Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Круглов, Условия предельной равновероятности состояний регистров сдвига, *Матем. вопр. криптогр.*, 2010, том 1, выпуск 2, 19–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk8>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 11:53:31

Условия предельной равновероятности состояний регистров сдвига

И. А. Круглов

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 22.IV.2010

В работе описаны условия предельной равновероятности состояний регулярных регистров сдвига в случае, когда на вход регистра поступает последовательность случайных входных символов, связанных марковской зависимостью.

Ключевые слова: регистр сдвига, равномерное распределение, цепь Маркова

Conditions of limit uniformity of shift register state distribution

I. A. Kruglov

LLC "Certification Research Center", Moscow

Abstract. A shift register with Markovian input sequence is considered. Sufficient conditions for the convergence of register state distribution to the uniform law are given.

Key words: shift register, uniform distribution, Markov chain

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2010, vol. 1, no. 2, pp. 19–29 (Russian).

Пусть

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \dots \quad (1)$$

— конечная простая однородная неразложимая цепь Маркова с множеством состояний $\{1, 2, \dots, n\}$, матрицей переходных вероятностей $P = \|p(i, j)\|$ и некоторым положительным вектором начального распределения, $(G; \cdot)$ — конечная группа. Предположим, что для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ задана последовательность $\{\xi_{i,j}^{(N)}\}$ одинаково распределенных со случайной величиной $\xi_{i,j}$ случайных величин со значениями в группе G . Пусть группа

$$G^{(m)} = \underbrace{G \times G \times \dots \times G}_m, \quad m \geq 1,$$

есть m -я декартова степень группы G , $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ — случайный вектор со значениями в группе $G^{(m)}$. Будем предполагать, что случайные величины $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$, $\xi_{i,j}^{(N)}$ ($N \geq 1, i, j \in \{1, \dots, n\}$) и цепь Маркова (1) независимы в совокупности.

Предположим, что задано отображение

$$\varphi: G^{(m)} \rightarrow G,$$

удовлетворяющее следующему условию регулярности: для любых $g_1, g_2, \dots, g_{m-1} \in G$ биективно отображение

$$\varphi_{g_1, \dots, g_{m-1}}: G \rightarrow G,$$

где $\varphi_{g_1, \dots, g_{m-1}}(g) = \varphi(g, g_1, \dots, g_{m-1})$, $g \in G$.

Определим случайные величины со значениями в группе G :

$$\zeta_{m+N} = \varphi(\zeta_N, \zeta_{N+1}, \dots, \zeta_{N+m-1}) \cdot \xi_{\alpha_N, \alpha_{N+1}}^{(N)}, \quad N \geq 1, \quad (2)$$

а также случайные величины со значениями в группе $G^{(m)}$:

$$\zeta^{(0)} = (\zeta_1, \dots, \zeta_m), \quad \zeta^{(N)} = (\zeta_{N+1}, \zeta_{N+2}, \dots, \zeta_{N+m}), \quad N \geq 1. \quad (3)$$

Ранее последовательность (3) в случае $n = 1$ изучалась в работах [3, 4, 6]. Последовательность (3) описывает вероятностные свойства последовательности состояний регистра сдвига с функцией обратной связи φ при наличии случайной марковской входной последовательности.

Обозначим через $p^{(N)}(i, j)$ вероятность перехода цепи Маркова (1) из состояния i в состояние j за N шагов. Для таких N, i, j , что $p^{(N)}(i, j) > 0$,

рассмотрим случайные величины $\zeta_{i,j}^{(N)}$ со значениями в группе $G^{(m)}$: распределение $\zeta_{i,j}^{(N)}$ есть условное распределение случайной величины $\zeta^{(N)}$ при условии $\alpha_1 = i, \alpha_{N+1} = j$.

