Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Погорелов, М. А. Пудовкина, Комбинаторная характеристика XL-слоев,
Матем. вопр. криптогр., 2013, том 4, выпуск 3, 99–129

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk94>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:25:24

Комбинаторная характеристика XL-слоев

Б. А. Погорелов¹, М. А. Пудовкина²

¹ Академия криптографии Российской Федерации, Москва

² Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), Москва

Получено 11.IV.2012

Рассматриваются различные комбинаторно-структурные свойства подгруппы аффинной группы, порожденной преобразованиями слоя наложения ключа (всеми сдвигами) и линейным слоем (в случае приводимости соответствующей матрицы). В частности, описаны свойства графов орбиталов этой подгруппы.

Ключевые слова: орбитал, граф орбитала, метрика, дистанционно-транзитивный граф, дистанционно-регулярный граф

Combinatorial characterization of XL-layers

B. A. Pogorelov¹, M. A. Pudovkina²

¹ Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow

² National Nuclear Research University, Moscow

Abstract. We consider combinatorial and structural properties of an affine subgroup generated by key addition and linear layer, i.e. by all shifts and by the multiplication on a reducible matrix. In particular, we describe properties of orbital graphs of this subgroup.

Key words: orbital, orbital graph, metric, distance-transitive graph, distance-regular graph

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 3, pp. 99–129 (Russian).

1. Введение

Алгоритмы блочного шифрования реализуются итеративным применением в раундах более простых (базовых) преобразований, которые должны обеспечивать свойства перемешивания, рассеивания и усложнения. Для обеспечения данных свойств в раунде обычно используются преобразования (слои) трех типов: аддитивное наложение ключа, нелинейные преобразования над отдельными частями блока текста (s -боксы) и линейные преобразования g , переставляющие между собой части этого блока. Схемы, реализующие подобные алгоритмы, получили название SP-сетей. В последнее время перестановку отдельных блоков стали заменять более общими линейными или аффинными преобразованиями векторных пространств над полем $GF(2)$. Блочные шифрсистемы с таким построением раундовых преобразований и побитным подмешиванием раундового ключа в каждом раунде называют XSL-сетями. В частности, по такому принципу реализован алгоритм блочного шифрования AES.

В ряде случаев линейные преобразования, обеспечивающие хорошее рассеивание, являются приводимыми. Например, шифрсистемы ARIA, Camellia, MIBS имеют линейные преобразования с характеристическими многочленами над полем $GF(2)$ вида $(x + 1)^r$ для некоторого натурального числа r . Приводимыми являются и подстановочные матрицы, используемые в SP-сетях. Это приводит к импримитивности подгруппы $C(g)$ аффинной группы $AGL_n(2)$, порожденной преобразованиями слоя наложения ключа (т. е. всеми сдвигами) и приводимой матрицей $g \in GL_n(2)$. При этом систем импримитивности, частично упорядоченных по вложению, может быть довольно много. Системы импримитивности сохраняются линейным слоем и слоем наложения ключа. Поэтому обеспечивать необходимое «рассеивание» блоков импримитивности в алгоритме шифрования могут только слои s -боксов.

В работе рассматриваются различные комбинаторно-структурные свойства группы $C(g)$. Описаны свойства графов орбиталов группы $C(g)$ и рассмотрены метрики как кратчайшие расстояния между вершинами в графе. В частности, в терминах характеристического или минимального многочленов g приведены условия: связности графов орбиталов, их изоморфизма, примитивности и 2-транзитивности группы $C(g)$. Указаны условия дистанционной транзитивности и дистанционной регулярности графов орбиталов.

Рассмотрены также свойства графов орбиталов группы $C(g)$ в двух случаях: когда g лежит в небольших надгруппах подстановочных групп и когда g берется из унитарной группы UT_n , $n = 2^m$. В этих случаях группа $C(g)$

обладает выраженными геометрическими свойствами. В этом смысле полученные результаты созвучны работам [4, 6], где рассмотрены свойства графов орбиталов надгрупп группы Джевонса и их метрики. Приведены условия на орбиталы, при которых соответствующие метрики изоморфны метрике Хемминга (на пространстве V_m , $m \leq n$), а также их надметрикам или подметрикам. Описаны метрики и другие характеристики графов орбиталов группы $C(g)$ для некоторых циркулянтных матриц g и матриц блочных шифрсистем.

2. Основные обозначения

Пусть: $\mathbb{N}(\mathbb{N}_0)$ — множество всех натуральных (целых неотрицательных) чисел; $|A|$ — мощность множества A ; V_n — векторное пространство размерности $n \geq 2$ над полем $GF(2)$; $\varepsilon_i = (0, \dots, 0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_i) \in V_n$, $i = 0, \dots, n-1$;

GL_n (AGL_n) — полная линейная (аффинная) группа над $GF(2)$; V_n/W — фактор-пространство пространства V_n по подпространству W ; $X^\times = X \setminus \{\vec{0}\}$; $a(x)|b(x)$ — многочлен $a(x)$ делит многочлен $b(x)$; $\deg b(x)$ — степень многочлена $b(x)$; $u_g(x)(m_g(x))$ — характеристический (минимальный) многочлен преобразования $g \in GL_n(2)$; $m_{\gamma,g}(x)$ — минимальный многочлен вектора $\gamma \in V_n^\times$ относительно преобразования $g \in GL_n(2)$; d_g — число орбит группы $\langle g \rangle$ на V_n ; $A \oplus B = \{\alpha \oplus \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$, где $A, B \subseteq V_n$; $\Delta_i^{(n)}$ — множество всех векторов из V_n веса $i \in \{0, \dots, n\}$; $h_\alpha: \beta \rightarrow \beta \oplus \alpha$ — преобразование-сдвиг пространства V_n на вектор $\alpha \in V_n$; $g_\alpha = gh_\alpha$, $H_n = \{h_\alpha: V_n \rightarrow V_n \mid \alpha \in V_n\}$ — группа сдвигов; $\text{diag}(g_1, \dots, g_p)$ — клеточно-диагональная матрица, на диагонали которой находятся матрицы $g_1, \dots, g_p$; $C(g) = \langle g_\alpha \mid \alpha \in V_n \rangle = \langle g \rangle H_n$ — подгруппа аффинной группы; $S(X)$ — множество всех подстановок на X ; $S_n = S(X)$ при $|X| = n$; $\alpha^g = \alpha g$ — образ элемента $\alpha \in X$ при действии на него подстановкой $g \in S(X)$; $\alpha^G = \{\alpha^g \mid g \in G\}$, $G \leq S(X)$; $S_2 \uparrow S_n = H_n S_n$ — группа Джевонса, совпадающая с группой экспоненцирования; $\chi_n(\alpha, \beta)$ — расстояние Хемминга между векторами $\alpha, \beta \in V_n$; $G_1 \approx G_2$ — подобие групп G_1, G_2 ; $\bar{\Gamma}_1 \cong \bar{\Gamma}_2$ ($\mu_1 \cong \mu_2$) — изоморфизм графов $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ (метрик μ_1, μ_2); e_n — единичная $(n \times n)$ -матрица; $G_1 \wr G_2$ — сплетение группы подстановок G_1 группой G_2 ; $\text{ord}(a)$ — порядок элемента $a \in GL_n(2)$; $\text{Aut}(\bar{\Gamma})$ — группа автоморфизмов графа $\bar{\Gamma}$; если $\gamma \in V_n$, $g \in GL_n(2)$, $t_\gamma = |\gamma^{\langle g \rangle}|$ и $j \in \{1, \dots, t_\gamma\}$, то

