Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Пудовкина, Г. И. Хоруженко, Атака на шифрсистему ГОСТ 28147-89 с 12 связанными ключами, *Матем. вопр. криптогр.*, 2013, том 4, выпуск 2, 127–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 13:00:12

Атака на шифрсистему ГОСТ 28147-89 с 12 связанными ключами

М. А. Пудовкина, Г. И. Хоруженко

Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), Москва

Получено 18.IX.2012

Приведена атака на блочную шифрсистему ГОСТ 28147-89 с 12 связанными ключами. Она основана на комбинации методов бумеранга и связанных ключей и для произвольного *s*-блока позволяет найти все 256 бит ключа шифрования. В ряде случаев ключ шифрования может быть найден на ЭВМ за приемлемое время.

Ключевые слова: ГОСТ 28147-89, метод связанных ключей, метод бумеранга

An attack on the GOST 28147-89 block cipher with 12 related keys

M. A. Pudovkina, G. I. Khoruzenko

National Nuclear Research University, Moscow

Abstract. A key-recovery attack on the full GOST 28147-89 block cipher with 12 related keys is described. The attack is based on the related-key and boomerang techniques and allows to find all 256 bits of the master key for arbitrary *s*-boxes. In some cases the attack has practical complexity.

Key words: GOST 28147-89, related-key attack, boomerang attack

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 2, pp. 127–152 (Russian).

1. Введение

Блочная шифрсистема ГОСТ 28147-89 используется в государственных и ряде коммерческих организаций Российской Федерации. Алгоритм блочного шифрования ГОСТ 28147-89 основан на схеме Фейстеля. Число раундов равно 32, размер блока текста — 64 бита, длина ключа шифрования — 256 бит. Раундовая функция алгоритма шифрования представляет собой композицию преобразований: сложения с раундовым ключом по модулю 2^{32} , нелинейного преобразования (слой *s*-боксов) и преобразования циклического сдвига. В алгоритме развертывания ключа используются подблоки ключа шифрования в качестве раундовых ключей в определенном порядке.

Шифрсистема ГОСТ 28147-89 исследовалась с помощью разных подходов (см., например, [1] — [14]). Так в работах [1] — [3] приведены сдвиговые атаки, основанные на слабостях алгоритма развертывания ключа и раундовой функции. В работах [4] и [5] предложены атаки на основе метода отражений, а в работах [6] — [9] — атаки на основе алгебраического и разностного методов. К шифрсистеме ГОСТ 28147-89 применялась также атака на основе метода встречи посередине [10].

В последние годы появилось немало работ ([11]– [16]), посвященных криптоанализу шифрсистемы ГОСТ 28147-89 на основе метода связанных ключей и различных обобщений разностного метода. В [11] для шифрсистемы ГОСТ 28147-89 обсуждалась возможность построения разностной характеристики для 20 и 24 раундов при наличии двух связанных ключей. Дальнейшее продвижение связано с работой [12], в которой приведена разностная характеристика, для построения которой также применены два связанных ключа. Отмечено, что в зависимости от свойств *s*-блока на основе этой характеристики возможно атаковать редуцированную шифрсистему ГОСТ 28147-89 с 20–27 раундами. В работе [13], развивающей подход работы [12], описана атака на 31-раундовую шифрсистему ГОСТ 28147-89 на основе двух связанных ключей. Также приведен различитель, использующий два связанных ключа и отличающий алгоритм шифрования ГОСТ 28147-89 от случайной подстановки с вероятностью $1 - 2^{-64}$. Кроме того, предложена атака, позволяющая определить 12 бит раундового ключа 32 раунда с вероятностью 0.917 и использующая 2^{35} подобранных открытых текстов и 2^{35} шифрований.

В работе [14] приведена атака на алгоритм блочного шифрования ГОСТ 28147-89 на основе метода бумеранга со связанными ключами, которая содержит ряд ошибок и на самом деле не работает. Однако основная идея работы [14] позволяет подправить атаку и, внося дополнительные модификации, получить работающий алгоритм. Это было сделано в работе [15]. В этой

атаке для нахождения всего ключа шифрования при использовании s -боксов ($\hat{s} = (\tilde{s}_8, \dots, \tilde{s}_1)$) из [17] требуется 18 связанных ключей и проводится 2^{26} зашифрований. Однако есть ряд случаев, к которым эти результаты неприменимы. Если подстановка $\tilde{s}_8$ обладает линейным транслятором, то невозможно различить истинные биты ключа от ложных с помощью представленного в работе [15] различителя. Также данный различитель не позволяет найти раундовые ключи 25 и 26-го раундов. Тем самым определяются только 192 бита ключа шифрования. Для этого требуется 14 связанных ключей.

В работе [16] уменьшено число связанных ключей до двух и четырех при атаке на полнораундовую шифрсистему ГОСТ 28147-89. Она использует модифицированную усеченную характеристику работы [13]. Число связанных ключей зависит от (вероятностных) свойств s -блока. Недостатком атаки является ее применимость только к некоторому множеству s -блоков.

В данной работе проведена модификация атаки из [15], позволяющая восстановить весь ключ шифрования с 12 связанными ключами для произвольного s -блока. В ряде случаев ключ определяется на ЭВМ за практически приемлемое время. При наличии линейного транслятора для его нахождения используется модификация различителя работы [15]. Для восстановления раундовых ключей 25 и 26-го раундов применяется разностная характеристика, отличная от характеристики работы [15]. Предложенный способ нахождения ключа шифрования состоит из двух этапов. На первом этапе методом булмеранга со связанными ключами определяются множества кандидатов в раундовые ключи 32 и 31-го раундов, используя четверку связанных ключей. На втором этапе находятся множества кандидатов в раундовые ключи 30, 29, ..., 25-го раундов разностным методом со связанными ключами (применяются пары связанных ключей). Каждый из этапов предполагает наличие двух модификаций в зависимости от свойств подстановки $\tilde{s}_8$.

2. Описание шифрсистемы ГОСТ 28147-89

Пусть V_n — n -мерное векторное пространство над полем $GF(2)$; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $S(X)$ — множество всех подстановок на X ; $\oplus$ — покомпонентное сложение по модулю два векторов из $V_t, t \in \mathbb{N}$; $\alpha \lll t$ ($\alpha \ggg t$) — циклический сдвиг вектора α на t бит влево (вправо); $+_q$ — сложение по модулю q ; запись $x \in_U X$ означает, что x случайно и равномерно выбирается из множества X ; $X^\times = X \setminus \{0\}$; $K^{[r]}$ — множество кандидатов в раундовые ключи r -го раунда; $\tilde{\beta} = (\beta_3, \dots, \beta_0) \in V_4$; $\hat{\beta} = (\tilde{\beta}_7, \dots, \tilde{\beta}_0) \in V_{32}$; $\hat{s} = (\tilde{s}_8, \dots, \tilde{s}_1)$, $\hat{s}: V_{32} \rightarrow V_{32}$,

$$\widehat{s}(\widehat{\beta}) = (\widehat{s}_8(\widehat{\beta}_7), \dots, \widehat{s}_1(\widehat{\beta}_0)), \widehat{s}_i \in S(V_4); \alpha = (\widehat{\alpha}^{(7)}, \dots, \widehat{\alpha}^{(0)}) \in V_{256};$$

$$\varepsilon_i = \left(0, \dots, 0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_i\right) \in V_n, i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Каждый вектор $\alpha = (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0) \in V_n$ будем отождествлять с числом $\widetilde{\alpha} = 2^{n-1}\alpha_{n-1} + \dots + 2\alpha_1 + \alpha_0$. Таким образом, на V_n можно определить операции сложения и умножения по модулю 2^n . Эти операции обозначаются теми же символами, что и соответствующие операции над числами. Из контекста всегда будет ясно, о каких операциях идет речь.

Пусть $\alpha \in {}_U V_n$, а разностная характеристика d преобразования h_1, h_2 определена входной и выходной разностями $\delta, \omega \in V_n$ соответственно. Тогда вероятность

$$p = \mathbf{P}\{h_1(\alpha) \oplus h_2(\alpha \oplus \delta) = \omega\}$$

будем называть вероятностью разностной характеристики d . Такую разностную характеристику d будем обозначать следующим образом:

$$\delta \xrightarrow{h_1, h_2, p} \omega.$$

Алгоритм шифрования ГОСТ 28147-89 основан на схеме Фейстеля, состоит из 32 раундов, размер блока текста равен 64 битам, длина ключа — 256 бит.

Пусть $\alpha^{(0)} = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_0^{(0)})$ — открытый текст из V_{32}^2 , $k = (\widehat{k}_1, \dots, \widehat{k}_8)$ — ключ шифрования из V_{32}^8 .

На i -м раунде раундовый ключ $\widehat{k}^{(i)} \in V_{32}$ задается равенствами

$$\widehat{k}^{(i)} = \begin{cases} \widehat{k}_i, & \text{если } 1 \leq i \leq 8, \\ \widehat{k}_{i-8}, & \text{если } 9 \leq i \leq 16, \\ \widehat{k}_{i-16}, & \text{если } 17 \leq i \leq 24, \\ \widehat{k}_{33-i}, & \text{если } 25 \leq i \leq 32. \end{cases}$$

Пусть $\widehat{\beta} \in V_{32}$. Определим функцию $h_{\widehat{k}^{(i)}}: V_{32}^2 \rightarrow V_{32}^2$ следующим образом:

$$h_{\widehat{k}^{(i)}}(\widehat{\beta}) = \widehat{s}(\widehat{k}^{(i)} +_{2^{32}} \widehat{\beta}) \lll 11.$$

Тогда действие раундовой функции $g_{\hat{k}^{(i)}}: V_{32}^2 \rightarrow V_{32}^2$ алгоритма шифрования ГОСТ 28147-89 представляется в виде

$$\alpha^{(i)} = \left(\hat{\alpha}_0^{(i-1)}, \hat{\alpha}_1^{(i-1)} \oplus h_{\hat{k}^{(i)}} \left(\hat{\alpha}_0^{(i-1)} \right) \right), \quad i \in \{1, \dots, 32\}.$$

Положим $k(j) = (\hat{k}^{(j)}, \dots, \hat{k}^{(1)})$, $j = 1, \dots, 32$. Тогда функция зашифрования $f_{k(32)}: V_{32}^2 \rightarrow V_{32}^2$ есть $f_{k(32)} = g_{\hat{k}^{(32)}} \dots g_{\hat{k}^{(1)}}$.