В данной работе мы исследуем условия предельной при $N \rightarrow \infty$ равномерности на группе $G^{(m)}$ распределений последовательности случайных величин (3), а также последовательностей случайных величин

$$\{\zeta_{i,j}^{(N)}\}, i, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (4)$$

Для случайной величины ξ со значениями в конечной группе будем обозначать через $\Omega(\xi)$ носитель ее распределения.

Теорема 1. Пусть выполнено условие

$$\bigcap_{\substack{j \in \overline{1,n}: \\ p(i,j) > 0}} \Omega(\xi_{i,j}) \neq \emptyset, i \in \{1, \dots, n\}, \quad (5)$$

неотрицательная матрица $P' \cdot P$ неразложима ($'$ — знак транспонирования), и не существует собственной подгруппы L группы G , для которой множество

$$\Omega = \bigcup_{\substack{i,j \in \overline{1,n}: \\ p(i,j) > 0}} \Omega(\xi_{i,j}) \quad (6)$$

содержится в одном смежном классе группы G по подгруппе L . Тогда для любого регулярного отображения φ , любого распределения случайной величины $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$ и любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ последовательность распределений случайных величин (4) имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на множестве $G^{(m)}$.

Доказательство. Рассмотрим симметрическую группу подстановок $S(G^{(m)})$ множества $G^{(m)}$ с операцией произведения отображений. Каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие элемент $\pi(g) \in S(G^{(m)})$ следующим образом:

$$\pi(g)((g_1, \dots, g_m)) = (g_2, \dots, g_m, \varphi(g_1, \dots, g_m) \cdot g), \quad (g_1, \dots, g_m) \in G^{(m)}.$$

Множество $\{\pi(g) | g \in G\}$ порождает некоторую группу подстановок множества $G^{(m)}$, которую мы будем обозначать через $(\mathfrak{G}, *)$.

Каждой случайной величине ξ со значениями в группе G соответствует случайная величина со значениями в группе $\mathfrak{G}$, которую мы будем обозначать $\tilde{\xi}$, значения $\tilde{\xi}$ определяются равенством $\tilde{\xi} = \pi(\xi)$. Заметим, что при этом распределения ξ и $\tilde{\xi}$ связаны равенством

$$\mathbf{P}(\xi = g) = \mathbf{P}(\tilde{\xi} = \pi(g)), g \in G,$$

и что из независимости случайных величин со значениями в группе G из некоторого семейства $\{\xi_\beta\}$ следует независимость случайных величин со значениями в группе $\mathfrak{G}$ из соответствующего семейства $\{\tilde{\xi}_\beta\}$.

Введем в рассмотрение вспомогательные случайные величины. Пусть

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N, \dots$$

— последовательность взаимно независимых и не зависящих от $\zeta^{(0)}$ случайных величин со значениями в группе G , имеющих равномерное распределение на множестве Ω (см. (6)). Определим следующие случайные величины со значениями в группе G :

$$\begin{aligned} \mu_N &= \zeta_N, N \in \{1, \dots, m\}, \\ \mu_{m+N} &= \varphi(\mu_N, \dots, \mu_{N+m-1}) \cdot \theta_N, N \geq 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее введем случайные величины со значениями в группе $\mathfrak{G}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^{(N)} &= \tilde{\theta}_1 * \tilde{\theta}_2 * \dots * \tilde{\theta}_N, N \geq 1, \\ \tilde{\eta}^{(N)} &= \tilde{\xi}_{\alpha_1, \alpha_2}^{(1)} * \tilde{\xi}_{\alpha_2, \alpha_3}^{(2)} * \dots * \tilde{\xi}_{\alpha_N, \alpha_{N+1}}^{(N)}, N \geq 1. \end{aligned}$$

Для каждой $i, j \in \{1, \dots, n\}, N \geq 1$, удовлетворяющих условию $p^{(N)}(i, j) > 0$, рассмотрим случайную величину $\tilde{\eta}_{i,j}^{(N)}$ со значениями в $\mathfrak{G}$, распределение которой совпадает с условным распределением $\tilde{\eta}^{(N)}$ при условии $\alpha_1 = i, \alpha_{N+1} = j$.

