N = (q^m - 1)/t^j$ для любого $1 \leq j < l$.

Если $j \leq l - d$, то $C(r, N) = [t^j, 1, t^j]$ код постоянного веса над $\text{GF}(q)$ с весовым эnumerатором

$$1 + (q-1)x^{t^j}.$$

Если $j > l - d$, то $C(r, N) = [t^j, t^{j-(l-d)}]$ циклический код над $\text{GF}(q)$ с весовым эnumerатором

$$\sum_{\omega=0}^{t^{r-l+d}} \binom{t^{j-l+d}}{\omega} x^{t^{(l-d)}\omega}.$$

Теорема 13 описывает класс неприводимых циклических кодов над $\text{GF}(q)$, $q = p^s$, p — простое, содержащих слова двух весов.

Теорема 13 ([5]). Пусть sm четно, $N > 0$, $N \mid (r-1)$ и $N_1 = \text{НОД}((r-1)/(q-1), N) > 2$. Пусть $j > 0$ — минимальное число для которого $p^j \equiv -1 \pmod{N_1}$, и $\gamma = sm/2j$.

а) Если γ, p и $(p^j + 1)/N_1$ нечетные, то $C(r, N)$ — это $[(g^m - 1)/N, m]$ -код с весовым эnumerатором

$$1 + \frac{r-1}{N_1} x^{\frac{(q-1)(r-(N_1-1)\sqrt{r})}{Nq}} + \frac{(r-1)(N_1-1)}{N_1} x^{\frac{(q-1)(r+\sqrt{r})}{Nq}}$$

при условии $N_1 < \sqrt{r} + 1$.

б) В остальных случаях $C(r, N)$ — это $[(g^m - 1)/N, m]$ -код с весовым эnumerатором

$$1 + \frac{r-1}{N_1} x^{\frac{(q-1)(r+(-1)^\gamma(N_1-1)\sqrt{r})}{Nq}} + \frac{(r-1)(N_1-1)}{N_1} x^{\frac{(q-1)(r-(-1)^\gamma(N_1-1)\sqrt{r})}{Nq}}$$

при условии $\sqrt{r} + (-1)^\gamma(N_1 - 1) > 0$.

Теорема 14 содержит явные оценки весов кодовых слов в неприводимом циклическом коде; такие оценки дают информацию о возможности исправления ошибок кодами из этого класса.

Теорема 14 ([5]). Пусть $N|(r-1)$, $N_1 = \text{НОД}((r-1)/(q-1), N)$ и мультипликативный порядок q по модулю n равен m_0 . Тогда $C(r, N)$ — циклический код с параметрами $[(g^m - 1)/N, m_0]$ над $\text{GF}(q)$, и для любого $c \in C(r, N) \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \omega(c) &\geq (q-1) \left\lceil \frac{r - \lfloor (N_1 - 1)\sqrt{r} \rfloor}{Nq} \right\rceil, \\ \omega(c) &\leq (q-1) \left\lfloor \frac{r + \lfloor (N_1 - 1)\sqrt{r} \rfloor}{Nq} \right\rfloor, \end{aligned}$$

где $\omega(\cdot)$ — весовая функция Хемминга. В частности, если $N_1(N_1 - 1) < r$, то $m_0 = m$.

Коды постоянного веса

В [4] для любого нечетного $q = p^n$, p — простое, построен нелинейный двоичный код $C(q, 2)$ длины q , в котором все $\frac{q^2 - q}{2}$ кодовых слов имеют вес $\frac{q-1}{2}$. Расстояние Хемминга между любыми словами из $C(q, 2)$ лежит в интервале $[\frac{q}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{q}, \frac{q}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{q}]$. Показано также, что код $C(q, 2)$ является дистанционно-инвариантным.