$$V_n^{(j)}(g, \gamma) = \left\{ \gamma^{g^{i_1}} \oplus \dots \oplus \gamma^{g^{i_j}} \mid \forall i_1, \dots, i_j \in \{1, \dots, t_\gamma\} : 0 \leq i_1 < \dots < i_j \leq t_\gamma - 1 \right\}.$$

Всюду в работе матрицу линейного преобразования $g \in GL_n(2)$ в стандартном базисе $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ будем обозначать той же буквой g . Рассматриваемые в работе s -боксы биективны.

Пусть $\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{N}_0$ — метрика на X . Натуральнозначная метрика $\rho_\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{N}_0$, удовлетворяющая для любых элементов $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in X$ условиям

1. если $\mu(\alpha, \beta) = \mu(\gamma, \delta)$, то $\rho_\mu(\alpha, \beta) = \rho_\mu(\gamma, \delta)$,
2. $\rho_\mu(\alpha, \beta) \leq \mu(\alpha, \beta)$;

называется *подметрикой* метрики μ .

Метрика $\sigma_\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{N}_0$ называется *надметрикой* метрики μ , если для любых элементов $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in X$ она удовлетворяет условиям

1. если $\sigma_\mu(\alpha, \beta) = \sigma_\mu(\gamma, \delta)$, то $\mu(\alpha, \beta) = \mu(\gamma, \delta)$,
2. $\mu(\alpha, \beta) \leq \sigma_\mu(\alpha, \beta)$.

Очевидно, что метрика μ является подметрикой метрики σ_μ . Ряд свойств надметрик и подметрик метрики описан в работах [6–10].

3. Свойства орбиталов и графов орбиталов группы $C(g)$

Напомним, что орбиталом группы подстановок G , действующей на множестве X , называется орбита группы G при ее естественном действии $(\alpha, \beta)^f = (\alpha^f, \beta^f)$ на множестве X^2 для любого $f \in G$. Орбитал $(\alpha, \beta)^G$ группы G называется самопарным, если $(\alpha, \beta)^G = (\beta, \alpha)^G$. Орбитал $(\alpha, \alpha)^G$ называется тривиальным.

Пусть $\bar{\Gamma}_{(\alpha, \beta)}(g)$ — граф произвольного нетривиального орбитала $\Gamma_{(\alpha, \beta)}(g) = (\alpha, \beta)^{C(g)}$, т.е. граф с множеством ребер $(\alpha, \beta)^{C(g)}$ и множеством вершин $\alpha^{C(g)} = V_n$. Поскольку группа $C(g)$ содержит все сдвиги, то ее орбиталы самопарные, а графы орбиталов неориентированные.

Очевидно, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Если g — произвольное преобразование из GL_n , $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ — произвольные векторы из V_n , $\alpha \neq \beta$, то:

- 1) $(\alpha', \beta') \in (\alpha, \beta)^{C(g)}$ тогда и только тогда, когда $\alpha' \oplus \beta' \in (\alpha \oplus \beta)^{\langle g \rangle}$;
- 2) $\Gamma_{(\alpha, \beta)}(g) = \Gamma_{(\alpha', \beta')}(g)$ для любых векторов со свойством $\alpha' \oplus \beta' \in (\alpha \oplus \beta)^{\langle g \rangle}$;
- 3) число нетривиальных орбиталов группы $C(g)$ равно $d_g - 1$.

Таким образом, все различные нетривиальные графы орбиталов группы $C(g)$ суть графы $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \beta_1)}(g), \dots, \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \beta_{d_g-1})}(g)$, где $\beta_1^{(g)}, \dots, \beta_{d_g-1}^{(g)}$ — все различные орбиты группы $\langle g \rangle$ на $V_n^\times$. Условия изоморфизма графов орбиталов группы будут приведены в утверждениях 4 и 5.

Длина кратчайшего пути между двумя вершинами графа является расстоянием, а множество всех таких расстояний задает метрику $\mu_{\gamma, g}$, в общем случае расширенную (см., например, [7]), на множестве V_n вершин графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$.

Утверждение 1. Если $g \in GL_n$, $\gamma, \alpha, \beta \in V_n$, $\gamma \neq \vec{0}$, $\alpha \neq \beta$ и $t_\gamma = |\gamma^{(g)}|$, то

$$\mu_{\gamma, g}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha \oplus \beta \notin \bigcup_{i=1}^{t_\gamma} V_n^{(i)}(g, \gamma), \\ \min \left\{ i \in \{1, \dots, t_\gamma\} \mid \alpha \oplus \beta \in V_n^{(i)}(g, \gamma) \right\}, & \text{если } \alpha \oplus \beta \in \bigcup_{i=1}^{t_\gamma} V_n^{(i)}(g, \gamma). \end{cases}$$

Доказательство при $\mu_{\gamma, g}(\alpha, \beta) \neq \infty$ проводится индукцией по расстоянию $\mu_{\gamma, g}(\alpha, \beta)$, и мы его опускаем.

Следствие 1. Если $g \in GL_n$ и $\gamma \in V_n^\times$, то:

- 1) степень каждой вершины графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ равна $|\gamma^{(g)}|$;
- 2) граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан тогда и только тогда, когда $\bigcup_{i=1}^{t_\gamma} V_n^{(i)}(g, \gamma) = V_n$;
- 3) граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}$ связан тогда и только тогда, когда $\langle \gamma^{(g)} \rangle = V_n$;
- 4) если граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ не связан, $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ — максимальное линейно независимое подмножество мощности r множества $\gamma^{(g)}$, $\bar{\Theta} = \langle \theta_1, \dots, \theta_r \rangle$,

$$V_n / \bar{\Theta} = \{ \alpha_0 \oplus \bar{\Theta}, \alpha_1 \oplus \bar{\Theta}, \dots, \alpha_{2^n-r-1} \oplus \bar{\Theta} \}, \quad \alpha_0 = \vec{0},$$

то граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ имеет изоморфные компоненты связности $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}^{(i)}(g)$ с множеством вершин $\alpha_i \oplus \bar{\Theta}, i = 0, \dots, 2^{n-r} - 1$;

5) диаметр связного графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ не превосходит n , диаметр этого графа равен n тогда и только тогда, когда $\gamma^{(g)}$ — базис V_n .