Отметим, что финальная перестановка в описании алгоритма шифрования ГОСТ 28147-89 нами опущена, поскольку она не существенна для дальнейшего изложения.

В работе используются общепринятые терминология и подходы методов разностного, бумеранга и связанных ключей (см., например, [18–20]).

3. Атака на алгоритм ГОСТ 28147-89 с 12 связанными ключами

В [15] приведена атака на алгоритм блочного шифрования ГОСТ 28147-89 на основе метода бумеранга с 18 связанными ключами. При анализе данной работы были определены случаи, к которым приведенная в ней атака неприменима. Эта ситуация имеет место, если подстановка $\tilde{s}_8$ обладает линейным транслятором $\tilde{\varepsilon}_3$, т. е. выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\{\tilde{s}_8(\tilde{\alpha}) \oplus \tilde{s}_8(\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\varepsilon}_3) = \tilde{\omega}\} \in \{0, 1\}, \quad \tilde{\alpha} \in_U V_4, \tilde{\omega} \in V_4^\times,$$

в силу которого невозможно отличить истинные биты ключа от ложных с помощью представленного в [15] различителя. Атака не позволяет также найти раундовые ключи 25, 26-го раундов алгоритма блочного шифрования ГОСТ 28147-89.

В данном разделе приводится модификация атаки методом бумеранга со связанными ключами из [15], позволяющая восстанавливать все 256 бит ключа шифрования при произвольном s -боксе. В ряде случаев ключ шифрования можно найти на ЭВМ за приемлемое время. Кроме того, число связанных ключей уменьшается до 12. При наличии линейного транслятора у подстановки $\tilde{s}_8$ для восстановления раундового ключа i -го раунда, $i \in \{27, \dots, 32\}$, используется модификация различителя работы [15]. Для определения раундовых ключей 25 и 26-го раундов предложена новая разностная характеристика.

Рассматриваемый способ восстановления ключа шифрования состоит из двух основных этапов. На первом этапе определяются множества $K^{[32]}$,

$K^{[31]}$ методом бумеранга со связанными ключами (используются четверки связанных ключей), на втором этапе находятся множества $K^{[30]}, \dots, K^{[25]}$ разностным методом со связанными ключами (используются пары связанных ключей). Каждый из этапов предполагает наличие двух модификаций в зависимости от свойств подстановки $\tilde{s}_8$.

3.1. Нахождение множеств $K^{[32]}, K^{[31]}$

В данном разделе рассматривается метод нахождения множеств $K^{[32]}, K^{[31]}$. Если подстановка $\tilde{s}_8$ не обладает линейным транслятором, то множества $K^{[32]}, K^{[31]}$ определяются методом бумеранга со связанными ключами аналогично работе [15]. Если же подстановка $\tilde{s}_8$ обладает линейным транслятором, то используется другой ключевой различитель, построенный с помощью следующего утверждения.

Утверждение 1. Если $\tilde{s}_8 \in S(V_4)$ обладает линейным транслятором $\tilde{\varepsilon}_3$, то существует такая разность $\tilde{\omega} \in V_4^\times$, что

$$\mathbf{P} \{ \tilde{s}_8 (\tilde{\alpha} +_{16} 1) \oplus \tilde{s}_8 (\tilde{\alpha}) = \tilde{\omega} \} = 2^{-3}, \tilde{\alpha} \in_U V_4.$$

Данное утверждение было доказано с помощью вычислительного эксперимента. При проведении эксперимента утверждение 1 было проверено для всех подстановок $\tilde{s}_8 \in S(V_4)$, обладающих фиксированным линейным транслятором $\tilde{\varepsilon}_3$.

Далее приводятся утверждения 2 и 3, на которых основан алгоритм 3.1.1 нахождения множеств $K^{[r]}$ кандидатов в раундовые ключи r -го раунда при наличии множеств $K^{[32]}, \dots, K^{[r+1]}$ в случаях, когда подстановка $\tilde{s}_8$ обладает линейным транслятором $\tilde{\varepsilon}_3$, $r \in \{27, \dots, 32\}$ ($K^{[33]} = \emptyset$ при $r = 32$). На первых двух этапах алгоритма 3.1.1 производится восстановление старших трех бит раундового ключа с помощью утверждения 2, на третьем этапе — восстановление младших 27 бит на основе утверждения 3.

Утверждение 2. Пусть подстановка $\tilde{s}_8 \in S(V_4)$ обладает линейным транслятором $\tilde{\varepsilon}_3$, $\hat{k} \in V_{32}$ и вектор $\hat{\gamma}_0 \in V_{32}$ задан равенством

$$\hat{\gamma}_0 = \left(\hat{s}(\hat{k}) \oplus \hat{s}(\hat{k} \oplus \hat{\varepsilon}_{27}) \right) \lll 11.$$

Тогда существует такой вектор $\tilde{\tau} \in V_4$, что при

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_0 \oplus \left(\hat{s} \left(\left(\tilde{\tau}, \tilde{\varepsilon}_3, \tilde{0}, \dots, \tilde{0} \right) +_{2^{32}} \hat{k} \right) \oplus \right. \\ \left. \oplus \hat{s} \left(\left(\tilde{\tau}, \tilde{\varepsilon}_3, \tilde{0}, \dots, \tilde{0} \right) +_{2^{32}} \left(\hat{k} \oplus \hat{\varepsilon}_{27} \right) \right) \right) \lll 11 \end{aligned}$$

выполняются равенства

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_1 &= \left(0, \dots, 0, \tilde{\delta}, \underbrace{0, \dots, 0}_7\right) \in V_{32}, \quad \tilde{\delta} \in V_4^\times, \\ \mathbf{P} \left\{ \tilde{s}_8 (\tilde{\tau} +_{16} \tilde{\kappa}) \oplus \tilde{s}_8 (\tilde{\tau} +_{16} \tilde{\kappa} +_{16} 1) = \tilde{\delta} \right\} &= 2^{-3}, \quad \tilde{\kappa} \in_U V_4.\end{aligned}$$

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Утверждение 3. Пусть подстановка $\tilde{s}_8 \in S(V_4)$ обладает линейным транслятором $\tilde{\varepsilon}_3$, $\hat{k} = (k_{31}, \dots, k_0) \in V_{32}$, $t \in \{0, \dots, 26\}$, и вектор $\hat{\kappa} = (\kappa_{31}, \dots, \kappa_0) \in V_{32}$ определен равенством

$$\kappa_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i > 26 \text{ или } i < t, \\ k_i \oplus 1, & \text{если } t < i \leq 26, \\ 1, & \text{если } i = t, \end{cases}$$

а вектор $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_0) \in V_8$ — равенством

$$(0, \dots, 0, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_0, 0, 0, 0) = \left(\hat{s} \left(\hat{\kappa} +_{232} \hat{k} \right) \oplus \hat{s} \left(\hat{\kappa} +_{232} \left(\hat{k} \oplus \hat{\varepsilon}_{27} \right) \right) \right) \lll 11.$$

Условие $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $k_t = 0$.

Доказательство очевидно.

Для нахождения множества $K^{[r]}$ в алгоритме 3.1.1 используется четверка связанных ключей $k, k', k'', k''' \in V_{256}$ вида

$$\begin{aligned}k \oplus k' &= k'' \oplus k''' = (\hat{\varepsilon}_{31}, \hat{0}, \hat{\varepsilon}_{31}, \hat{0}, \hat{\varepsilon}_{31}, \hat{0}, \hat{\varepsilon}_{31}, \hat{0}), \\ k \oplus k'' &= k' \oplus k''' = (\underbrace{\hat{0}, \dots, \hat{0}}_{32-r}, \hat{\varepsilon}_{27}, \underbrace{\hat{0}, \dots, \hat{0}}_{r-25}).\end{aligned}$$

На первом этапе алгоритма определяется значение $\hat{\gamma}_0$, на втором находится множество Θ пар $(\tilde{\tau}, \tilde{\delta})$ в соответствии с утверждением 2, после чего определяются три старших бита раундового ключа. Из утверждения 2 и того, что на первых двух этапах осуществляется перебор всех возможных значений $\tilde{\gamma}, \tilde{\tau}, \tilde{\delta} \in V_4$, следует, что в результате выполнения этих этапов всегда найдутся вектор $\hat{\gamma}_0$ и множество $\Theta \neq \emptyset$. Алгоритм 3.1.1 приведен в приложении А. Оценка трудоемкости алгоритма и необходимое число открытых текстов приведены в разделе 4.