В [34] приведены таблицы кодов длины $29 \leq n \leq 63$ со словами фиксированного веса $5 \leq \omega \leq 8$ с минимальным расстоянием $d = 2\omega - 2$, $d = 2\omega - 4$ и $d = 2\omega - 6$. Такие таблицы уже были построены для $n \leq 28$. Ограничение длины величиной 63 было выбрано, поскольку это максимально возможное количество частот в мобильных телефонных системах GSM, когда используется перескок частоты.

В работе [23] рассматривается задача поиска бинарных кодов длины n постоянного веса ω и минимальным расстоянием d с максимально возможным количеством кодовых слов $A(n, d, \omega)$. Подробное описание верхних оценок $A(n, d, \omega)$ можно найти в [1]; нижние оценки $A(n, d, \omega)$ обычно являются конструктивными. В [23] найдены коды, улучшающие нижние оценки $A(n, d, \omega)$, длины $29 \leq n \leq 63$. В частности, получены 10 новых оптимальных кодов ($d = n - k + 1$), которые не были известны ранее.

Коды над $\mathbb{Z}_4$

В [9] содержится краткое введение в коды над $\mathbb{Z}_4$, описание линейных кодов Кердока и Препараты над $\mathbb{Z}_4$, а также некоторых других связанных с ними кодов. Материал этой статьи используется в дальнейшем изложении.

Коды Кердока и Препараты дистанционно-инвариантны, поэтому их весовые спектры совпадают со спектрами расстояний.

В [42, с. 440], для четного m , $m \geq 4$, приведен спектр весов кода Кердока $\mathcal{C}(m)$ (нелинейного кода над $\mathbb{Z}_2$ длины $n = 2^m$, мощности 2^{2^m} , с минимальным расстоянием $2^{m-1} - 2^{(m-2)/2}$):

i	0	$2^{m-1} - 2^{(m-2)/2}$	2^{m-1}	$2^{m-1} + 2^{(m-2)/2}$	2^m
A_i	1	$2^m(2^{m-1} - 1)$	$2^{m+1} - 2$	$2^m(2^{m-1} - 1)$	1

Код Кердока является объединением кода $R(1, m)$ и $2^{m-1} - 1$ смежных классов кода $R(2, m)$ по $R(1, m)$. Кроме того, $R(1, m) \subset \mathcal{C}(m) \subset R(2, m)$.

Интересен следующий факт: для некоторых n и d можно строить нелинейные коды с большим количеством кодовых слов, чем это возможно для линейных кодов. Например, для $n = 16$ и $d = 6$ линейный код с максимальным количеством кодовых слов имеет размерность $k = 7$, т.е. 128 кодовых слов. В 1967 году Нордстром и Робинсон нашли нелинейный код с параметрами $n = 16$ и $d = 6$, содержащий 256 кодовых слов.

Препарата [28] обобщил эту конструкцию на бесконечное семейство кодов с параметрами $(2^{m+1}, 2^{2^{m+1}-2m-2}, 6)$, m — нечетное, $m \geq 3$. Несколько лет спустя, в 1972 году, Кердок [13] дал другое обобщение кода Нордстрома–Робинсона и построил другой бесконечный класс кодов с параметрами $(2^{m+1}, 2^{2^{m+2}}, 2^m - 2^{\frac{m-1}{2}})$, m — нечетное, $m \geq 3$.

В [8] было получено простое описание семейства кодов Кердока с помощью отображения Грея $\psi: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$, определяемого следующим образом:

$$\psi(0) = 00, \quad \psi(1) = 01, \quad \psi(2) = 11, \quad \psi(3) = 10.$$

Для элементов $\mathbb{Z}_4$ вводится вес Ли:

$$\omega_L(0) = 0, \quad \omega_L(1) = 1, \quad \omega_L(2) = 2, \quad \omega_L(3) = 1.$$

При таком определении естественное (покоординатное) продолжение отображения ψ до отображения $\psi^n: \mathbb{Z}_4^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^{2n}$ оказывается изометричным (сохраняющим расстояния) отображением из $\mathbb{Z}_4^n$ (с метрикой Ли) в $\mathbb{Z}_2^{2n}$ (с метрикой Хемминга). Поэтому отображение ψ^n переводит любой линейный код C длины n над $\mathbb{Z}_4$ в бинарный нелинейный код $C = \psi^n(C)$ длины $2n$ с сохранением попарных расстояний между кодовыми словами, и весовые спектры этих кодов совпадают.