Доказательство. Пп. 1)–2) следуют из утверждения 1.

3) Согласно п. 2) достаточно показать эквивалентность равенств $\bigcup_{i=1}^{t_\gamma} V_n^{(i)}(g, \gamma) = V_n$ и $\langle \gamma^{(g)} \rangle = V_n$. Последнее следует из равенства

$$\left\{ \gamma c_0 \oplus \gamma^g c_1 \oplus \dots \oplus \gamma^{g^{t_\gamma-1}} c_{t_\gamma-1} \mid (c_{t_\gamma-1}, \dots, c_0) \in V_n \right\} = \bigcup_{i=1}^{t_\gamma} V_n^{(i)}(g, \gamma).$$

4) Очевидно, что $r = \deg(m_{\gamma, g}(x))$. Аналогично утверждению 1 показывается, что вершины β, β' принадлежат одной компоненте связности графа $\bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}(g)$ тогда и только тогда, когда $\beta \oplus \beta' \in \bar{\Theta}$. Следовательно, $\alpha_i \oplus \bar{\Theta} \in V_n / \bar{\Theta}$ — множество вершин компоненты связности $\bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}^{(i)}(g)$ графа $\bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}(g)$, $i = 0, \dots, 2^{n-r} - 1$.

Зафиксируем две произвольные различные компоненты связности $\bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}^{(i)}(g), \bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}^{(j)}(g)$ и зададим отображение $\psi_{ij}: \alpha_i \oplus \theta \mapsto \alpha_j \oplus \theta, \theta \in \bar{\Theta}$. Согласно утверждению 1 вершины $\alpha_i \oplus \lambda, \alpha_i \oplus \lambda'$ смежны в графе $\bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}^{(i)}(g)$ тогда и только тогда, когда $\lambda \oplus \lambda' \in \gamma^{(g)}$. Но вершины $\psi_{ij}(\alpha_i \oplus \lambda) = \alpha_j \oplus \lambda, \psi_{ij}(\alpha_i \oplus \lambda') = \alpha_j \oplus \lambda'$ в графе $\bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}^{(j)}(g)$ являются смежными тогда и только тогда, когда $\lambda \oplus \lambda' \in \gamma^{(g)}$. Значит, ψ_{ij} — изоморфизм и граф $\bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}(g)$ имеет 2^{n-r} изоморфных компонент связности.

5) Согласно п. 3 и в силу связности графа $\bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}(g)$ имеем включение $\langle \gamma^{(g)} \rangle \subseteq V_n$. Пусть $\{\theta_1, \dots, \theta_n\} \subseteq \gamma^{(g)}$ для некоторого базиса $\theta_1, \dots, \theta_n$ пространства V_n .

Если $\{\theta_1, \dots, \theta_n\} = \gamma^{(g)}$, то расстояние между вершинами графа $\bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}(g)$ равно n по утверждению 1.

Если $\{\theta_1, \dots, \theta_n\} \subset \gamma^{(g)}$, то $V_n^{(n)}(g, \gamma) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} V_n^{(j)}(g, \gamma)$. Значит, $\mu_{\gamma, g}(\alpha, \beta) \leq n - 1$ для любых векторов $\alpha, \beta \in V_n$. Следствие доказано.

Существует тесная связь между строением характеристического многочлена $u_g(x)$, примитивностью (или 2-транзитивностью) и связностью графов орбиталов группы $C(g)$.

Утверждение 2. 1. Группа $C(g)$ примитивна (2-транзитивна) тогда и только тогда, когда многочлен $u_g(x)$ неприводим (примитивен).

2. Граф $\bar{\Gamma}_{(\bar{0}, \gamma)}(g)$ связан тогда и только тогда, когда многочлен $u_g(x)$ неприводим.

Доказательство. П. 1 очевиден.

2. По п. 1 примитивность группы $C(g)$ равносильна неприводимости многочлена $u_g(x)$. Но группа примитивна тогда и только тогда, когда графы всех ее нетривиальных орбиталов связны (см., например, [1]). Следовательно, связность графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ для всех $\gamma \in V_n^\times$ равносильна неприводимости многочлена $u_g(x)$. Утверждение доказано.

Приведем критерий связности графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ на языке минимального многочлена $m_{\gamma, g}(x)$ и покажем, что примитивность группы $C(g)$ накладывает сильные ограничения на ее графы орбиталов, в частности, влечет их изоморфизм. В этом случае XL-слой имеет меньшую структурированность.

Следствие 2. 1. Граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан тогда и только тогда, когда $m_{\gamma, g}(x) = u_g(x)$.

2. Если группа $C(g)$ примитивна, то графы всех ее нетривиальных орбиталов изоморфны.

Доказательство. 1. Пусть граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан. Согласно утверждению 19 [2] существует такое $k \in \{1, \dots, n\}$, что система векторов $\gamma, \gamma^g, \dots, \gamma^{g^{k-1}}$ линейно независима, а вектор γ^{g^k} линейно выражается через эту систему и

$$m_{\gamma, g}(x) = x^k \oplus c_{k-1}x^{k-1} \oplus \dots \oplus c_1x \oplus c_0,$$

где

$$\gamma^{g^k} = c_{k-1}\gamma^{g^{k-1}} \oplus \dots \oplus c_1\gamma^g \oplus \gamma c_0, \quad c_0, \dots, c_{k-1} \in \{0, 1\}.$$

Поскольку граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан и $m_{\gamma, g}(x) \mid u_g(x)$, то $k = n$ и $m_{\gamma, g}(x) = u_g(x)$.

Обратно, пусть $m_{\gamma, g}(x) = u_g(x)$. Покажем, что граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан. Так как $m_{\gamma, g}(x) = u_g(x)$, то $\deg(m_{\gamma, g}(x)) = n$. Из утверждения 19 [2] получаем, что система $\gamma, \gamma^g, \dots, \gamma^{g^{n-1}}$ линейно независима. Теперь из следствия 1 получаем, что граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан.