3.2. Нахождение множеств $K^{[30]}, \dots, K^{[25]}$ кандидатов в раундовые ключи для раундов 30–25

В данном разделе рассматриваются методы нахождения множества $K^{[r]}$ кандидатов в раундовые ключи r -го раунда при наличии множеств $K^{[32]}, \dots, K^{[r+1]}$, $r \in \{25, \dots, 30\}$, с помощью двух связанных ключей. Если подстановка $\tilde{s}_8$ не обладает линейным транслятором, то для восстановления множеств $K^{[r]}$, $r \in \{25, \dots, 30\}$, используется алгоритм 3.2.1. Он основан на ключевом различителе из работы [15] и разностной характеристике, приведенной в утверждении 4. В алгоритме 3.2.1 для нахождения множества $K^{[r]}$ используется пара таких связанных ключей $k, k' \in V_{256}$, что

$$k \oplus k' = \left(\underbrace{\hat{0}, \dots, \hat{0}}_{r-25}, \hat{\varepsilon}_{31}, \hat{\delta}, \hat{\varepsilon}_{31}, \underbrace{\hat{0}, \dots, \hat{0}}_{30-r} \right), \quad \hat{\delta} = \left(0, \dots, 0, \hat{\delta}, \underbrace{0, \dots, 0}_7 \right).$$

В следующем утверждении описана разностная характеристика, применяемая в алгоритме 3.2.1. Разность между связанными ключами задается таким образом, чтобы нулевая разность между соответствующими промежуточными текстами сохранялась после трех раундов шифрования с некоторой ненулевой вероятностью. Используя данное свойство, строится разностная характеристика для случаев $r \in \{25, \dots, 30\}$.

Утверждение 4. Пусть $\alpha^{(0)} = (\hat{\alpha}_1^{(0)}, \hat{\alpha}_0^{(0)}) \in_U V_{32}^2$, $\hat{k}^{(i)}, \hat{k}'^{(i)} \in V_{32}$, $\hat{\delta} \in V_{32}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, и выполнены соотношения

$$\hat{k}^{(1)} \oplus \hat{k}'^{(1)} = \hat{k}^{(3)} \oplus \hat{k}'^{(3)} = \hat{\varepsilon}_{31}, \quad \hat{k}^{(2)} \oplus \hat{k}'^{(2)} = \hat{\delta}.$$

Пусть также

$$\alpha^{(3)} = g_{\hat{k}^{(3)}} g_{\hat{k}^{(2)}} g_{\hat{k}^{(1)}} (\alpha^{(0)}), \quad \alpha'^{(3)} = g_{\hat{k}'^{(3)}} g_{\hat{k}'^{(2)}} g_{\hat{k}'^{(1)}} (\alpha^{(0)}).$$

Тогда

$$2^{-10} \leq \mathbf{P} \left\{ \alpha^{(3)} = \alpha'^{(3)} \right\} \leq 2^{-1}.$$

Доказательство данного утверждения приводится в приложении Б.

Алгоритм 3.2.1 представлен в приложении В. Оценка трудоемкости алгоритма 3.2.1 приводится в разделе 4.

Если подстановка $\tilde{s}_8$ обладает линейным транслятором, то для нахождения множеств $K^{[r]}$, $r \in \{25, \dots, 30\}$, используется алгоритм 3.2.2 с разностной характеристикой, аналогичной приведенной в утверждении 4. Его ключевой различитель основан на ключевом различителе алгоритма 3.1.1.

В алгоритме 3.2.2 для нахождения множества $K^{[r]}$ применяется такая пара связанных ключей $k, k' \in V_{256}$, что

$$k \oplus k' = \left(\underbrace{\hat{0}, \dots, \hat{0}}_{r-25}, \hat{\varepsilon}_{27}, \hat{\delta}', \hat{\varepsilon}_{27}, \underbrace{\hat{0}, \dots, \hat{0}}_{30-r} \right),$$

где $\hat{\delta}' = (0, \dots, 0, \tilde{\delta}', 0, 0, 0)$, $\tilde{\delta}' \in V_4^\times$.

Алгоритм 3.2.2 представлен в приложении Г, а его оценка трудоемкости приведена в разделе 4.

Таким образом, в зависимости от свойств подстановки $\tilde{s}_8$ ключ шифрования находится с использованием 12 связанных ключей посредством алгоритмов I.1 и I.2.

Если $\tilde{s}_8$ не обладает линейным транслятором $\tilde{\varepsilon}_3$, то применяется алгоритм I.1, состоящий из следующих этапов:

1. Множества $K^{[32]}$, $K^{[31]}$ находятся с помощью алгоритма из [15].
2. Оставшиеся биты ключа шифрования восстанавливаются посредством алгоритма 3.2.1.

Если $\tilde{s}_8$ обладает линейным транслятором $\tilde{\varepsilon}_3$, то используется алгоритм I.2, состоящий из следующих этапов:

1. Для нахождения множеств $K^{[32]}$, $K^{[31]}$ применяется алгоритм 3.1.1.
2. Оставшиеся биты ключа шифрования находятся с помощью алгоритма 3.2.2.

4. Оценки трудоемкости атак

В данном разделе представлены оценки трудоемкости атак с использованием 12 связанных ключей.

Приведем сначала оценку трудоемкости алгоритма 3.1.1. В нем применены подходы, аналогичные атаке методом бумеранга со связанными ключами из [15], но выбран другой различитель ключа. Легко проверить, что алгоритм 3.1.1 использует

$$T_{32}^{(3.1.1)} = 2^4 \cdot \left(4 + \frac{1}{4}\right) + 2^8 \cdot \left(4 + \frac{1}{4}\right) + 27 \cdot 2^8 \cdot \left(4 + \frac{1}{4}\right) \approx 2^{14.97},$$

$$T_{31}^{(3.1.1)} = 2^2 \cdot \left(2^4 \cdot \left(4 + \frac{1}{4}\right) + 2^8 \cdot \left(4 + \frac{1}{4}\right) + 27 \cdot 2^8 \cdot \left(4 + \frac{1}{4}\right)\right) \approx 2^{16.97}$$

операций шифрования для 32 и 31 раундов соответственно, где $2^4 \cdot 4$ — число шифрований на первом этапе, $2^8 \cdot 4$ — на втором этапе, и $27 \cdot 2^8 \cdot 4$ — на третьем этапе. Для успешного выполнения алгоритма 3.1.1 требуется

$$n_{0,32}^{(3.1.1)} = (1 + 2^4) + (2^4 + 2^8) + (27 + 27 \cdot 2^4) \approx 2^{9.55},$$

$$n_{0,31}^{(3.1.1)} = 2^2 \cdot ((1 + 2^4) + (2^4 + 2^8) + (27 + 27 \cdot 2^4)) \approx 2^{11.55}$$

выбранных шифртекстов для 32 и 31-го раундов соответственно, а вероятность успешного выполнения алгоритма равна единице.

Здесь и далее фраза «успешное выполнение алгоритма» означает, что алгоритм находит решение задачи. Соответственно, вероятность наступления данного события при случайном и равновероятном выборе входных параметров будем называть вероятностью успешного выполнения алгоритма.

Отметим, что

$$|K^{[r]}| = 2^2 \cdot |K^{[r+1]}|, \quad r \in \{31, 32\}, \text{ и } |K^{[33]}| = 1.$$

Рассмотрим теперь вероятностный алгоритм 3.2.1. В нем используются разностные соотношения из утверждения 4 и два связанных ключа. Пусть $p^{(3.2.1)}$ — вероятность разностной характеристики, применяемой в алгоритме 3.2.1.

Поскольку разностная характеристика, заданная в утверждении 4, используется дважды, справедливо неравенство

$$(2^{-10})^2 \cdot 2^{-1} \leq p^{(3.2.1)} \leq (2^{-1})^2 \cdot 2^{-1}.$$

Пусть $\delta^{(3.2.1)}$ — вероятность успешного выполнения алгоритма 3.2.1, $\delta^{(3.2.1)} \in (0, 1)$. Равенство

$$\delta^{(3.2.1)} = \left(1 - \left(1 - p^{(3.2.1)}\right)^{n_0'^{(3.2.1)}}\right)^{(2^4+27)} \quad (1)$$

определяет необходимое число $n_0^{(3.2.1)}$ различных пар опробуемых шифртекстов для получения пар, удовлетворяющих разностным характеристикам в соответствии с описанием алгоритма 3.2.1. Логарифмируя соотношение (1), получаем

$$n_0^{(3.2.1)} \left(\delta^{(3.2.1)} \right) = \log_{(1-p^{(3.2.1)})} \left(1 - \sqrt[2^4+2^7]{\delta^{(3.2.1)}} \right).$$

Число $T^{(3.2.1)} \left(\delta^{(3.2.1)} \right)$ операций шифрования в алгоритме 3.2.1 оценивается величиной $2^{17} n_0^{(3.2.1)} \left(\delta^{(3.2.1)} \right)$, а число шифртекстов для успешного нахождения ключа — величиной $n_0^{(3.2.1)} \left(\delta^{(3.2.1)} \right) = 2^{10} n_0'^{(3.2.1)} \left(\delta^{(3.2.1)} \right)$. Для оценки трудоемкости второго этапа алгоритма 3.2.1 используются оценки работы [15].