Мы будем также рассматривать случайные величины

$$\mu^{(N)} = (\mu_{N+1}, \mu_{N+2}, \dots, \mu_{N+m}), N \geq 0,$$

со значениями в группе $G^{(m)}$.

Будем считать, что зафиксирована некоторая нумерация элементов группы $G^{(m)}$, и в соответствии с этой нумерацией определяются векторы $\bar{p}_\eta$ распределений случайных величин η со значениями в группе $G^{(m)}$, а также

матрицы переходных вероятностей $\prod_{\tilde{\xi}}$ случайных величин $\tilde{\xi}$ со значениями в группе $\mathfrak{G}$, см. [2]. Справедливы следующие равенства:

$$\bar{p}_{\zeta_{i,j}^{(N)}} = \bar{p}_{\zeta^{(0)}} \cdot \prod_{\tilde{\eta}_{i,j}^{(N)}}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad N \geq 1, \quad p^{(N)}(i, j) > 0, \quad (8)$$

$$\bar{p}_{\mu^{(N)}} = \bar{p}_{\zeta^{(0)}} \cdot \prod_{\tilde{\theta}^{(N)}}, \quad N \geq 1. \quad (9)$$

Равенство (8) следует из соотношения

$$P(\zeta^{(N)} = \bar{h}) = \sum_{\bar{g} \in G^{(m)}} P(\zeta^{(0)} = \bar{g}) \cdot \sum_{\substack{\tilde{\tau} \in \mathfrak{G}: \\ q(\tilde{\tau})(\bar{g}) = \bar{h}}} P(\tilde{\eta}_{i,j}^{(N)} = \tilde{\tau})$$

и из того факта, что для любых $\bar{h}, \bar{g} \in G^{(m)}$ число

$$\sum_{\substack{\tilde{\tau} \in \mathfrak{G}: \\ q(\tilde{\tau})(\bar{g}) = \bar{h}}} P(\tilde{\eta}_{i,j}^{(N)} = \tilde{\tau})$$

есть элемент матрицы $\prod_{\tilde{\eta}_{i,j}^{(N)}}$ в строке с номером $\bar{g}$ и столбце с номером $\bar{h}$.

Равенство (9) доказывается аналогично.

В соответствии с утверждением следствия 2 в работе [5] для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и любой такой возрастающей последовательности $\{k_N\}$, натуральных чисел, что $p^{(k_N)}(i, j) > 0$ при всех $N \geq 1$, последовательности распределений случайных величин

$$\{\bar{p}_{\tilde{\eta}_{i,j}^{(k_N)}}\}, \{\bar{p}_{\tilde{\theta}^{(k_N)}}\}$$

сходятся или не сходятся одновременно, и в случае сходимости их пределы равны.

Пусть $\{k_N\}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой последовательность распределений $\{\bar{p}_{\zeta_{i,j}^{(k_N)}}\}$ имеет предел. По теореме Больцано–Вейерштрасса из последовательности распределений случайных величин $\{\bar{p}_{\tilde{\eta}^{(k_N)}}\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\bar{p}_{\tilde{\eta}^{(k_{s(N)})}}\}$. По теореме о выражении матриц переходных вероятностей случайных величин со значениями в конечных группах подстановок через их распределения, см. [2], последовательности матриц переходных вероятностей

$$\{\prod_{\tilde{\eta}_{i,j}^{(k_{s(N)})}}\}, \{\prod_{\tilde{\theta}_{i,j}^{(k_{s(N)})}}\}$$