2. Пусть $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_1)}(g), \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_2)}(g)$ — два произвольных различных графа, группа $C(g)$ примитивна и $\gamma_{\varepsilon i} = \gamma_{\varepsilon}^{g^i}$, $i = 0, \dots, n-1$, $\varepsilon = 1, 2$. Тогда $m_{\gamma_1, g}(x) = m_{\gamma_2, g}(x) = u_g(x)$ и $\gamma_{10}, \dots, \gamma_{1n-1}$ и $\gamma_{20}, \dots, \gamma_{2n-1}$ — базисы пространства V_n . Существует такое линейное преобразование $h \in GL_n$, что $\gamma_{1i}^h = \gamma_{2i}$, $i = 0, \dots, n-1$. Из равенств

$$\left(\gamma_1^{g^n}\right)^h = \left(c_{n-1}\gamma_1^{g^{n-1}} \oplus \dots \oplus c_1\gamma_1^g \oplus \gamma_1 c_0\right)^h = c_{n-1}\gamma_2^{g^{n-1}} \oplus \dots \oplus c_1\gamma_2^g \oplus \gamma_2 c_0 = \gamma_2^{g^n}$$

следует, что $\gamma_{1n}^h = \gamma_{2n}$ и $\gamma_{1i}^h = \gamma_{2i}$, $\gamma_{1i}^{g^h} = \gamma_{2i}^{g^h}$, $i = 0, \dots, n-1$. Поэтому $\gamma_{1i}^{ghg^{-1}h^{-1}} = \gamma_{2i}$ для $i = 0, \dots, n-1$ и $gh = hg$, $\gamma_1^{g^i h} = \gamma_2^{g^i}$ для $j = 1, \dots, |\gamma_1^{(g)}|$.

Значит, $(\gamma_1^{(g)})^h = \gamma_2^{(g)}$ и графы $\Gamma_{(\vec{0}, \gamma_1)}(g), \Gamma_{(\vec{0}, \gamma_2)}(g)$ изоморфны. Следствие доказано.

Опишем зависимость свойств графов $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_1)}(g), \dots, \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_l)}(g)$ и метрик $\mu_{\gamma_1, g}, \dots, \mu_{\gamma_l, g}$ от свойств характеристического многочлена $u_g(x)$.

Если многочлен $u_g(x)$ неприводим, то из утверждения 2 и следствия 2 получаем равенство длин орбит группы $\langle g \rangle$.

Если $u_g(x) = f_1^{r_1}(x) \dots f_b^{r_b}(x)$, где $f_i(x)$ — различные неприводимые многочлены, $\deg(f_i(x)) = n_i > 0$, $i = 1, \dots, b$, то матрица g подобна клеточно-диагональной матрице $g' = \text{diag}(g'_1, \dots, g'_b)$, $u_{g'_i}(x) = f_i^{r_i}(x)$, $i = 1, \dots, b$. Матрица g определена однозначно с точностью до подобия и порядка следования клеток. Можем перейти к рассмотрению подобной группы $C(g') (\approx C(g))$.

Утверждение 3. 1. Если матрица g неразложима над $GF(2)$, то хотя бы один из графов орбиталов группы $C(g)$ связан.

2. Если матрица g разложима над $GF(2)$, $b > 1$, $u_g(x) = f_1(x) \dots f_b(x)$, $f_1(x), \dots, f_b(x)$ — попарно различные неприводимые многочлены ненулевой степени, $\deg(f_i(x)) = n_i$, $\gamma = (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(b)}) \in V_{n_1}^\times \dots \times V_{n_b}$, то связность графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ равносильна условию $\gamma^{(i)} \neq 0$, $i = 1, \dots, b$.

Доказательство. 1. Пусть матрица g неразложима над $GF(2)$. Тогда $u_g(x) = m_g(x) = f(x)^k$, $f(x)$ — неприводимый многочлен. Согласно следствию 2 граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан тогда и только тогда, когда $m_{\gamma, g}(x) = u_g(x)$.

Так как $m_g(x) = f(x)^k = \text{НОК}(m_{\delta_1, g}(x), \dots, m_{\delta_n, g}(x))$, где векторы $\delta_1, \dots, \delta_n$ линейно независимы, то найдется такой вектор δ_j , что $m_{\delta_j, g}(x) = f(x)^k$ и граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \delta_j)}(g)$ связан.

2. Пусть $\theta = (\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(b)})$, $\theta^{(i)} \in V_{n_i}^\times$, $i = 1, \dots, b$. Из утверждения 2 следует, что $m_{\theta^{(i)}, g}(x) = m_{\theta^{(i)}, g'_i}(x) = f_i(x)$, $i = 1, \dots, b$. Тогда $m_{\theta, g}(x) = f_1(x) \times \dots \times f_b(x) = u_g(x)$. По следствию 2 граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \theta)}(g)$ связан.

Пусть $\gamma^{(i)} = 0$ для некоторого $i \in \{1, \dots, b\}$ и $m'_{g, \gamma}(x) = \left(\prod_{j=1}^b f_j(x) \right) / f_i(x)$. Тогда $m'_{g, \gamma}(\gamma) = (0, \dots, 0)$, т. е. $m'_{g, \gamma}(x) \neq u_g(x)$. Согласно следствию 2 граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ не связан. Утверждение доказано.

Приведем пример такой разложимой над $GF(2)$ матрицы g , что $u_g(x) = f(x)^k$ и все графы орбиталов группы $C(g)$ не связны.

Пусть $n = 2^{t+1}$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$ и преобразованию g соответствует перестановка координат $\vec{g}$ векторов пространства V_n , т. е. действует как $(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^g = (\alpha_{(n-1)\vec{g}}, \dots, \alpha_{0\vec{g}})$, где $\vec{g} = (0, \dots, 2^t - 1)(2^t, \dots, 2^{t+1} - 1)$.

Тогда g — разложимая матрица с характеристическим многочленом $u_g(x) = (x \oplus 1)^n$, а минимальный многочлен любого вектора делит $x^{2^{n-1}} \oplus 1$. По следствию 2 графы всех орбиталов группы $C(g)$ не связны. Подобные преобразования могут возникать в XSL-шифрсистемах.

Приведем условие изоморфизма графов $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_1)}(g), \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_2)}(g)$.

Утверждение 4. Два различных графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_1)}(g), \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_2)}(g)$ изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\psi(\alpha) \oplus \psi\left(\alpha \oplus \gamma_1^{\langle g \rangle}\right) = \gamma_2^{\langle g \rangle} \quad (1)$$

для некоторого преобразования $\psi \in S(V_n)$ и каждого вектора $\alpha \in V_n$.

Доказательство. Изоморфизм графов $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_1)}(g)$ и $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_2)}(g)$ равносильно существованию такого биективного отображения $\psi: V_n \rightarrow V_n$, что $\psi(\alpha) \oplus \psi(\beta) \in \gamma_2^{\langle g \rangle}$, если $\alpha, \beta \in V_n$ и $\alpha \oplus \beta \in \gamma_1^{\langle g \rangle}$. Поэтому из равенства $\psi(\alpha) \oplus \psi\left(\alpha \oplus \gamma_1^{\langle g \rangle}\right) = \gamma_2^{\langle g \rangle}$ получаем изоморфизм графов $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_1)}(g), \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_2)}(g)$.