Аналогичным образом можно получить оценки для алгоритма 3.2.2:

$$\begin{aligned} \left(2^{-10} \cdot 2^{-2} \right)^2 \cdot 2^{-1} &\leq p^{(3.2.2)} \leq \left(2^{-1} \cdot 2^{-2} \right)^2 \cdot 2^{-1}, \\ n_0'^{(3.2.2)} \left(\delta^{(3.2.2)} \right) &= \log_{(1-p^{(3.2.2)})} \left(1 - \sqrt[2^4+2^8+2^8 \cdot 2^7]{\delta^{(3.2.2)}} \right), \\ T^{(3.2.2)} \left(\delta^{(3.2.2)} \right) &= 2^{14.97} n_0'^{(3.2.2)} \left(\delta^{(3.2.2)} \right), \\ n_0^{(3.2.2)} \left(\delta^{(3.2.2)} \right) &= 2^{9.55} n_0'^{(3.2.2)} \left(\delta^{(3.2.2)} \right), \\ |K^{[r]}| &= 2^2 \cdot |K^{[r+1]}|, r \in \{25, \dots, 30\}. \end{aligned}$$

Пусть $\delta = 1 - 10^{-3}$ — вероятность успеха обоих алгоритмов 3.2.1 и 3.2.2. Тогда числа шифрований в алгоритмах I.1 и I.2 можно оценить величинами

$$\begin{aligned} T^{(I.1)} &= \left(2^{17} + 2 \cdot 2^{17} \right) + 2T^{(3.2.1)} \cdot \left(1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} \right) \approx \\ &\approx 3 \cdot 2^{17} + 2^{11.41} T^{(3.2.1)}, \\ T^{(I.2)} &= \left(T_{32}^{(3.1.1)} + T_{31}^{(3.1.1)} \right) + 2^2 T^{(3.2.2)} \cdot \left(1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} \right) \approx \\ &\approx 5 \cdot 2^{14.97} + 2^{12.41} T^{(3.2.2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$2^{34.73} \leq T^{(I.1)} \leq 2^{56.83}, \quad 2^{41.38} \leq T^{(I.2)} \leq 2^{63.39}.$$

Приведем также оценки необходимого числа текстов, а также вероятности успеха для алгоритмов I.1 и I.2:

$$\begin{aligned} n^{(I.1)} &= 2^{10} + 6 \cdot n^{(3.2.1)}(\delta), n^{(I.2)} = n_{0,31} + n_{0,32} + 6 \cdot n^{(3.2.2)}(\delta) \\ 2^{16.32} &\leq n^{(I.1)} \leq 2^{38.42}, 2^{20.97} \leq n^{(I.2)} \leq 2^{42.98}, \\ \delta^{(I.1)} &= \delta^6 = 0.994, \delta^{(I.2)} = \delta^8 = 0.992. \end{aligned}$$

Список литературы

1. *Biham E., Dunkelman O., Keller N.* Improved slide attacks // FSE-2007. — Lect. Notes Comput. Sci. — 2007. — V. 459. — P. 153–166.
2. *Biryukov A., Wagner D.* Advanced slide attacks // Eurocrypt-2000. — Lect. Notes Comput. Sci. — 2000. — V. 1807. — P. 589–606.
3. *Grossman E. K., Tuckerman B.* Analysis of weakened Feistel like cipher // Proc. Int. Conf. on Communications. — Alger Press, 1978. — P. 46.3.1–46.3.5.
4. *Kara O.* Reflection cryptanalysis of some ciphers // INDOCRYPT-2008. — Lect. Notes Comput. Sci. — 2008. — V. 5365. — P. 294–307.
5. *Isobe T.* A single-key attack on the full GOST block cipher // FSE-2011. — Lect. Notes Comput. Sci., 2011. — V. 6733. — P. 290–305.
6. *Courtois N.* Security evaluation of GOST 28147-89 in view of international standardisation. — 2011. — <http://eprint.iacr.org/2011/211>.
7. *Courtois N. T., Misztal M.* Differential cryptanalysis of GOST. — 2011. — <http://eprint.iacr.org/2011/312>.
8. *Dinur I., Dunkelman O., Shamir A.* Improved attacks on full GOST. — 2011. — <http://eprint.iacr.org/2011/558>.
9. *Courtois N.* An improved differential attack on full GOST. — 2012. — <http://eprint.iacr.org/2012/138>.
10. *Zhu B., Gong G.* Multidimensional meet-in-the-middle attack and its applications to GOST, KTANTAN and Hummingbird-2. — 2011. — <http://eprint.iacr.org/2011/619>.
11. *Kelsey J., Shneier B., Wagner D.* Key-schedule cryptanalysis of IDEA, GDES, GOST, SAFER, and Triple-DES // CRYPTO'96. — Lect. Notes Comput. Sci. — 1996. — P. 237–251.
12. *Seki H., Kaneko T.* Differential cryptanalysis of reduced rounds of Gost // Selected areas in cryptography. — Lect. Notes Comput. Sci., Springer-Verlag. — 2000. — V. 2012. — P. 315–323.

13. Ko Y., Hong S., Lee W., Lee S., Kang J.-S. Related key differential attacks on 27 rounds of Xtea and full-round Gost // FSE 2004. — Lect. Notes Comput. Sci. — 2004. — V. 3017. — P. 299–316.
14. Fleischmann E., Gorski M., Huhne J.-H., Lucks S. Key recovery attack on full GOST block cipher with zero time and memory // WEWoRC. — 2009.
15. Rudskoy V. On zero practical significance of “key recovery attack on full GOST block cipher with zero time and memory”. — 2010. — <http://eprint.iacr.org/2010>.
16. Pudovkina M., Khoruzhenko G. Related-key attacks on the full GOST block cipher with two or four related keys // BulCrypt-2012. — Sofia, 2012. — P. 107–127.
17. Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. — М.: Триумф, 2002.
18. Knudsen L.R. Cryptanalysis of LOKI91 // AUSCRYPT’92. — Lect. Notes Comput. Sci. — 1993. — V. 718. — P. 196–208.
19. Biham E., Shamir A. Differential cryptanalysis of the Data Encryption Standard. — Springer-Verlag, Berlin, 1993.
20. Wagner D. The boomerang attack // FSE’99. — Lect. Notes Comput. Sci. — 1990. — V. 1636. — P. 156–170.

5. Приложения

5.1. Приложение А. Алгоритм 3.1.1

Здесь и далее под символом «:=» будем понимать оператор присваивания. В приведенном ниже алгоритме 3.1.1 для нахождения множества $K^{[r]}$ используется четверка связанных ключей $k, k', k'', k''' \in V_{256}$ вида

$$\begin{aligned} k \oplus k' &= k'' \oplus k''' = (\widehat{\varepsilon}_{31}, \widehat{0}, \widehat{\varepsilon}_{31}, \widehat{0}, \widehat{\varepsilon}_{31}, \widehat{0}, \widehat{\varepsilon}_{31}, \widehat{0}), \\ k \oplus k'' &= k' \oplus k''' = (\underbrace{\widehat{0}, \dots, \widehat{0}}_{32-r}, \widehat{\varepsilon}_{27}, \underbrace{\widehat{0}, \dots, \widehat{0}}_{r-25}). \end{aligned}$$

Алгоритм 3.1.1. Нахождение множества $K^{[r]}$ кандидатов в раундовые ключи r -го раунда методом бумеранга на связанных ключах.

Этап I. Нахождение разности $\widehat{\gamma}_0 \in V_{32}^\times$.

Вход: $K^{[32]}, \dots, K^{[r+1]}$ — множества кандидатов в раундовые ключи для раундов $32 - (r + 1)$ ($K^{[33]} = \emptyset$ при $r = 32$).

Для всех $\widehat{k}^{(32)} \in K^{[32]}, \dots, \widehat{k}^{(r+1)} \in K^{[r+1]}$ выполняем:

1. Полагаем $\widehat{\gamma}_0 := \widehat{0}$.

2. Для всех $\tilde{\gamma} \in V_4$ выполняем:

2.1. Полагаем

$$\alpha^{(32)} := g_{\hat{k}^{(32)}} \dots g_{\hat{k}^{(r+1)}} (\hat{0}, \hat{0}),$$

$$\alpha'^{(32)} := g_{\hat{k}''^{(32)}} \dots g_{\hat{k}''^{(r+1)}} (\hat{0}, (0, \dots, 0, \tilde{\gamma}, 0, 0, 0)).$$

2.2. Вычисляем

$$\alpha^{(0)} := f_k^{-1} (\alpha^{(32)}), \quad \alpha'^{(0)} := f_{k''}^{-1} (\alpha'^{(32)}).$$

2.3. Полагаем

$$\beta^{(0)} := \alpha^{(0)} \oplus (\hat{0}, \hat{\varepsilon}_{31}), \quad \beta'^{(0)} := \alpha'^{(0)} \oplus (\hat{0}, \hat{\varepsilon}_{31}).$$

2.4. Вычисляем

$$\beta^{(32)} := f_{k'} (\beta^{(0)}), \quad \beta'^{(32)} := f_{k'''} (\beta'^{(0)}).$$

2.5. Находим

$$\beta^{(r)} := g_{\hat{k}^{(r+1)}}^{-1} (\dots g_{\hat{k}^{(32)}}^{-1} (\beta^{(32)})), \quad \beta'^{(r)} := g_{\hat{k}'^{(r+1)}}^{-1} (\dots g_{\hat{k}'^{(32)}}^{-1} (\beta'^{(32)})).$$

2.6. Полагаем

$$\hat{\lambda} = (\tilde{\lambda}_7, \dots, \tilde{\lambda}_0) := (\hat{\beta}_0^{(r)} \oplus \hat{\beta}'_0^{(r)}) \ggg 3.$$

2.7. Если $\hat{\beta}_1^{(r)} \oplus \hat{\beta}'_1^{(r)} = \hat{0}$ и $\tilde{\lambda}_j = \tilde{0}$, $j = 1, \dots, 7$, то полагаем $\hat{\gamma}_0 := (0, \dots, 0, \tilde{\gamma}, 0, 0, 0)$ и завершаем работу алгоритма.