Итак, пусть C — линейный код над $\mathbb{Z}_4$; тогда существует дуальный к нему код $C^\perp$. Из изометричности отображения ψ^n следует, что тождество Мак-Вильямса справедливо для нелинейных кодов $C_* = \psi^n(C)$ и $C_*^\perp = \psi^n(C^\perp)$ над $\mathbb{Z}_2$.

Код Нордстрема–Робинсона $\mathcal{N}_{16}$ с параметрами $[16, 256, 6]$, который эквивалентен коду Кердока при $m = 4$ ($C(4)$), является дистанционно-инвариантным и имеет весовой спектр

i	0	6	8	10	16
A_i	1	112	30	112	1

В [8] показано, что такой бинарный код может быть построен из линейного кода над $\mathbb{Z}_4$ с помощью отображения Грея.

Пусть C — линейный код над $\mathbb{Z}_4$ и $d_H(d_L)$ — минимальное расстояние Хемминга (Ли) кода C . В [29] показано, что $d_H \geq \lceil \frac{d_L}{2} \rceil$. Если $d_H = \lceil \frac{d_L}{2} \rceil$, то говорят, что C имеет тип α , в противном случае — что C имеет тип β . В [7] построены линейные симплексные коды типов α и β над $\mathbb{Z}_4$: код S_k^α с параметрами $[2^{2k}, 2k, d_H = 2^{2k-1}, d_L = 2^{2k}]$ и код S_k^β с параметрами $[2^{k-1}(2^k - 1), 2k, d_H = 2^{2k-2}, d_L = 2^{k-1}(2^k - 1)]$. Показано, что образы $\psi(S_k^\alpha)$ и $\psi(S_k^\beta)$ этих кодов при отображении Грея не являются линейными кодами над $\mathbb{Z}_2$.

Теорема 15. Код S_k^α имеет следующие спектры весов Хемминга (Ли):

1. $A_0^H = 1, A_{2^{2k}-1}^H = 2^k - 1, A_{3 \cdot 2^{2k}-2}^H = 2^k(2^k - 1);$
2. $A_0^L = 1, A_{2^{2k}}^L = 2^{2k} - 1.$

Аналогичные теоремы имеют место для кодов S_k^α, S_k^β и кода $\text{RM}(1, m - s + 1)$ над $\mathbb{Z}_{2^s}$.

Коды Голя

Линейный двоичный расширенный код Голя $\mathcal{G}_{24}$ с параметрами $[24, 12, 8]$ порождается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Код Голя $\mathcal{G}_{23}$ с параметрами $[23, 12, 7]$ получается выбрасыванием последней координаты из каждого слова кода $\mathcal{G}_{24}$.

Коды Голя обладают рядом уникальных свойств; многие из них описаны в [42]. Код $\mathcal{G}_{24}$ имеет весовой спектр

i	0	8	12	16	24
A_i	1	759	2576	759	1

Код $\mathcal{G}_{23}$ имеет весовой спектр

i	0	7	8	11	12	15	16	23
A_i	1	253	506	1288	1288	506	253	1

Код Голя $\mathcal{G}_{23}$ исправляет любые три ошибки и является совершенным: для любого слова $x \in \mathbb{Z}_2^{23}$ существует ровно одно кодовое слово из $\mathcal{G}_{23}$, находящееся от x на расстоянии Хемминга не более 3.

§ 4. Некоторые применения кодов в криптографии

Существует множество работ по синтезу криптографических схем на основе кодов. Примерами таких схем, основанных на линейных кодах, являются системы шифрования Мак-Элиса [20] и Нидеррайтера [25], приведем их краткое описание.