Если графы изоморфны, то $\psi(\alpha) \oplus \psi\left(\alpha \oplus \gamma_1^{\langle g \rangle}\right) \subseteq \gamma_2^{\langle g \rangle}$ для любого вектора $\alpha \in V_n$. Согласно п. 1 следствия 1 степень каждой вершины графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ равна $|\gamma^{\langle g \rangle}|$. Значит, $|\gamma_1^{\langle g \rangle}| = |\gamma_2^{\langle g \rangle}|$, и выполняется равенство $\psi(\alpha) \oplus \psi\left(\alpha \oplus \gamma_1^{\langle g \rangle}\right) = \gamma_2^{\langle g \rangle}$. Утверждение доказано.

Утверждение 5. Пусть $n \geq 2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in V_n^\times$. Условия $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_1)}(g) \cong \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_2)}(g)$ и $m_{\gamma_1, g}(x) = m_{\gamma_2, g}(x)$ равносильны.

Доказательство. Из утверждения 4 следует, что существование изоморфизма $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_1)}(g) \cong \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_2)}(g)$ равносильно существованию преобразования $\psi \in S(V_n)$, удовлетворяющего равенству (1). Покажем, что преобразование ψ можно взять линейным.

Отметим, что для линейного преобразования ψ равенство (1) равносильно равенству $\psi\left(\gamma_1^{\langle g \rangle}\right) = \gamma_2^{\langle g \rangle}$.

Пусть

$$m_{\gamma_1}(x) = m_{\gamma_2}(x) = x^d \oplus c_{d-1}x^{d-1} \oplus \dots \oplus c_1x \oplus c_0.$$

Положим $\Lambda(\gamma) = \left\{ \gamma^{g^i} \mid i \in \{0, \dots, d-1\} \right\}$ для $\gamma \in V_n$. Так как $\deg(m_{\gamma_i}(x)) = d$, то векторы из множества $\Lambda(\gamma_i)$ линейно независимы, $i = 1, 2$. Поэтому существует такое линейное преобразование $u \in GL_n(2)$, что $\gamma_2^{g^i} = \gamma_1^{g^i u}$, $i = 0, \dots, d-1$.

Аналогично доказательству следствия 2 показываем, что $\gamma_2^{g^i} = \gamma_1^{g^i u}$, $i = d, \dots, |\gamma_1^{(g)}|$. Значит, $(\gamma_1^{(g)})^u = \gamma_2^{(g)}$. Утверждение доказано.

4. Некоторые классы графов орбиталов группы $C(g)$

В алгебраической теории графов наибольший интерес представляют вершинно-транзитивные, реберно-транзитивные, дистанционно-транзитивные и дистанционно-регулярные графы [3].

Напомним, что граф $\bar{\Gamma} = (X, Y)$ с множеством вершин X и множеством ребер Y называется *дистанционно-транзитивным*, если для любых вершин $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in X$, для которых $\mu(\alpha, \alpha') = \mu(\beta, \beta')$, существует элемент $g \in \text{Aut}(\bar{\Gamma})$, удовлетворяющий равенствам $\beta = \alpha^g, \beta' = \alpha'^g$, где $\mu(\alpha, \alpha')$ — расстояние между вершинами α, α' в графе $\bar{\Gamma}$. Граф $\bar{\Gamma} = (X, Y)$ называется *вершинно-транзитивным (реберно-транзитивным)*, если группа $\text{Aut}(\bar{\Gamma})$ действует на множестве X (соответственно Y) транзитивно.

Имеется ряд эквивалентных определений дистанционно-регулярных графов. Нам понадобится следующее определение.

Конечный граф $\bar{\Gamma}$ называется *дистанционно-регулярным*, если для любых $i, j \in \mathbb{N}_0$ и любых $\alpha', \beta' \in X$, для которых $\mu(\alpha', \beta') = j$, число $p_{1,i}^{(j)}$ таких вершин $\delta \in X$, что $\mu(\alpha', \delta) = 1, \mu(\delta, \beta') = i$, зависит от i, j , но не зависит от вершин α', β' .

Дистанционная регулярность графа тесно связана с понятием P -полиномиальной схемы отношений (см., например, [8]) — активно изучаемым объектом в алгебраической комбинаторике. Так, граф является *дистанционно-регулярным*, если степени его матрицы смежности порождают схему отношений. Дистанционно-транзитивный граф дистанционно-регулярен. В [4] описаны графы орбиталов надгрупп группы Хемминга, являющиеся дистанционно-транзитивными или дистанционно-регулярными.

Графом Хемминга на V_n называется граф с множеством вершин V_n и множеством ребер $\{(\alpha, \beta) \in V_n^2 \mid \chi_n(\alpha, \beta) = 1\}$. Очевидно, что если граф изоморфен графу Хемминга, то его метрика изоморфна метрике Хемминга.

Лемма 2. Пусть $n \geq 2, i \in \{1, \dots, d_g - 1\}$, $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_i)}(g)$ — связный граф с диаметром, не меньшим двух. Тогда

- 1) граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_i)}(g)$ реберно-транзитивный;
- 2) если $\gamma_i^{(g)}$ есть базис пространства V_n , то граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_i)}(g)$ дистанционно-транзитивный и $\text{Aut} \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_i)}(g) \approx S_2 \uparrow S_n$.

Доказательство. Пусть $V_n^{(c)}(g, \gamma, \alpha) = \{\theta \in V_n \mid \mu_{\gamma, g}(\alpha, \theta) = c\}$.

1) Если (α, α') и (β, β') — ребра графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_i)}(g)$, то $\alpha' = \alpha \oplus \gamma_i^{g^c}$, $\beta' = \beta \oplus \gamma_i^{g^r}$ для некоторых $c, r \in \{0, \dots, |\gamma_i^{(g)}| - 1\}$ и выполняются равенства

$$\begin{aligned} (\alpha, \alpha \oplus \gamma_i^{g^c})^{g^{r-c}} &= (\alpha^{g^{r-c}}, \alpha^{g^{r-c}} \oplus \gamma_i^{g^r}), \\ (\alpha^{g^{r-c}}, \alpha^{g^{r-c}} \oplus \gamma_i^{g^r})^{h_\lambda} &= (\beta, \beta \oplus \gamma_i^{g^r}), \end{aligned}$$

где $\lambda = \alpha^{g^{r-c}} \oplus \beta$. Таким образом, $(\alpha, \alpha')^b = (\beta, \beta')$ для некоторого $b = g^{r-c} h_\gamma \in \text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_i)}(g))$.