сходятся при $N \rightarrow \infty$, и их пределы равны. Из соотношений (8), (9) следует, что для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ последовательности распределений

$$\{\bar{p}_{\zeta_{i,j}}^{(k_s(N))}\}, \{\bar{p}_{\mu}^{(k_s(N))}\}$$

сходятся при $N \rightarrow \infty$, и их пределы равны. Из соотношения (7), условия теоремы на носитель Ω распределений случайных величин $\theta_N, N \geq 1$, и теоремы 2 работы [4] следует, что последовательность распределений $\{\bar{p}_{\mu}^{(k_s(N))}\}$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к равномерному распределению на группе $G^{(m)}$. Таким образом последовательность $\{\bar{p}_{\zeta_{i,j}}^{(k_s(N))}\}$, а с ней и последовательность $\{\bar{p}_{\zeta_{i,j}}^{(k_N)}\}$, при $N \rightarrow \infty$ имеет своим пределом равномерное распределение на группе $G^{(m)}$. Так как каждая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{\bar{p}_{\zeta_{i,j}}^{(N)}\}$ сходится к равномерному распределению на группе $G^{(m)}$, то и последовательность $\{\bar{p}_{\zeta_{i,j}}^{(N)}\}$ при $N \rightarrow \infty$ имеет своим пределом равномерное распределение на группе $G^{(m)}$.

Теорема 1 доказана.

Заметим, что условие неразложимости матриц P и $P' \cdot P$ равносильно известному условию А. Н. Колмогорова (см. [7]) на цепь Маркова (1).

Используя формулу полной вероятности и теорему 1, можно доказать следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда для любого регулярного отображения φ , любого распределения случайной величины $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$ последовательность распределений случайных величин (3) имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на группе $G^{(m)}$.

Рассмотрим следующий пример.

Опишем цепь Маркова (1). Пусть $k \geq 1$, и для каждого $j \in \{1, \dots, k\}$ задана последовательность случайных величин $\{x_N^{(j)}\}$, связанная в некоторую положительно-регулярную цепь Маркова с множеством состояний $\{0; 1\}$, некоторой положительно-регулярной матрицей переходных вероятностей P_j и некоторым положительным вектором начального распределения. Будем предполагать, что цепи Маркова $\{x_N^{(j)}\}, j \in \{1, \dots, k\}$, независимы в совокупности. В качестве цепи Маркова (1) рассмотрим последовательность векторов

$$\left\{ \left(x_N^{(1)}, x_N^{(2)}, \dots, x_N^{(k)} \right) \right\}.$$

Таким образом, в данном случае множество состояний цепи Маркова (1) есть множество V_k всех двоичных векторов длины k , число состояний $n = 2^k$ и матрица P переходных вероятностей цепи Маркова (1) есть тензорное произведение матриц

$$P = P_1 \otimes P_2 \otimes \dots \otimes P_k. \quad (10)$$

Наконец, для произвольной пары векторов $i = (i_1, \dots, i_k), j = (j_1, \dots, j_k) \in V_k$ и любого $N \geq 1$ будем считать, что распределение случайной величины $\xi_{i,j}^{(N)}$ есть вырожденное распределение в элементе $f(i_1, \dots, i_k) \in G$, где f — некоторая псевдобулева функция от k переменных. В этом случае соотношение (2) принимает следующий вид:

$$\zeta_{m+N} = \varphi(\zeta_N, \zeta_{N+1}, \dots, \zeta_{N+m-1}) \cdot f(x_N^{(1)}, x_N^{(2)}, \dots, x_N^{(k)}), \quad N \geq 1. \quad (11)$$

Будем предполагать, что множество значений функции f не содержится в одном смежном классе по любой собственной подгруппе группы G . Покажем, что для последовательности (11) выполнены условия теоремы 1.

Условие (5) выполняется согласно определению $\xi_{i,j}^{(N)}$.