Выход: разность $\hat{\gamma}_0$.

Этап II. Нахождение битов $(k_{31}^{(r)}, k_{30}^{(r)}, k_{29}^{(r)}, k_{28}^{(r)})$ раундового ключа $\hat{k}^{(r)}$.

Вход: $K^{[32]}, \dots, K^{[r+1]}$ — множества кандидатов в раундовые ключи для раундов $32 - (r + 1)$, разность $\hat{\gamma}_0 \in V_{32}$.

Для всех $\hat{k}^{(32)} \in K^{[32]}, \dots, \hat{k}^{(r+1)} \in K^{[r+1]}$ выполняем:

1. Полагаем $\tilde{K}^{[r]} := \emptyset, \Theta := \emptyset$.

2. Для всех $\tilde{\tau} \in V_4, \tilde{\delta} \in V_4^\times$ выполняем:

2.1. Полагаем

$$\alpha^{(32)} := g_{\hat{k}^{(32)}} \left(\dots g_{\hat{k}^{(r+1)}} \left(\left(\tilde{\tau}, \underbrace{\tilde{0}, \dots, \tilde{0}}_7 \right) \oplus \hat{\varepsilon}_{27}, \hat{0} \right) \dots \right),$$

$$\alpha'^{(32)} := g_{\hat{k}''^{(32)}} (\dots g_{\hat{k}''^{(r+1)}} ((\tilde{\tau}, \underbrace{\tilde{0}, \dots, \tilde{0}}_7) \oplus \hat{\varepsilon}_{27}, \hat{\gamma}_0 \oplus (0, \dots, 0, \tilde{\delta}, 0, \dots, 0)) \dots).$$

2.2. Вычисляем

$$\alpha^{(0)} := f_k^{-1} \left(\alpha^{(32)} \right), \quad \alpha'^{(0)} := f_{k''}^{-1} \left(\alpha'^{(32)} \right).$$

2.3. Полагаем

$$\beta^{(0)} := \alpha^{(0)} \oplus (\hat{0}, \hat{\varepsilon}_{31}), \quad \beta'^{(0)} := \alpha'^{(0)} \oplus (\hat{0}, \hat{\varepsilon}_{31}).$$

2.4. Вычисляем

$$\beta^{(32)} := f_{k'} \left(\beta^{(0)} \right), \quad \beta'^{(32)} := f_{k'''} \left(\beta'^{(0)} \right).$$

2.5. Вычисляем

$$\beta^{(r)} := g_{\hat{k}^{(r+1)}}^{-1} \dots g_{\hat{k}^{(32)}}^{-1} \left(\beta^{(32)} \right), \quad \beta'^{(r)} := g_{\hat{k}'^{(r+1)}}^{-1} \dots g_{\hat{k}'^{(32)}}^{-1} \left(\beta'^{(32)} \right).$$

2.6. Находим

$$\hat{\lambda} = (\tilde{\lambda}_7, \dots, \tilde{\lambda}_0) := (\hat{\beta}_0^{(r)} \oplus \hat{\beta}_0^{(r)}) \ggg 3.$$

2.7. Если $\hat{\beta}_1^{(r)} \oplus \hat{\beta}_1'^{(r)} = \hat{0}$ и $\tilde{\lambda}_j = \tilde{0}, j = 2, \dots, 7$, то полагаем $\Theta := \Theta \cup \left\{ (\tilde{\tau}, \tilde{\delta}) \right\}$.

3. Для всех $\tilde{\kappa} = (\tilde{\kappa}_3, \tilde{\kappa}_2, \tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_0) \in V_4$ выполняем:

3.1. Полагаем $v_{\tilde{\kappa}} := 0$.

3.2. Для всех $(\tilde{\tau}, \tilde{\delta}) \in \Theta$ выполняем: если

$$\tilde{s}_8 (\tilde{\tau} +_{16} \tilde{\kappa}) \oplus \tilde{s}_8 (\tilde{\tau} +_{16} \tilde{\kappa} +_{16} 1) = \tilde{\delta},$$

то $v_{\tilde{\kappa}} := v_{\tilde{\kappa}} + 1$.

3.3. Полагаем $\tilde{K}^{[r]} := \left\{ \tilde{\kappa} \in V_4 \mid v_{\tilde{\kappa}} = \max \left\{ v_{\tilde{\lambda}} \mid \tilde{\lambda} \in V_4 \right\} \right\}$.

Выход: множество $\tilde{K}^{[r]}$.

Этап III. Нахождение битов $k_0^{(r)}, \dots, k_{26}^{(r)}$ раундового ключа $\hat{k}^{(r)}$.

Вход: $K^{[32]}, \dots, K^{[r+1]}$ — множества кандидатов в раундовые ключи для раундов 32— $(r+1)$.

1. Полагаем $\bar{k} := \hat{0}$, $\kappa := \hat{0}$.

2. Для всех $t \in \{0, \dots, 26\}$ и для всех $\gamma_3 = (\tilde{\gamma}_{3,1}, \tilde{\gamma}_{3,0}) \in V_8$ выполняем:

2.1. Полагаем

$$\alpha^{(32)} := g_{\hat{k}^{(32)}} \dots g_{\hat{k}^{(r+1)}} \left(\kappa \oplus \hat{\varepsilon}_{26-t}, \hat{0} \right),$$

$$\alpha'^{(32)} := g_{\hat{k}''^{(32)}} \dots g_{\hat{k}''^{(r+1)}} \left(\kappa \oplus \hat{\varepsilon}_{26-t}, \underbrace{\left(0, \dots, 0, \gamma_3, 0, 0, 0 \right)}_{21} \right).$$

2.2. Вычисляем

$$\alpha^{(0)} := f_k^{-1} \left(\alpha^{(32)} \right), \quad \alpha'^{(0)} := f_{k''}^{-1} \left(\alpha'^{(32)} \right).$$

2.3. Полагаем

$$\beta^{(0)} := \alpha^{(0)} \oplus \left(\hat{0}, \hat{\varepsilon}_{31} \right), \quad \beta'^{(0)} := \alpha'^{(0)} \oplus \left(\hat{0}, \hat{\varepsilon}_{31} \right).$$

2.4. Вычисляем

$$\beta^{(32)} := f_{k'} \left(\beta^{(0)} \right), \quad \beta'^{(32)} := f_{k'''} \left(\beta'^{(0)} \right).$$

2.5. Находим

$$\beta^{(r)} := g_{\hat{k}^{(r+1)}}^{-1} \dots g_{\hat{k}^{(32)}}^{-1} \left(\beta^{(32)} \right), \quad \beta'^{(r)} := g_{\hat{k}'^{(r+1)}}^{-1} \dots g_{\hat{k}'^{(32)}}^{-1} \left(\beta'^{(32)} \right).$$

2.6. Полагаем

$$\hat{\lambda} = (\tilde{\lambda}_7, \dots, \tilde{\lambda}_0) := (\hat{\beta}_0^{(r)} \oplus \hat{\beta}'^{(r)}) \ggg 3.$$

2.7. Если $\hat{\beta}_1^{(r)} \oplus \hat{\beta}'^{(r)} = \hat{0}$ и $\tilde{\lambda}_j = \tilde{0}$, $j = 2, \dots, 7$, то

2.7.1. Если $\tilde{\gamma}_{3,1} = 0$, то $\tilde{\kappa} := \tilde{\kappa} \oplus \hat{\varepsilon}_{26-t}$, переходим на шаг III.2.1 с $t := t + 1$ и следующим значением γ_3 .

2.7.2. Если $\tilde{\gamma}_{3,1} \neq 0$, то $\tilde{k} := \tilde{k} \oplus \hat{\varepsilon}_{26-t}$, переходим на шаг III.2.1 с $t := t + 1$ и следующим значением γ_3 .

3. Полагаем $K^{[r]} := \{(\tilde{\kappa}, 0, \tilde{k}_{26}, \dots, \tilde{k}_0) \cup (\tilde{\kappa}, 1, \tilde{k}_{26}, \dots, \tilde{k}_0) \mid \tilde{\kappa} \in \tilde{K}^{[r]}\}$ и завершаем работу алгоритма.

Выход: множество $K^{[r]}$ кандидатов в раундовые ключи r -го раунда.

5.2. Приложение Б. Доказательство утверждения 4.