В основе системы Мак-Элиса лежит некоторый двоичный неприводимый код Гоппы над $GF(2^m)$ с порождающей матрицей $G_{k \times n}$ длины $n = 2^m$, размерности $k \geq n - tm$, исправляющий t ошибок. Выбираются перестановочная матрица $P_{n \times n}$ и невырожденная матрица $S_{k \times k}$. Использование кодов Гоппы обусловлено существованием быстрого алгоритма декодирования таких кодов.

Далее определяется матрица $(SGP)_{k \times n}$, которая задает линейный код с таким же соотношением k/n и минимальным расстоянием, как у исходного кода Гоппы, и является открытым ключом, как и параметры n, k, t .

Шифрование сообщения u длины k заключается в вычислении вектора $u \cdot (SGP)_{k \times n}$ и добавлении к нему случайного вектора-ошибки z веса t длины n , в результате получаем зашифрованное сообщение $x = u \cdot (SGP)_{k \times n} + z$.

Процедура расшифрования сообщения x состоит из выполнения последовательных операций:

1. вычислить $x' = xP^{-1}$ — кодовое слово кода Гоппы, где P^{-1} — обратная матрица к P ;
2. декодировать x' с помощью, например, алгоритма Петерсона [27], получив u' ;
3. вычислить $u = u'S^{-1}$.

Схема шифрования Нидеррайтера также основана на использовании кодов Гоппы размерности $k \geq n - tm$, но задаваемых, в отличие от схемы McEllice, проверочной матрицей $H_{(n-k) \times n}$. Выбираются перестановочная матрица $P_{n \times n}$ и невырожденная матрица $S_{(n-k) \times (n-k)}$. Параметры n, k, t и матрица $(SHP)_{(n-k) \times n}$ являются открытыми, секретными являются матрицы P, S и структура кода Гоппы. Процедуры шифрования и расшифрования аналогичны процедурам для системы McEllice.

Теория кодирования применяется также при построении хэш-функций. Например, в [14] предлагается новый класс конструкций хэш-функций, которые используют коды над $GF(2^2)$ размерности $k > \frac{n}{2}$ с минимальным расстоянием d . Полученные хэш-функции используют блочный шифр E с длиной блока t бит, где $n = O(m)$, имеют внутреннюю память $n \cdot t$ бит и скорость $2k/n - 1$. Нахождение коллизий для таких хэш-функций требует более $2^{(d-1)m/2}$ операций шифрования; поиск прообраза — не менее $2^{(d-1)m}$ операций.

Приводится конструктивное доказательство существования таких хэш-функций:

$$h(M_i, H_{i-1}) = E_{M_i}(H_{i-1}) \oplus H_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, t,$$

где M_i — i -й блок входного сообщения M , H_i — хэш-значение длины t бит, H_0 — начальное значение, что h требует для построения коллизии более

$2^{(d-1)m/2}$ операций шифрования и не менее $2^{(d-1)m}$ операций шифрования для построения прообраза.

Теория кодирования используется для построения криптографических булевых функций. Примерами являются работы [18, 19, 35].

В [19] получены верхние и нижние оценки величины $N(d, d^\perp)$ — минимальной длины линейного кода с минимальным расстоянием d и минимальным расстоянием $d^\perp$ дуального к нему кода. Для небольших значений d и $d^\perp$ определяется $N(d, d^\perp)$ и предлагается порождающая матрица оптимального линейного кода. Проблема, решаемая в [19], тесно связана с методом построения криптографических функций, который предложил Куросава.