Из соотношения (10) следует, что

$$P' \cdot P = (P'_1 \cdot P_1) \otimes (P'_2 \cdot P_2) \otimes \dots \otimes (P'_k \cdot P_k). \quad (12)$$

Для любой положительно-регулярной матрицы P_j размера 2×2 матрица $P'_j \cdot P_j$ неразложима (это нетрудно проверить непосредственно). С учетом (12) получаем, что матрица $P' \cdot P$ неразложима. Наконец, в соответствии с (6) в данном случае множество

$$\Omega = \{f(x_1, \dots, x_k) \mid (x_1, \dots, x_k) \in V_k\}$$

не содержится в одном смежном классе группы G по ее собственной подгруппе.

Таким образом, по теореме 1 и следствию 1 для последовательности (11) соответствующие последовательности (3), (4) имеют в пределе при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на группе $G^{(m)}$.

Ранее данное утверждение в случае, когда $|G| = 2$, было доказано И. И. Гезенко.

Вернемся к исследованию последовательностей (3), (4) для произвольной цепи Маркова (1) и рассмотрим случай, когда регулярное отображение φ является гомоморфизмом группы $G^{(m)}$ на группу G . Это означает,

что, во-первых, для некоторых эндоморфизмов $\varphi_2, \dots, \varphi_m$ и автоморфизма φ_1 группы G верно равенство

$$\varphi(g_1, g_2, \dots, g_m) = \varphi_1(g_1) \cdot \varphi_2(g_2) \cdot \dots \cdot \varphi_m(g_m), g_1, g_2, \dots, g_m \in G,$$

и, во-вторых, если $m > 1$, то для любого $j \in \{2, \dots, m\}$ образ $\varphi_j(G)$ содержится в центре группы G .

Здесь мы сформулируем и докажем необходимые и достаточные условия предельной равномерности для последовательностей распределений случайных величин (4) в общем случае неразложимой цепи Маркова (1).

Введем необходимые обозначения.

Отображению φ соответствует автоморфизм Φ группы $G^{(m)}$, определяемый соотношением

$$\Phi(g_1, g_2, \dots, g_m) = (g_2, \dots, g_m, \varphi(g_1, \dots, g_m)), (g_1, g_2, \dots, g_m) \in G^{(m)}.$$

Пусть $\text{ord } \Phi$ — порядок автоморфизма Φ , d — число циклических классов состояний цепи Маркова (1),

$$f = \text{НОК}(d, \text{ord } \Phi).$$

Пусть D — циклический класс состояний цепи Маркова (1), такой что $D \ni 1$. Рассмотрим ориентированный граф Γ (см. [1]) с множеством вершин D и множеством ориентированных ребер $\{e_{i,j}^{+1}, e_{j,i}^{-1} | i, j \in D, p^{(f)}(i, j) > 0\}$. Пусть в Γ назовем произвольную последовательность ориентированных ребер вида

$$z = e_{i_1, i_2}^{\varepsilon_1}, e_{i_2, i_3}^{\varepsilon_2}, \dots, e_{i_k, i_{k+1}}^{\varepsilon_k}. \quad (13)$$

Для произвольных $i, j \in D, R \in \mathbb{Z}$ обозначим через $L_R(i, j)$ множество всех путей z вида (13), для которых $i_1 = i, i_{k+1} = j, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k = R$. Из условия $d|f$ следует, что матрица $\|p^{(f)}(i, j)\|_{i, j \in D}$ положительно-регулярна. Поэтому для любых $i, j \in D, R \in \mathbb{Z}$ множество $L_R(i, j) \neq \emptyset$.