Пусть

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} &= (\hat{\alpha}_1^{(1)}, \hat{\alpha}_0^{(1)}) = g_{\tilde{k}^{(1)}}(\alpha^{(0)}), \alpha'^{(1)} = (\hat{\alpha}'^{(1)}, \hat{\alpha}_0'^{(1)}) = g_{\tilde{k}^{(1)} \oplus \hat{\varepsilon}_{31}}(\alpha^{(0)}), \\ \alpha^{(2)} &= (\hat{\alpha}_1^{(2)}, \hat{\alpha}_0^{(2)}) = g_{\tilde{k}^{(2)}}(\alpha^{(1)}), \alpha'^{(2)} = (\hat{\alpha}'^{(2)}, \hat{\alpha}_0'^{(2)}) = g_{\tilde{k}^{(2)} \oplus \hat{\delta}}(\alpha'^{(1)}), \\ \alpha^{(3)} &= (\hat{\alpha}_1^{(3)}, \hat{\alpha}_0^{(3)}) = g_{\tilde{k}^{(3)}}(\alpha^{(2)}), \alpha'^{(3)} = (\hat{\alpha}'^{(3)}, \hat{\alpha}_0'^{(3)}) = g_{\tilde{k}^{(3)} \oplus \hat{\varepsilon}_{31}}(\alpha'^{(2)}). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1^{(1)} &= \hat{\alpha}_0^{(0)}, & \hat{\alpha}'^{(1)} &= \hat{\alpha}_0'^{(0)}, \\ \hat{\alpha}_1^{(2)} &= \hat{\alpha}_0^{(1)}, & \hat{\alpha}'^{(2)} &= \hat{\alpha}_0'^{(1)}, \\ \hat{\alpha}_1^{(3)} &= \hat{\alpha}_0^{(2)}, & \hat{\alpha}'^{(3)} &= \hat{\alpha}_0'^{(2)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим разностную характеристику d вида

$$(\hat{0}, \hat{0}) \xrightarrow{g_{\tilde{k}^{(1)}} \cdot g_{\tilde{k}'^{(1)}} \cdot P_1} (\hat{0}, \hat{\delta}) \xrightarrow{g_{\tilde{k}^{(2)}} \cdot g_{\tilde{k}'^{(2)}} \cdot P_2} (\hat{\delta}, \hat{0}) \xrightarrow{g_{\tilde{k}^{(3)}} \cdot g_{\tilde{k}'^{(3)}} \cdot P_3} (\hat{0}, \hat{0}).$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathbf{P} \left\{ \hat{s} \left(\hat{\alpha}_0^{(0)} +_{2^{32}} \hat{k}^{(1)} \right) \oplus \hat{s} \left(\hat{\alpha}_0^{(0)} +_{2^{32}} \left(\hat{k}^{(1)} \oplus \hat{\varepsilon}_{31} \right) \right) = \hat{\delta} \ggg 11 \right\} = \\ &= \mathbf{P} \left\{ \tilde{s}_8 \left(\tilde{\alpha}_7^{(0)} +_{16} \tilde{k}_7^{(1)} \right) \oplus \tilde{s}_8 \left(\tilde{\alpha}_7^{(0)} +_{16} \left(\tilde{k}_7^{(1)} \oplus \tilde{\varepsilon}_3 \right) \right) = \tilde{\delta} \right\}, \\ p_3 &= \mathbf{P} \left\{ \hat{s} \left(\hat{\alpha}_0^{(2)} +_{2^{32}} \hat{k}^{(3)} \right) \oplus \hat{s} \left(\hat{\alpha}_0^{(2)} +_{2^{32}} \left(\hat{k}^{(3)} \oplus \hat{\varepsilon}_{31} \right) \right) = \hat{\delta} \ggg 11 \right\} = \\ &= \mathbf{P} \left\{ \tilde{s}_8 \left(\tilde{\alpha}_7^{(2)} +_{16} \tilde{k}_7^{(3)} \right) \oplus \tilde{s}_8 \left(\tilde{\alpha}_7^{(2)} +_{16} \left(\tilde{k}_7^{(3)} \oplus \tilde{\varepsilon}_3 \right) \right) = \tilde{\delta} \right\}. \end{aligned}$$

Рис. 1. Разностная характеристика трехраундового алгоритма шифрования ГОСТ 28147-89 с двумя связанными ключами

Поскольку рассматриваемая разностная характеристика предполагает наличие только одной активной подстановки s -блока $\widehat{s}_8$, то для вероятностей p_1, p_3 справедливы следующие оценки:

$$2^{-3} \leq p_1 \leq 1, \quad 2^{-3} \leq p_3 \leq 1. \quad (2)$$

Так как вероятность p_2 есть

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbf{P} \left\{ \widehat{s} \left(\widehat{\alpha}_0^{(1)} +_{2^{32}} \widehat{k}^{(2)} \right) \lll 11 = \widehat{s} \left(\left(\widehat{\alpha}_0^{(1)} \oplus \widehat{\delta} \right) +_{2^{32}} \left(\widehat{k}^{(2)} \oplus \widehat{\delta} \right) \right) \lll 11 \right\} = \\ &= \mathbf{P} \left\{ \widehat{s} \left(\widehat{\alpha}_0^{(1)} +_{2^{32}} \widehat{k}^{(2)} \right) = \widehat{s} \left(\left(\widehat{\alpha}_0^{(1)} \oplus \widehat{\delta} \right) +_{2^{32}} \left(\widehat{k}^{(2)} \oplus \widehat{\delta} \right) \right) \right\} = 2^{-\|\widehat{\delta}\|}, \end{aligned}$$

то

$$2^{-4} \leq p_2 \leq 2^{-1}. \quad (3)$$

Справедливо равенство

$$\mathbf{P} \left\{ \alpha^{(3)} = \alpha'^{(3)} \right\} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3. \quad (4)$$

Таким образом, из неравенств (2), (3) и соотношения (4) получаем

$$2^{-10} \leq \mathbf{P} \left\{ \alpha^{(3)} = \alpha'^{(3)} \right\} \leq 2^{-1}.$$

Рисунок 1 иллюстрирует рассматриваемую разностную характеристику. $\square$

5.3. Приложение В. Алгоритм 3.2.1

Будем использовать следующие обозначения. Для $i \in \{0, \dots, 27\}$ положим

$$\Omega \left(i, \widehat{k}^{(r)} \right) = V_4 \times \{(\lambda_{27}, \dots, \lambda_0)\},$$

где

$$\lambda_t = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \{0, \dots, i-1\}, \\ 1, & \text{если } t = i, \\ \widehat{k}_t^{(r)} \oplus 1, & \text{если } t \in \{i+1, \dots, 27\}. \end{cases}$$

В данном разделе для нахождения множества $K^{[r]}$ алгоритмом 3.2.1 используется пара таких связанных ключей $k, k' \in V_{256}$, что

$$k \oplus k' = \left(\underbrace{\widehat{0}, \dots, \widehat{0}}_{r-25}, \widehat{\varepsilon}_{31}, \widehat{\delta}, \widehat{\varepsilon}_{31}, \underbrace{\widehat{0}, \dots, \widehat{0}}_{30-r} \right), \quad \widehat{\delta} = \left(0, \dots, 0, \underbrace{\widetilde{\delta}, 0, \dots, 0}_7 \right), \quad \widetilde{\delta} \in V_4^\times.$$

Алгоритм 3.2.1. Нахождение множества $K^{[r]}$ кандидатов в раундовые ключи для r -го раунда методом бумеранга на связанных ключах.

Этап I. Нахождение бит $(k_{30}^{(r)}, k_{29}^{(r)}, k_{28}^{(r)})$ раундового ключа $\widehat{k}^{(r)}$.

Вход: $n_0^{(3.2.1)}$ открытых текстов $\alpha^{(30-r,1)}, \dots, \alpha^{(30-r, n_0^{(3.2.1)})}$, $K^{[32]}, \dots, K^{[r+1]}$ — множества кандидатов в раундовые ключи для раундов $32-(r+1)$ ($K^{[33]} = \emptyset$ при $r = 32$).

1. Полагаем $\Theta := \emptyset$.

2. Полагаем

$$\alpha^{(0,i)} := g_{\widehat{k}^{(1)}}^{-1} \dots g_{\widehat{k}^{(29-r)}}^{-1} \left(\alpha^{(30-r,i)} \right),$$

$$\alpha'^{(0,i)} := g_{\widehat{k}^{(1)}}^{-1} \dots g_{\widehat{k}^{(29-r)}}^{-1} \left(\alpha^{(30-r,i)} \oplus \left(\widehat{\delta}, \widehat{0} \right) \right), \quad i \in \left\{ 1, \dots, n_0^{(3.2.1)} \right\}.$$

3. Вычисляем

$$\alpha^{(32,i)} := f_k \left(\alpha^{(0,i)} \right), \quad \alpha'^{(32,i)} := f_{k'} \left(\alpha'^{(0,i)} \right), \quad i \in \left\{ 1, \dots, n_0^{(3.2.1)} \right\}.$$

4. Полагаем

$$\alpha^{(r,i)} := g_{\widehat{k}^{(r+1)}}^{-1} \dots g_{\widehat{k}^{(32)}}^{-1} \left(\alpha^{(32,i)} \right),$$

$$\alpha'^{(r,i)} := g_{\widehat{k}^{(r+1)}}^{-1} \dots g_{\widehat{k}^{(32)}}^{-1} \left(\alpha'^{(32,i)} \right), \quad i \in \left\{ 1, \dots, n_0^{(3.2.1)} \right\}.$$

5. Если

$$\alpha^{(r,i)} \oplus \alpha'^{(r,i)} \in \left\{ \left(\widehat{0}, \left(0, \dots, 0, \widehat{\lambda} \right) \right) \in V_{32}^2 | \widehat{\lambda} \in V_4 \right\},$$

то полагаем $\Theta := \Theta \cup \left(\alpha^{(30-r,i)}, \alpha'^{(30-r,i)} \right), i \in \left\{ 1, \dots, n_0^{(3.2.1)} \right\}$.

6. *Опробование бит* $(k_{31}^{(r)}, k_{30}^{(r)}, k_{29}^{(r)}, k_{28}^{(r)})$.

Для каждого $\widetilde{\kappa} = (\kappa_3, \kappa_2, \kappa_1, \kappa_0) \in V_4$ выполняем:

6.1. Полагаем $v_{\widetilde{\kappa}} := 0, \overline{k} := \kappa_3 \widehat{\varepsilon}_{31} \oplus \kappa_2 \widehat{\varepsilon}_{30} \oplus \kappa_1 \widehat{\varepsilon}_{29} \oplus \kappa_0 \widehat{\varepsilon}_{28}, \overline{k}' := \overline{k} \oplus \widehat{\varepsilon}_{31}$.