В [35] показано, что если для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [y_1, y_2, \dots, y_{n-k}]$, $f: \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^{n-k}$ выполнено условие

$$\left\{ f^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) : \forall (y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) \in \mathbb{F}_q^{n-k} \right\} = e + C,$$

где C — систематический q -ичный (n, k) -код, e — любой элемент множества E всех q^{n-k} наборов длины n с фиксированными 0 позициями, соответствующими информационным символам кода C , то $t = d^\perp - 1$ — максимальное значение, для которого функция f является t -устойчивой, где $d^\perp$ — минимальное кодовое расстояние дуального кода $C^\perp$.

Теорию кодирования можно применять при оценивании нелинейности булевой функции. В [18] предлагается заменить для $n \geq 10$ трудоемкое нахождение спектра нелинейности $(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n)$ булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где δ_i — нормированное расстояние Хемминга от функции f до ближайшего кодового слова кода Рида–Мюллера i -го порядка длины 2^n , поиском похожей характеристики $(\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)$, где $\tilde{\delta}_i$ — расстояние до кодового слова, являющегося результатом применения предложенного в [30] алгоритма декодирования кода Рида–Мюллера i -го порядка длины 2^n к таблице истинности функции f .

Нередко теория кодов применяется к решению криптографических задач сведением их к решению задачи декодирования, как, например, в [10, 11, 17, 21, 22].

В [10] и [11] сообщается о новых методах быстрых корреляционных атак на потоковые шифры. Эти методы основаны на технике построения и декодирования турбо- и сверточных кодов. Пусть $\mathcal{L}$ — множество выходных последовательностей двоичного регистра сдвига длины l с линейной обратной

связью. Очевидно, что $|\mathcal{L}| = 2^l$ и что для фиксированного N множество усеченных последовательностей $\{u = (u_1, u_2, \dots, u_N) | u \in \mathcal{L}\}$ длины N образует линейный $[N, l]$ -код $\mathcal{C}$. Пусть последовательность $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ подается на вход двоичного симметричного канала с вероятностью ошибки p , $p < 0.5$, а на его выходе появляется последовательность $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$, т. е. $p = \mathbf{P}\{u_n \neq z_n\}$ для любого $n \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Задача нахождения кодового слова $(u_1, u_2, \dots, u_N) \in \mathcal{C}$ по сообщению $(z_1, z_2, \dots, z_N)$ на выходе двоичного симметричного канала связи с вероятностью ошибки p представляет собой пример криптографической задачи (если считать, например, что u — секретная последовательность, а искажения соответствуют ее изменению при прохождении через функцию усложнения).

В [21] описан алгоритм декодирования зашумленной выходной последовательности линейного регистра сдвига с обратной связью, в котором используются апостериорные вероятности каждого символа полученной последовательности; в алгоритме, описанном в [11], используются сверточные коды и метод декодирования Витерби небольших отрезков последовательности. Алгоритм, предложенный в [10], комбинирует методы [21] и [11].

В [17] исследуется задача нахождения сообщения $s \in \text{GF}(2)^N$ по полученному зашумленному вектору наблюдений $r \in \text{GF}(2)^M$ и двоичной матрице A размера $M \times N$

$$(As + n) \bmod 2 = r, \quad (5)$$

где As — кодированное сообщение, $n \in \text{GF}(2)^M$ — вектор ошибок.

Похожая задача возникает при анализе корреляционных атак на потоковые шифры, если, например, s — начальное состояние регистра сдвига, A — матрица, связывающая выходной бит регистра с начальным состоянием s . В [17] предложен алгоритм нахождения s , эмпирическая производительность которого сравнима или даже превосходит (по утверждению автора) производительности кодов Рида–Мюллера и БЧХ; этот алгоритм мог бы заменить алгоритм В Мейера и Стефелбаха, так как его сложность близка к теоретически возможной сложности алгоритма В.

В диссертации [6] можно более подробно ознакомиться с различными применениями теории кодирования, в том числе с применениями в области генерации псевдослучайных последовательностей с помощью эллиптических кривых.

Автор признателен А. М. Зубкову за полезные обсуждения в ходе работы над статьей.