Для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}, N \geq 1$, определим случайные величины со значениями в группе $G^{(m)}$:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{i,j}^{(N)} &= (e_G, \dots, e_G, \xi_{i,j}^{(N)}), \\ \bar{\zeta}^{(N)} &= \left(\left(\dots \left(\bar{\xi}_{\alpha_1, \alpha_2}^{(1)} \right)^\Phi \cdot \dots \right)^\Phi \cdot \bar{\xi}_{\alpha_{N-1}, \alpha_N}^{(N-1)} \right)^\Phi \cdot \bar{\xi}_{\alpha_N, \alpha_{N+1}}^{(N)}, N \geq 1. \end{aligned}$$

e_G — нейтральный элемент группы G . Для произвольных $i, j \in \{1, \dots, n\}$, таких что $p^{(N)}(i, j) > 0$, рассмотрим случайные величины

$$\bar{\zeta}_{i,j}^{(N)} \quad (14)$$

со значениями в группе $G^{(m)}$, распределения которых совпадают с условным распределением случайной величины $\bar{\zeta}^{(N)}$ при условии $\alpha_1 = i, \alpha_{N+1} = j$. Определим подмножества элементов группы $G^{(m)}$:

$$\bar{\Omega}(e_{i,j}^{+1}) = \Omega(\bar{\zeta}_{i,j}^{(f)}), \bar{\Omega}(e_{j,i}^{-1}) = \Omega(\bar{\zeta}_{i,j}^{(f)})^{-1}, i, j \in \{1, \dots, n\}, p^{(f)}(i, j) > 0.$$

Пути z вида (13) поставим в соответствие множество элементов группы $G^{(m)}$:

$$\bar{\Omega}(z) = \bar{\Omega}(e_{i_1, i_2}^{\varepsilon_1}) \cdot \bar{\Omega}(e_{i_2, i_3}^{\varepsilon_2}) \cdot \dots \cdot \bar{\Omega}(e_{i_k, i_{k+1}}^{\varepsilon_k}).$$

Зафиксируем произвольно $z' \in L_1(1, 1)$ и $x \in \bar{\Omega}(z')$. Кроме того, для каждого $j \in D$ зафиксируем произвольно путь $z_{1,j} \in L_0(1, j)$ и элемент $\sigma_{1,j} \in \bar{\Omega}(z_{1,j})$.

Рассмотрим множество элементов группы G :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\substack{i,j=\overline{1,n} \\ p^{(f)}(i,j)>0}} x^{-1} \cdot \sigma_{1,i} \cdot \bar{\Omega}(e_{i,j}^{+1}) \cdot \sigma_{1,j}^{-1}.$$

Теорема 2. Пусть φ — регулярный гомоморфизм группы $G^{(m)}$ на группу G , тогда для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, любого распределения случайного вектора $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ последовательность распределений случайных величин (4) имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на группе $G^{(m)}$ тогда и только тогда, когда множество $\bar{\Omega}$ является системой образующих элементов группы $G^{(m)}$.

Доказательство. Случайные величины (14) не зависят от вектора $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$. Так как отображение Φ — гомоморфизм, то для произвольных $i, j \in \{1, \dots, n\}, N \geq 1$, удовлетворяющих условию $p^{(N)}(i, j) > 0$, любых $g_1, \dots, g_m \in G$ условное распределение случайной величины $\zeta_{i,j}^{(N)}$ при условии $\zeta_1 = g_1, \dots, \zeta_m = g_m$ совпадает с распределением произведения $(g_1, \dots, g_m)^{\Phi^N} \cdot \bar{\zeta}_{i,j}^{(N)}$. Отсюда следует, что свойство предельной равномерности для последовательностей распределений случайных величин (4) при произвольном распределении $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ равносильно свойству предельной равномерности для последовательностей распределений случайных величин (14).