6.2. Для каждого $\left(\alpha^{(30-r)}, \alpha'^{(30-r)} \right) \in \Theta$ выполняем:

6.2.1. Полагаем $\alpha^{(31-r)} := g_{\overline{k}} \left(\alpha^{(30-r)} \right), \alpha'^{(31-r)} := g_{\overline{k}'} \left(\alpha'^{(30-r)} \right)$.

6.2.2. Если $\alpha^{(31-r)} \oplus \alpha'^{(31-r)} = \left(\widehat{0}, \widehat{0} \right)$, то $v_{\widetilde{\kappa}} := v_{\widetilde{\kappa}} + 1$.

7. Полагаем $(k_{30}^{(r)}, k_{29}^{(r)}, k_{28}^{(r)}) := (\kappa_2, \kappa_1, \kappa_0)$, где

$$\max \{v_{(0, \kappa_2, \kappa_1, \kappa_0)}, v_{(1, \kappa_2, \kappa_1, \kappa_0)}\} = \max \{v_{\tilde{\kappa}'} | \tilde{\kappa}' \in V_4\}.$$

Этап II. Нахождение битов $(k_{27}^{(r)}, \dots, k_0^{(r)})$ раундового ключа $\widehat{k}^{(r)}$.

Вход: $(k_{30}^{(r)}, k_{29}^{(r)}, k_{28}^{(r)})$ — биты раундового ключа $\widehat{k}^{(r)}$.

1. Полагаем $t := 0$.

2. Полагаем $(k_{31}^{(r,t)}, k_{30}^{(r,t)}, k_{29}^{(r,t)}, k_{28}^{(r,t)}) := (t, k_{30}^{(r)}, k_{29}^{(r)}, k_{28}^{(r)})$ и $v_t := 27$.

3. Рассматриваем $n_0^{(3.2.1)}$ таких различных открытых текстов $\alpha^{(30-r,1)}, \dots, \alpha^{(30-r, n_0^{(3.2.1)})} \in V_{32}^2$, что

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{\alpha}_0^{(30-r,j)} | j \in \{1, \dots, n_0^{(3.2.1)}\} \right\} &= \Omega \left(v_t, \widehat{k}^{(30-r,t)} \right), \\ \left| \left\{ \widehat{\alpha}_1^{(32,j)} | j \in \{1, \dots, n_0^{(3.2.1)}\} \right\} \right| &= 2^6, \end{aligned}$$

где

$$\alpha^{(30-r,j)} = \left(\widehat{\alpha}_1^{(30-r,j)}, \widehat{\alpha}_0^{(30-r,j)} \right), \quad j \in \{1, \dots, n_0^{(3.2.1)}\},$$

т. е. $\widehat{\alpha}_0^{(30-r,j)} \in \Omega \left(v_t, \widehat{k}^{(30-r,t)} \right)$, $\widehat{\alpha}_1^{(30-r,j)} \in {}_U V_{32}$

и $\left| \left\{ \widehat{\alpha}_1^{(30-r,1)}, \dots, \widehat{\alpha}_1^{(30-r, n_0^{(3.2.1)})} \right\} \right| = 2^6$.

4. Полагаем $\Theta_{v_t} := \emptyset$.

5. Полагаем

$$\begin{aligned} \alpha^{(0,i)} &:= g_{\widehat{k}^{(1)}}^{-1} \dots g_{\widehat{k}^{(29-r)}}^{-1} \left(\alpha^{(30-r,i)} \right), \\ \alpha'^{(0,i)} &:= g_{\widehat{k}^{(1)}}^{-1} \dots g_{\widehat{k}^{(29-r)}}^{-1} \left(\alpha^{(30-r,i)} \oplus \left(\widehat{\delta}, \widehat{0} \right) \right), \quad i \in \{1, \dots, n_0^{(3.2.1)}\}. \end{aligned}$$

6. Вычисляем

$$\alpha^{(32,i)} := f_k \left(\alpha^{(0,i)} \right), \quad \alpha'^{(32,i)} := f_{k'} \left(\alpha'^{(0,i)} \right), \quad i \in \{1, \dots, n_0^{(3.2.1)}\}.$$

7. Полагаем

$$\begin{aligned} \alpha^{(r,i)} &:= g_{\widehat{k}^{(r+1)}}^{-1} \dots g_{\widehat{k}^{(32)}}^{-1} \left(\alpha^{(32,i)} \right), \\ \alpha'^{(r,i)} &:= g_{\widehat{k}^{(r+1)}}^{-1} \dots g_{\widehat{k}^{(32)}}^{-1} \left(\alpha'^{(32,i)} \right), \quad i \in \{1, \dots, n_0^{(3.2.1)}\}. \end{aligned}$$

8. Если $\alpha^{(r,i)} \oplus \alpha'^{(r,i)} \in \left\{ \left(\widehat{0}, (0, \dots, 0, \widetilde{\lambda}) \right) \in V_{32}^2 \mid \widetilde{\lambda} \in V_4 \right\}$, то

$$\Theta_{v_t} := \Theta_{v_t} \cup \left\{ \left(\alpha^{(30-r,i)}, \alpha'^{(30-r,i)} \right) \right\}, \quad i \in \left\{ 1, \dots, n_0^{(3,2,1)} \right\}.$$

9. Для всех $i \in \{0, 1\}$ находим $\widehat{u}^{(i)} = (u_{31}^{(i)}, \dots, u_0^{(i)}) \in V_{32}$, где

$$u_j^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \in \{0, \dots, v_t - 1\}, \\ i, & \text{если } j = v_t, \\ k_j^{(r,t)}, & \text{если } j \in \{v_t + 1, \dots, 31\}. \end{cases}$$

10. Полагаем $\widehat{u}'^{(i)} := \widehat{u}^{(i)} \oplus \widehat{\varepsilon}_{31}$ для $i = 0, 1$.

11. Для всех $i \in \{0, 1\}$ выполняем:

11.1. Полагаем $b_i := 0$.

11.2. Для всех $\left(\alpha^{(30-r)}, \alpha'^{(30-r)} \right) \in \Theta_{v_t}$ выполняем:

11.2.1. Полагаем $\alpha^{(31-r)} := g_{\widehat{u}^{(i)}}(\alpha^{(30-r)})$, $\alpha'^{(31-r)} := g_{\widehat{u}'^{(i)}}(\alpha'^{(30-r)})$.

11.2.2. Если $\alpha_{31}^{(31)} \oplus \beta_{31}^{(31)} = \left(\widehat{0}, \widehat{0} \right)$, то $b_i := b_i + 1$.

12. Полагаем $k_{v_t}^{(r,t)} := j$, где $b_j = \max \{b_0, b_1\}$, $j = 0, 1$.

13. Если $v_t > 0$, то $v_t := v_t - 1$ и переходим к шагу П.3. Если $t = 0$, $v_t = 0$, то $t := 1$, и переходим к шагу П.2. Если $t = 1$, $v_t = 0$, то завершаем работу алгоритма.

Выход: $K^{[r]} = \left\{ \widehat{k}^{(r,0)}, \widehat{k}^{(r,1)} \right\}$.

5.4. Приложение Г. Алгоритм 3.2.2

Приведенный ниже алгоритм является вероятностным. Величина $c \in \{0, 1\}$ определяет успех его выполнения.

В данном разделе для нахождения множества $K^{[r]}$ используется пара таких связанных ключей $k, k' \in V_{256}$, что

$$k \oplus k' = \left(\underbrace{\widehat{0}, \dots, \widehat{0}}_{r-25}, \widehat{\varepsilon}_{27}, \widehat{\delta}', \widehat{\varepsilon}_{27}, \underbrace{\widehat{0}, \dots, \widehat{0}}_{30-r} \right), \quad \widehat{\delta}' = (0, \dots, 0, \widetilde{\delta}', 0, 0, 0), \quad \widetilde{\delta}' \in V_4^\times.$$

Алгоритм 3.2.2. Нахождение множества $K^{[r]}$ кандидатов в раундовые ключи для r -го раунда методом бумеранга на связанных ключах.

Этап I. Нахождение $\hat{\gamma}_0 \in V_{32}$.

Вход: $K^{[32]}, \dots, K^{[r+1]}$ — множества кандидатов в раундовые ключи для раундов $32 - (r + 1)$ ($K^{[32]} = \emptyset$ при $r = 32$).

Для всех $\hat{k}^{(32)} \in K^{[32]}, \dots, \hat{k}^{(r+1)} \in K^{[r+1]}$ выполняем:

1. Полагаем $\hat{\gamma}_0 := \hat{0}, c := 0$.
2. Для всех $\tilde{\gamma} \in V_4, i \in \{1, \dots, n_0^{(3.2.2)}\}$ выполняем:

2.1. Полагаем

$$\alpha^{(0,i)} := g_{\hat{k}^{(1)}} \dots g_{\hat{k}^{(32-r)}} \left(\hat{0}, \alpha_0^{(32-r,i)} \right),$$

$$\alpha'^{(0,i)} := g_{\hat{k}'^{(1)}} \dots g_{\hat{k}'^{(32-r)}} \left(\hat{0}, \alpha_0^{(32-r,i)} \oplus (0, \dots, 0, \tilde{\gamma}, 0, 0, 0) \right).$$

2.2. Вычисляем

$$\alpha^{(32,i)} := f_k \left(\alpha^{(0,i)} \right), \alpha'^{(32,i)} := f_{k'} \left(\alpha'^{(0,i)} \right).$$

2.3. Полагаем

$$\alpha^{(r,i)} := g_{\hat{k}^{(r+1)}}^{-1} \left(\dots g_{\hat{k}^{(32)}}^{-1} \left(\alpha^{(32,i)} \right) \right),$$

$$\alpha'^{(r,i)} := g_{\hat{k}'^{(r+1)}}^{-1} \left(\dots g_{\hat{k}'^{(32)}}^{-1} \left(\alpha'^{(32,i)} \right) \right).$$

2.4. Вычисляем

$$\hat{\lambda} = (\tilde{\lambda}_7, \dots, \tilde{\lambda}_0) := \left(\hat{\alpha}_0^{(r,i)} \oplus \hat{\alpha}'_0^{(r,i)} \right) \ggg 3.$$

2.5. Если $\hat{\alpha}_1^{(r,i)} \oplus \hat{\alpha}'_1^{(r,i)} = \hat{0}$ и $\tilde{\lambda}_j = \tilde{0}, j = 1, \dots, 7$, то полагаем

$$\hat{\gamma}_0 := (0, \dots, 0, \tilde{\gamma}, 0, 0, 0), \quad c := 1$$

и завершаем работу алгоритма.