2) Если $\gamma_i^{(g)}$ является базисом V_n , то из утверждений 1 и 4 следует, что граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_i)}(g)$ изоморфен графу Хемминга с метрикой χ_n . Граф Хемминга является дистанционно-транзитивным, а $S_2 \uparrow S_n$ — его группа автоморфизмов. Лемма доказана.

Отметим, что если множество $\gamma_i^{(g)}$ — базис V_n , то $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_i)}(g)$ — дистанционно-регулярный граф, изоморфный графу Хемминга.

Теорема 1. Пусть $n \geq 2$ и граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан.

1. Граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ изоморфен графу Хемминга с метрикой χ_n тогда и только тогда, когда $m_{\gamma, g}(x) = x^n \oplus 1$.

2. Пусть $m_{\gamma, g}(x) = x^r \oplus 1$ для некоторого $r \in \{1, \dots, n\}$. Граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ дистанционно-регулярен тогда и только тогда, когда $r = n$.

3. Пусть $m_{\gamma, g}(x) = x^{r(q-1)} \oplus x^{r(q-2)} \oplus \dots \oplus x^r \oplus 1 = \frac{(x^r)^q - 1}{x^r - 1}$, $r q = m = |\gamma^{(g)}|$. Граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ дистанционно-регулярен тогда и только тогда, когда $r = 1$ или $r \geq 2$ и $q = 3$.

Доказательство. 1. Рассмотрим такое преобразование $a \in GL_n$, что

$$(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^a = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_0)$$

для любого вектора $(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0) \in V_n$. Тогда $\varepsilon_{n-1}^{(a)} = \langle \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1} \rangle = V_n$. Нетрудно убедиться, что $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \varepsilon_{n-1})}(a)$ есть граф Хемминга с метрикой χ_n и $m_{\varepsilon_{n-1}, a}(x) = x^n \oplus 1$. Из утверждения 5 получаем, что условие $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g) \cong \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \varepsilon_{n-1})}(a)$ равносильно равенству $m_{\gamma, g}(x) = m_{\varepsilon_{n-1}, a}(x)$, т. е. $m_{\gamma, g}(x) = x^n \oplus 1$.

2. Пусть $\gamma^{(g)} = \{\delta_0, \dots, \delta_{m-1}\}$ и граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ дистанционно-регулярный. Так как $m_{\gamma, g}(x) = x^r \oplus 1$, то $r = m$. Из связности графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ следует,

что $\langle \gamma^{(g)} \rangle = V_n$ и $m = n$. По лемме 4.1 граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ изоморфен графу Хемминга с метрикой χ_n .

Доказательство в обратную сторону следует из п. 1.

3. Из связности графа и следствия 2 получаем, что $n = r(q - 1)$. Пусть $\Theta_t = \{\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_1^{(r)}, \dots, \theta_t^{(r)}\} \subseteq V_n$ для $t \in \{2, \dots, q\}$, причем Θ_{q-1} — произвольный базис V_n , $\Theta = \Theta_q$ и $\theta_q^{(1)} = \theta_1^{(1)} \oplus \dots \oplus \theta_{q-1}^{(1)}, \dots, \theta_q^{(r)} = \theta_1^{(r)} \oplus \dots \oplus \theta_{q-1}^{(r)}$.

Так как $\deg m_{\gamma, g}(x) = (q - 1)r = n$, то векторы $\gamma, \gamma^g, \dots, \gamma^{(q-1)r-1}$ линейно независимы и равенства $\varphi(\gamma^{g^{(j-1)r+i-1}}) = \theta_j^{(i)}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, q - 1$, задают линейное отображение $\varphi: V_n \rightarrow V_n$. Так как $m_{\gamma, g}(x) = u_g(x)$, то $\varphi(\gamma^{g^{(q-1)r+i-1}}) = \theta_q^{(i)}$, $i = 1, \dots, r$.

Рассмотрим граф $\bar{\Gamma}_\Theta$ с множеством вершин V_n и множеством ребер $\{(\alpha, \beta) \in V_n^2 \mid \alpha \oplus \beta \in \Theta\}$. Пусть $\mu_\Theta(\alpha, \beta)$ — расстояние между вершинами α, β графа $\bar{\Gamma}_\Theta$, $W_n^{(c)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \alpha) = \{\theta \in V_n \mid \mu_\Theta(\alpha, \theta) = c\}$ и

$$W_{n,i}^{(j)} = \{\theta_{b_1}^{(j)} \oplus \dots \oplus \theta_{b_i}^{(j)} \mid 1 \leq b_1 < \dots < b_i \leq q\}, \quad W_{n,i_1,i_2}^{(j)} = W_{n,i_1}^{(j)} \cup W_{n,i_2}^{(j)},$$

$$\Theta^{(j)} = \{\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_{q-1}^{(j)}\}, \quad i, i_1, i_2 \in \{1, \dots, q - 1\}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Рассмотрим граф орбитала $\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}$ надгруппы группы Джевонса (в обозначениях работы [6]), т. е. граф, являющийся объединением некоторых графов орбиталов группы Джевонса и имеющий множество вершин V_{q-1} и множество ребер $\{(\alpha, \beta) \in V_{q-1}^2 \mid \alpha \oplus \beta \in \Omega\}$, где $\Omega = \{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{q-2}, \varepsilon_0 \oplus \dots \oplus \varepsilon_{q-2}\}$. Такой граф возник в [5] как граф орбитала надгруппы группы $S_2 \uparrow S_n$. Его дистанционная транзитивность доказана в [6].

Отметим, что графы $\bar{\Gamma}_{\Theta^{(j)}}$ с множеством вершин $\langle \Theta^{(j)} \rangle$ и множеством ребер $\{(\alpha, \beta) \in \langle \Theta^{(j)} \rangle^2 \mid \alpha \oplus \beta \in \Theta^{(j)}\}$ дистанционно-регулярны, так как изоморфны дистанционно-регулярному графу $\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}$ с множеством вершин V_{q-1} , $j \in \{1, \dots, r\}$. При этом справедливо равенство $\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)} = \bar{\Gamma}_\Omega$. Кроме того,

$$W_n^{(j)}(\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}, \vec{0}) = \{\varepsilon_{r_1} \oplus \dots \oplus \varepsilon_{r_j} \mid 1 \leq r_1 < \dots < r_j \leq q - 1\} \cup$$

$$\cup \{\varepsilon_{r_1} \oplus \dots \oplus \varepsilon_{r_{q-j}} \mid 1 \leq r_1 < \dots < r_{q-j} \leq q - 1\}, \quad j = 1, \dots, \lceil (q - 1)/2 \rceil.$$

Из задания отображения φ следует эквивалентность соотношений $\alpha \oplus \beta \in \gamma^{(g)}$ и $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) \in \Theta_q$. Следовательно, $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g) \cong \bar{\Gamma}_\Theta$.