Рассмотрим цепь Маркова $\mathfrak{S}^{(f)}$ с множеством состояний D , матрицей переходных вероятностей $\|p^{(f)}(i, j)\|_{i, j \in D}$ и некоторым положительным вектором начального распределения. Произвольной паре состояний $i, j \in D$, $p^{(f)}(i, j) > 0$, поставим в соответствие случайную величину со значениями в группе $G^{(m)}$, распределение которой совпадает с распределением случайной величины $\zeta_{i, j}^{(f)}$. В § 3 работы [2] были определены произведения $\eta_{i, j}^{(N)}$, $N \geq 1$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $p^{(N \cdot f)}(i, j) > 0$, случайных величин со значениями в $G^{(m)}$, распределения которых определяются цепью Маркова $\mathfrak{S}^{(f)}$ и исходными распределениями $\bar{\zeta}_{i, j}^{(f)}$, $i, j \in D$, $p^{(f)}(i, j) > 0$. Из определения этих произведений и условия $\text{ord } F | f$ следует, что если $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $N \geq 1$ и $p^{(N \cdot f)}(i, j) > 0$, то распределения случайных величин $\bar{\zeta}_{i, j}^{(N \cdot f)}$ и $\eta_{i, j}^{(N)}$ совпадают.

Пусть $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $N > f$, $p^{(N)}(i, j) > 0$, число $t \in \{1, \dots, f\}$ удовлетворяет условию $t \equiv N \pmod{f}$ и $s = \frac{N-t}{f}$. Тогда верно равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\bar{\zeta}_{i, j}^{(N)} = \bar{g} \right) &= p^{(N)}(i, j)^{-1} \cdot \sum_{E_k \in D} p^{(t)}(i, k) \cdot p^{(N-t)}(k, j) \times \\ &\times \left[\sum_{\bar{h} \in G^{(m)}} \mathbf{P} \left(\bar{\zeta}_{i, k}^{(t)} = (\bar{h})^{\Phi^{-N+t}} \right) \cdot \mathbf{P} \left(\eta_{k, j}^{(s)} = (\bar{h})^{-1} \cdot \bar{g} \right) \right], \quad \bar{g} \in G^{(m)}. \end{aligned}$$

Из данного соотношения следует, что свойство предельной равномерности последовательностей распределений случайных величин (14) на группе $G^{(m)}$ эквивалентно аналогичному свойству для случайных величин $\eta_{i, j}^{(N)}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $N \geq 1$, $p^{(N \cdot f)}(i, j) > 0$. Но тогда утверждение доказываемой теоремы есть следствие теоремы работы [5].

Следствие 2. Пусть φ — регулярный гомоморфизм группы $G^{(m)}$ на группу G и множество $\bar{\Omega}$ является системой образующих элементов группы $G^{(m)}$. Тогда для любого распределения случайной величины $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$ последовательность распределений случайных величин (3) имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на группе $G^{(m)}$.

Ранее утверждение, аналогичное теореме 2, но в терминах циклов цепи Маркова $\mathfrak{S}^{(f)}$ (см. доказательство), для случая абелевой группы G и положительно-регулярной цепи Маркова (1) было доказано С. В. Глуховым.

Список литературы

1. Бахтурин Ю. А. Основные структуры современной алгебры. — М.: Наука, 1990, 320 с.

2. Горчинский Ю. Н., Круглов И. А., Капитонов В. М. Вопросы теории распределений на конечных группах. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 1. — М.: ТВП, 1997, с. 85–112.
3. Егоров Б. А., Максимов Ю. И. Об одной последовательности случайных величин, принимающих значения из компактной коммутативной группы. — Теория вероятн. примен., 1968, т. 13, в. 4, с. 621–630.
4. Капитонов В. М. О скорости сходимости последовательности распределений, определяемых схемой авторегрессии на компактной группе. — Теория вероятн. примен., 1973, т. 18, в. 3, с. 608–615.
5. Круглов И. А. Принцип сходимости Клосса для произведений случайных величин со значениями в компактной группе, распределения которых определяются цепью Маркова. — Дискрет. матем., 2008, т. 20, в. 1, с. 38–51.
6. Максимов Ю. И. О цепях Маркова, связанных с двоичными регистрами сдвига со случайными элементами. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 1. — М.: ТВП, 1997, с. 203–220.
7. Сарымсаков Т. А. Основы теории процессов Маркова. — М.: ГИТТЛ, 1954, 208 с.