Выход: разность $\hat{\gamma}_0 \in V_{32}$, величина c .

Если $c = 1$, то переходим к этапу II.

Этап II. Нахождение битов $(k_{31}^{(r)}, k_{30}^{(r)}, k_{29}^{(r)}, k_{28}^{(r)})$ раундового ключа $\hat{k}^{(r)}$.

Вход: $K^{[32]}, \dots, K^{[r+1]}$ — множества кандидатов в раундовые ключи для раундов $32 - (r + 1)$, разность $\hat{\gamma}_0 \in V_{32}$.

Для всех $\hat{k}^{(32)} \in K^{[32]}, \dots, \hat{k}^{(r+1)} \in K^{[r+1]}$ выполняем:

1. Полагаем $\tilde{K}^{[r]} := \emptyset$, $\Theta := \emptyset$, $c_0 := 0$.

2. Для всех $\tilde{\tau} \in V_4$ выполняем:

2.1. Полагаем $c := 0$.

2.2. Для всех $i \in \{1, \dots, n_0^{(3.2.2)}\}$ выполняем:

2.2.1. Для всех $\tilde{\delta} \in V_4$ выполняем:

2.2.1.1. Полагаем

$$\alpha^{(0,i)} := g_{\hat{k}^{(1)}} \left(\dots g_{\hat{k}^{(32-r)}} \left(\left(\left(\tilde{\tau}, \underbrace{\tilde{0}, \dots, \tilde{0}}_7 \right) \oplus \hat{\varepsilon}_{27}, \alpha_0^{(32-r,i)} \right) \right) \dots \right),$$

$$\alpha'^{(0,i)} := g_{\hat{k}'^{(1)}} \left(\dots (g_{\hat{k}'^{(32-r)}} ((\tilde{\tau}, \underbrace{\tilde{0}, \dots, \tilde{0}}_7) \oplus \hat{\varepsilon}_{27}, \alpha_0^{(32-r,i)} \oplus \right.$$

$$\left. \oplus \hat{\gamma}_0 \oplus (0, \dots, 0, \tilde{\delta}, \underbrace{0, \dots, 0}_7) \dots) \right).$$

2.2.1.2. Вычисляем

$$\alpha^{(32,i)} := f_k \left(\alpha^{(0,i)} \right), \alpha'^{(32,i)} := f_{k'} \left(\alpha'^{(0,i)} \right).$$

2.2.1.3. Полагаем

$$\alpha^{(r,i)} := g_{\hat{k}^{(r+1)}}^{-1} \left(\dots (g_{\hat{k}^{(32)}}^{-1} \left(\alpha^{(32,i)} \right) \dots \right),$$

$$\alpha'^{(r,i)} := g_{\hat{k}'^{(r+1)}}^{-1} \left(\dots (g_{\hat{k}'^{(32)}}^{-1} \left(\alpha'^{(32,i)} \right) \dots \right).$$

2.2.1.4. Вычисляем

$$\hat{\lambda} = (\tilde{\lambda}_7, \dots, \tilde{\lambda}_0) := (\hat{\alpha}_0^{(r,i)} \oplus \hat{\alpha}'^{(r,i)}) \ggg 3.$$

2.2.1.5. Если $\hat{\alpha}_1^{(r,i)} \oplus \hat{\alpha}'^{(r,i)} = \hat{0}$ и $\tilde{\lambda}_j = 0$, $j = 2, \dots, 7$, то полагаем

$$\Theta := \Theta \cup \{(\tilde{\tau}, \tilde{\delta})\}, \quad c := 1.$$

2.2.2. Если $c = 0$, то полагаем $(\tilde{K}^{[r]}, c_0) = (\emptyset, 0)$ и завершаем работу алгоритма.

2.3. Для всех $\tilde{\kappa} = (\tilde{\kappa}_3, \tilde{\kappa}_2, \tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_0) \in V_4$ выполняем:

2.3.1. Полагаем $v_{\tilde{\kappa}} := 0$.

2.3.2. Для всех $(\tilde{\tau}, \tilde{\delta}) \in \Theta$ выполняем:

2.3.2.1. Если выполнено равенство $\tilde{s}_8(\tilde{\tau} +_{16} \tilde{\kappa}) \oplus \tilde{s}_8(\tilde{\tau} +_{16} \tilde{\kappa} +_{16} 1) = \tilde{\delta}$, то $v_{\tilde{\kappa}} := v_{\tilde{\kappa}} + 1$.

2.3.3. Полагаем

$$\tilde{K}^{[r]} := \left\{ \tilde{\kappa} \in V_4 \mid v_{\tilde{\kappa}} = \max \left\{ v_{\tilde{\lambda}} \mid \tilde{\lambda} \in V_4 \right\} \right\}.$$

Выход: множество $\tilde{K}^{[r]}$, величина c_0 .

Если $c_0 = 1$, то переходим к этапу III.

Этап III. Нахождение бит $k_0^{(r)}, \dots, k_{26}^{(r)}$ раундового ключа $\hat{k}^{(r)}$.

Вход: $K^{[32]}, \dots, K^{[r+1]}$ — множества кандидатов в раундовые ключи для раундов $32-(r+1)$.

1. Полагаем $\bar{k} := \hat{0}, \kappa := \hat{0}$.

2. Для всех $t \in \{0, \dots, 26\}$ выполняем:

2.1. Полагаем $c := 0$.

2.2. Для всех $i \in \{1, \dots, n_0^{(3.2.2)}\}$ и для всех $\gamma_3 = (\tilde{\gamma}_{3,1}, \tilde{\gamma}_{3,0}) \in V_8$ выполняем:

2.2.1. Полагаем

$$\alpha^{(0,i)} := g_{\hat{k}^{(1)}} \dots g_{\hat{k}^{(32-r)}} \left(\kappa \oplus \hat{\varepsilon}_{26-t}, \alpha_0^{(32-r,i)} \right),$$

$$\alpha'^{(0,i)} := g_{\hat{k}'^{(1)}} \dots g_{\hat{k}'^{(32-r)}} \left(\kappa \oplus \hat{\varepsilon}_{26-t}, \alpha_0^{(32-r,i)} \oplus \underbrace{(0, \dots, 0)}_{21}, \gamma_3, 0, 0, 0 \right).$$

2.2.2. Вычисляем

$$\alpha^{(32,i)} := f_k \left(\alpha^{(0,i)} \right), \alpha'^{(32,i)} := f_{k'} \left(\alpha'^{(0,i)} \right).$$

2.2.3. Полагаем

$$\begin{aligned} \alpha^{(r,i)} &:= g_{\hat{k}^{(r+1)}}^{-1} \left(\dots g_{\hat{k}^{(32)}}^{-1} \left(\alpha^{(32,i)} \right) \right), \\ \alpha'^{(r,i)} &:= g_{\hat{k}'^{(r+1)}}^{-1} \left(\dots g_{\hat{k}'^{(32)}}^{-1} \left(\alpha'^{(32,i)} \right) \right). \end{aligned}$$

2.2.4. Вычисляем

$$\hat{\lambda} = (\tilde{\lambda}_7, \dots, \tilde{\lambda}_0) := \left(\hat{\alpha}_0^{(r,i)} \oplus \hat{\alpha}'_0^{(r,i)} \right) \ggg 3.$$

2.2.5. Если $\hat{\alpha}_1^{(r,i)} \oplus \hat{\alpha}'_1^{(r,i)} = \hat{0}$ и $\tilde{\lambda}_j = \tilde{0}$, $j = 2, \dots, 7$, то

2.2.5.1. Если $\tilde{\gamma}_{3,1} = 0$, то $c := 1$, $\hat{\kappa} := \hat{\kappa} \oplus \hat{\varepsilon}_{26-t}$, переходим к шагу
III.2.1, $t := t + 1$ и опробуем следующее значение γ_3 .

2.2.5.2. Если $\tilde{\gamma}_{3,1} \neq 0$, то $c := 1$, $\bar{k} := \bar{k} \oplus \hat{\varepsilon}_{26-t}$, переходим к шагу
III.2.1, $t := t + 1$ и опробуем следующее значение γ_3 .

2.3. Если $c = 0$, то завершаем работу алгоритма и возвращаем $(\emptyset, c)$.

3. Полагаем

$$K^{[r]} := \left\{ (\tilde{\kappa}, 0, \bar{k}_{26}, \dots, \bar{k}_0) \cup (\tilde{\kappa}, 1, \bar{k}_{26}, \dots, \bar{k}_0) \mid \tilde{\kappa} \in \tilde{K}^{[r]} \right\}$$

и завершаем работу алгоритма.

Выход: множество $K^{[r]}$ кандидатов в раундовые ключи r -го раунда, величина c .