Дальше нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. Пусть Λ — непустое подмножество из V_n , $\bar{\Gamma}_\Lambda$ — граф с множеством вершин V_n , множеством ребер $\{(\alpha, \beta) \in V_n^2 \mid \alpha \oplus \beta \in \Lambda\}$ и расстоянием $\mu_\Lambda(\alpha, \beta)$ между вершинами,

$$W_n^{(i)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \alpha) = \{\theta \in V_n \mid \mu_\Lambda(\alpha, \theta) = i\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

и $p_{ij}^{(t)}(\theta_1)$ — число таких векторов $\theta_2 \in V_n^{(i)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \vec{0})$, что $\theta_1 \oplus \theta_2 \in V_n^{(j)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \vec{0})$, где $\theta_1 \in V_n^{(t)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \vec{0})$. Граф $\bar{\Gamma}_\Lambda$ дистанционно-регулярен тогда и только тогда, когда $p_{1i}^{(t)}(\theta_1) = p_{1i}^{(t)}(\theta'_1)$ для всех $\theta_1, \theta'_1 \in V_n^{(t)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \vec{0})$ и всех $t, i \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta, \delta \in V_n$ — такие попарно различные векторы, что $\mu_\Lambda(\alpha, \delta) = 1$, $\mu_\Lambda(\delta, \beta) = i$, $\mu_\Lambda(\alpha, \beta) = j$ и $\theta_1 = \alpha \oplus \beta \in W_n^{(j)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \vec{0})$, $\theta_2 = \alpha \oplus \delta \in W_n^{(1)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \vec{0})$, $\theta_1 \oplus \theta_2 = \beta \oplus \delta \in W_n^{(i)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \vec{0})$. Тогда для любых векторов $\alpha', \beta', \delta' \in V_n$, удовлетворяющих равенствам $\theta_1 = \alpha' \oplus \beta'$, $\theta_2 = \alpha' \oplus \delta'$, $\theta_3 = \beta' \oplus \delta' = \theta_1 \oplus \theta_2$, выполняются также и равенства $\mu_\Lambda(\alpha', \delta') = 1$, $\mu_\Lambda(\delta', \beta') = i$, $\mu_\Lambda(\alpha', \beta') = j$.

Таким образом, фиксацией векторов α, β однозначно задается вектор $\theta_1 = \alpha \oplus \beta$. Число вершин $\delta \in V_n$, для которых $\mu_\Lambda(\alpha, \delta) = 1$, $\mu_\Lambda(\delta, \beta) = i$, равно числу всех таких векторов $\theta_2 \in W_n^{(i)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \vec{0})$, что $\theta_1 \oplus \theta_2 \in W_n^{(j)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \vec{0})$. При этом вектор δ однозначно задается равенством $\delta = \alpha \oplus \theta_2$.

Значит, граф $\bar{\Gamma}_\Lambda$ дистанционно-регулярен тогда и только тогда, когда $p_{1i}^{(j)}(\theta_1) = p_{1i}^{(j)}(\theta'_1)$ для всех $\theta_1, \theta'_1 \in W_n^{(j)}(\bar{\Gamma}_\Lambda, \vec{0})$ и всех $j, i \in \mathbb{N}_0$. Лемма доказана.

Пусть $q' = (q - 1)/2$ и $\tilde{p}_{ij}^{(t)}$ — число таких векторов $\delta_2 \in W_n^{(i)}(\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}, \vec{0})$, что $\delta_1 \oplus \delta_2 \in W_n^{(j)}(\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}, \vec{0})$, где $\delta_1 \in W_n^{(t)}(\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}, \vec{0})$. Так как граф $\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}$ дистанционно-регулярен, то величина $\tilde{p}_{ij}^{(t)}$ не зависит от δ_2 . Величина $\tilde{p}_{ij}^{(t)}$ называется структурной константой.

Лемма 4. Для $j, t \in \{0, \dots, \lceil q' \rceil\}$ структурные константы $\tilde{p}_{ij}^{(t)}$ графа $\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}$ равны:

- 1) $\tilde{p}_{1t-1}^{(t)} = t$ для $t \in \{1, \dots, q'\}$ и $\tilde{p}_{1t-1}^{(t)} = q$ для $t > q'$, если $j = t - 1$;
- 2) $\tilde{p}_{1t+1}^{(t)} = q - t$, если $j = t + 1$;
- 3) $\tilde{p}_{1q'}^{(q')} = q'$, если $t = j = q'$;
- 4) $\tilde{p}_{1j}^{(t)} = 0$ в остальных случаях.

Доказательство. Положим $\delta_1 = \varepsilon_1 \oplus \dots \oplus \varepsilon_t$, $\lambda = \varepsilon_1 \oplus \dots \oplus \varepsilon_{q-1}$.

Пусть $j = t - 1$. Если $t \leq \lceil q' \rceil$, то условия $\delta_1 \oplus \delta_2 \in W_n^{(t-1)}(\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}, \vec{0})$ и $\delta_2 \in \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\}$ эквивалентны. Поэтому $\tilde{p}_{1t-1}^{(t)} = t$. Если $t > q'$, то условия $\delta_1 \oplus \delta_2 \in W_n^{(t-1)}(\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}, \vec{0})$ и $\delta_2 \in \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q-1}, \lambda\}$ эквивалентны. Поэтому $\tilde{p}_{1j}^{(t)} = q$.

Пусть $j = t + 1$. Условия $\delta_1 \oplus \delta_2 \in W_n^{(t+1)}(\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}, \vec{0})$ и $\delta_2 \in \{\varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_{q-1}, \lambda\}$ эквивалентны. Поэтому $\tilde{p}_{1t+1}^{(t)} = q - t$.

Если $t = j = q'$, то условия $\delta_1 \oplus \delta_2 \in W_n^{(q')}(\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}, \vec{0})$ и $\delta_2 \in \{\varepsilon_{q'+1}, \dots, \varepsilon_{q-1}, \lambda\}$ эквивалентны. Поэтому $\tilde{p}_{1q'}^{(q')} = q'$.

Аналогичным способом показывается, что во всех остальных случаях $\tilde{p}_{1j}^{(t)} = 0$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство п. 3 теоремы 1. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} W_n^{(j)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0}) &= \\ &= \left\{ \delta_{b_1} \oplus \dots \oplus \delta_{b_u} \mid \delta_{b_i} \in W_{n, j_i, q-j_i}^{(b_i)}, j_1 + \dots + j_u = j, 1 \leq b_1 < \dots < b_u \leq r \right\}, \end{aligned}$$

где $j = 1, \dots, r \cdot \lceil q' \rceil$.