Список литературы

1. *Agrell E., Vardy A., Zeger K.* Upper bounds for constant-weight codes // IEEE Trans. Inf. Theory. — 2000. — V. 46. № 7. — P. 2373–2395.
2. *Alfers D., Dinges H.* A normal approximation for Beta and Gamma tail probabilities // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. — 1984. — № 65. — P. 399–420.
3. *Bocharova I., Hug F., Johannesson R., Kudryashov B.D.* On weight enumerators and MacWilliams identity for convolutional codes // Theor. Informatics and Appl. — ITA. — 2010.
4. *Caragiu M.* On a class of constant weight codes // Electr. J. Combinatorics. — 1996. — V. 3.
5. *Ding C., Yang J.* Hamming weights in irreducible cyclic codes // arxiv:1108.3887 — 2011. — P. 1–15.
6. *Doumen J. M.* Some Applications of Coding Theory in Cryptography // PhD thesis, Eindhoven Univ. technology. — 2003.
7. *Gupta M. K.* On some linear codes over Z_{2^s} . — 1999. — PhD Diss. Indian Inst. Technology, Kanpur.
8. *Hammons A., Kumar P. V., Calderbank A. R., Sloane N. J. A., Sole P.* The Z_4 -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals and related codes // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1994. — V. 40. — P. 301–319.
9. *Helleseth T.* Codes over Z_4 . // Lect. Notes Comput. Sci. — 2001. — V. 2122. — P. 47–55.
10. *Johansson T., Jonsson F.* Fast correlation attacks based on turbo code techniques // Lect. Notes Comput. Sci. — 1999. — V. 1666. — P. 181–197.
11. *Johansson T., Jonsson F.* Improved fast correlation attacks on stream ciphers via convolutional codes // Lect. Notes Comput. Sci. — 1999. — V. 1592. — P. 347–362.
12. *Jurrius R., Pellikaan R.* Codes, arrangements and weight enumerators // Dept. of Math. and Comput. Sci., Coding and Crypto Group, The Netherlands. — 2009.
13. *Kerdock A. M.* A class of low-rate nonlinear binary code // Inform. Contr. — 1972. — V. 20. — P. 182–187.
14. *Knudsen L., Preneel B.* Hash functions based on block ciphers and quaternary codes // ASIACRYPT 1996. Lect. Notes Comput. Sci. — 1996. — V. 1163. — P. 77–90.
15. *Laywine C. F., Mullen G. L.* Discrete mathematics using Latin squares. — Wiley, 1998. — 326 p.

16. *Linial N., Samorodnitsky A.* Linear codes and character sums // *Combinatorica*. — 2002. — P. 497–522.
17. *MacKay D.J.* A free energy minimization framework for inference problems in modulo 2 arithmetic // *Lect. Notes Comput. Sci.* — 1995. — V. 1008. — P. 179–195.
18. *Massey J.L.* Some applications of coding theory in cryptography // *Codes and cyphers: cryptography and coding*. — 1995. — V. 4. — P. 33–47.
19. *Matsumoto R., Kurosawa K. et al.* Primal-dual distance bounds of linear codes with application to cryptography // *Inf. Theory*. — 2006. — V. 52. № 9. — P. 4251–4256.
20. *McEliece R.J.* A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory // *DSN Progress Report*. — 1978. — P. 42–44.
21. *Meier W., Staffelbach O.* Fast correlation attacks on stream ciphers // *Lect. Notes Comput. Sci.* — 1988. — V. 330. — P. 301–314.
22. *Meier W., Staffelbach O.* Fast correlation attacks on certain stream ciphers // *J. Cryptology*. — 1989. — V. 1. — P. 159–176.
23. *Montemanni R., Smith D.H.* Heuristic construction of constant weight binary codes // *Techn. Rep. No. IDSIA-12-07*.
24. *Navon M., Samorodnitsky A.* Linear programming bounds for codes via a covering argument // *Discr. Comput. Geometry*. — 2009. — V. 41. № 2. — P. 199–207.
25. *Niederreiter H.* Knapsack-type cryptosystems and algebraic coding theory // *Пробл. управл. и теории инф.* — 1986. — Т. 15. № 2. — С. 159–166.
26. *Perry P.N., Fossorier M.P.* The average value for the probability of an undetected error // *IEEE Trans. Inf. Theory*. — 2008. — V. 54. № 5. — P. 2372–2375.
27. *Patterson N.J.* The algebraic decoding of Goppa codes // *IEEE Trans. Inf. Theory*. — 1975. — V. 21. — P. 203–207.
28. *Preparata F.P.* A class of optimum nonlinear double-error correcting codes // *Inform. Contr.* — 1968. — V. 13. — P. 378–400.
29. *Rains E.M.* Optimal self-dual codes over $\mathbb{Z}_4$ // *Discrete Math.* — 1999. — V. 203. — P. 215–228.
30. *Reed I. S.* A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme // *IRE Trans. Inform. Theory*. — 1954. — P. 38–49.
31. *Sharma A., Bakshi G.K.* The weight distribution of some irreducible cyclic codes // *Finite Fields and Their Appl.* — 2012. — V. 18. № 1. — P. 144–159.
32. *Shiromoto K.* The weight enumerator of linear codes over $GF(q^m)$ having generator matrix over $GF(q)$ // *Des., Codes and Cryptography*. — 1999. — V. 16. № 1. — P. 87–92.

33. *Siap I.* The complete weight enumerator for codes over $\mathcal{M}_{n \times s}(\mathbb{F}_q)$ // IMA Int. Conf. 2001. — P. 20–26.
34. *Smith D. H., Hughes L. A., Perkins S.* A new table of constant weight codes of length greater than 28 // J. Combinatorics. — 2006. — V. 13.
35. *Stinson D. R., Massey J. L.* An infinite class of counterexamples to a conjecture concerning non-linear resilient functions // J. Cryptology. — 1995. — V. 8. № 3. — P. 167–173.
36. Справочник по специальным функциям (под ред. М. Абрамовица, И. Стиган). — М.: Наука, 1979. — 831 с.
37. *Блейхут Р.* Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. — М.: Мир, 1986.
38. *Зиновьев В. А., Хеллесет Т.* О весовых спектрах сдвигов кодов типа Геталса // Проблемы передачи информации. — 2004. — Т. 40. № 2. — С. 19–36.
39. *Зубков А. М., Серов А. А.* Оценки числа булевых функций, имеющих аффинные приближения заданной точности // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22. № 4. — С. 3–19.
40. *Зубков А. М., Серов А. А.* Полное доказательство универсальных неравенств для функции распределения биномиального закона // Теор. вероятн. и примен. — 2012. — Т. 57. № 3. — С. 597–602.
41. *Ллойд С. П.* Бинарное блочное кодирование // Кибернетический сб. — М: Изд-во иностр лит., 1960. — Вып. 1. — С. 206–226.
42. *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.
43. *Серов А. А.* Оценки распределений расстояний от случайной булевой функции до аффинных и квадратичных функций. Кандидатская диссертация. — М.: МИАН, 2011. — 87 с.
44. *Серов А. А.* Оценки числа булевых функций, имеющих квадратичные приближения заданной точности // Дискретная математика. — 2012. — Т. 24. № 3. — С. 90–107.
45. *Сидельников В. М.* Теория кодирования. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 324 с.
46. *Сидельников В. М.* О спектре весов двоичных кодов Боуза-Чоудхури-Хоквингема // Проблемы передачи информации. — 1971. — Т. 7. Вып. 1. — С. 14–22.
47. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1. — М.: Мир, 1984.
48. *Шапиро Г. С., Злотник Д. Л.* К математической теории кодов с исправлением ошибок // Кибернетический сб. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — Вып. 5. — С. 7–32.