Если $r = 1$, то $W_n^{(j)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0}) = W_n^{(j)}(\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)}, \vec{0})$, $j = 1, \dots, \lceil (q-1)/2 \rceil$.

Значит, $\bar{\Gamma}_{1 \cup (q-1)} \cong \bar{\Gamma}_\Theta$, и граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ дистанционно-регулярен.

Пусть $r \geq 2$ и $t \in \{1, \dots, \lceil q' \rceil\}$. Из леммы 3 следует, что для доказательства дистанционной регулярности графа $\bar{\Gamma}_\Theta$ достаточно проверить выполнение условия $p_{1i}^{(t)}(\theta_1) = p_{1i}^{(t)}(\theta'_1)$ для всех $\theta_1, \theta'_1 \in W_n^{(t)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0})$, $t, i \in \mathbb{N}_0$.

Очевидно, что

$$W_n^{(t)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0}) \oplus \Theta \subseteq W_n^{(t-1)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0}) \cup W_n^{(t)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0}) \cup W_n^{(t+1)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0}),$$

где $W_n^{(1)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0}) = \Theta$. Значит, $p_{1t-c}^{(t)}(\delta) = p_{1t+c}^{(t)}(\delta) = 0$ для любых $\delta \in V_n$ и $c \geq 2$.

Из задания множества $W_{n, j, q-j}^{(b_1)}$ следует, что $W_{n, j, q-j}^{(b_1)} \cap W_{n, i, q-i}^{(b_2)} = \emptyset$, если $b_1 \neq b_2$ или $i \neq j$. Таким образом, для произвольного вектора $\delta \in W_n^{(t)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0})$, представимого в виде $\delta = \delta_1 \oplus \dots \oplus \delta_r$, $\delta_i \in W_{n, t_i, q-t_i}^{(i)}$, и произвольных чисел $j, t \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$p_{1j}^{(t)}(\delta) = \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_r = j, \\ j_c \in \{0, \dots, j\}, c=1, \dots, r}} \left(\tilde{p}_{1j_1}^{(t_1)} + \dots + \tilde{p}_{1j_r}^{(t_r)} \right), \quad t_1 + \dots + t_r = t. \quad (2)$$

Рассмотрим такое максимальное подмножество $\{b_1, \dots, b_u\} \subseteq \{1, \dots, r\}$, что $t_{b_c} > 0$ для $c = 1, \dots, u$. В этом случае, $\delta = \delta_{b_1} \oplus \dots \oplus \delta_{b_u}$, $t_{b_1} + \dots + t_{b_u} = t$.

Пусть $t_{b_i} < \lceil q' \rceil$, $i = 1, \dots, u$. Тогда из леммы 4 и равенства (2) получаем

$$p_{1t+1}^{(t)}(\delta) = \tilde{p}_{1(t_{b_1}+1)}^{(t_{b_1})} + \dots + \tilde{p}_{1(t_{b_u}+1)}^{(t_{b_u})} + \tilde{p}_{11}^{(0)}(r-u) = \sum_{i=1}^u (-t_{b_i}) + qr = qr - t, \quad (3)$$

$$p_{1t-1}^{(t)}(\delta) = \tilde{p}_{1(t_{b_1}-1)}^{(t_{b_1})} + \dots + \tilde{p}_{1(t_{b_u}-1)}^{(t_{b_u})} = \sum_{i=1}^u t_{b_i} = t, \quad p_{1t}^{(t)}(\delta) = 0. \quad (4)$$

Пусть $q - 1$ четно. Если $t_{c_1} = \dots = t_{c_v} = q'$, $t_i < q'$ для всех $i \in \{b_1, \dots, b_u\} \setminus \{c_1, \dots, c_v\}$, то из леммы 4 и равенства (2) имеем

$$p_{1t}^{(t)}(\delta) = \tilde{p}_{1t_{b_1}}^{(t_{b_1})} + \dots + \tilde{p}_{1t_{b_u}}^{(t_{b_u})} = vq', \quad p_{1(t-1)}^{(t)}(\delta) = \tilde{p}_{1(t_{b_1}-1)}^{(t_{b_1})} + \dots + \tilde{p}_{1(t_{b_u}-1)}^{(t_{b_u})} = t. \quad (5)$$

Пусть $r \geq 2$ и $q > 3$. Пусть $t = q' + 1$ и δ, δ' — такие векторы из $W_n^{(t)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0})$, что $\delta = \delta_1 \oplus \delta_2$ и $\delta' = \delta'_1 \oplus \delta'_2$, $\delta_1 \in V_{n,q',q'+1}^{(2)}$, $\delta_2 \in V_{n,1,q-1}^{(2)}$ и $\delta'_1 \in V_{n,j_1,q-j_1}^{(2)}$, $\delta'_2 \in V_{n,j_2,q-j_2}^{(2)}$, $j_1 + j_2 = t$, $j_1, j_2 < q'$. Из равенств (4) и (5) получаем: $p_{1t}^{(t)}(\delta) = q'$, $p_{1t}^{(t)}(\delta') = 0$. Из леммы 3 и изоморфизма $\bar{\Gamma}_{(\vec{0},\gamma)}(g) \cong \bar{\Gamma}_\Theta$ следует, что граф $\bar{\Gamma}_\Theta$ не дистанционно-регулярен.

Пусть $r \geq 2$ и $q = 3$. Тогда из леммы 4 следует, что $\tilde{p}_{11}^{(1)} = 2$, $\tilde{p}_{11}^{(0)} = 3$, $\tilde{p}_{10}^{(1)} = 1$, $\tilde{p}_{10}^{(0)} = 0$ и $\tilde{p}_{1j}^{(t)} = 0$, если $\{t, j\} \not\subseteq \{0, 1\}$. Таким образом, для произвольного вектора вида $\delta = \delta_{b_1} \oplus \dots \oplus \delta_{b_u} \in W_n^{(t)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0})$, где $\delta_{b_i} \in V_{n,1,1}^{(b_i)}$, и $t_{b_1} = \dots = t_{b_u} = 1$ равенство (2) принимает вид

$$\begin{aligned} p_{1t}^{(t)}(\delta) &= \tilde{p}_{1t_{b_1}}^{(t_{b_1})} + \dots + \tilde{p}_{1t_{b_u}}^{(t_{b_u})} = \tilde{p}_{11}^{(1)} + \dots + \tilde{p}_{11}^{(1)} = 2t, \\ p_{1(t-1)}^{(t)}(\delta) &= \tilde{p}_{1(t_{b_1}-1)}^{(t_{b_1})} + \dots + \tilde{p}_{1(t_{b_u}-1)}^{(t_{b_u})} = \tilde{p}_{10}^{(1)} + \dots + \tilde{p}_{10}^{(1)} = t, \\ p_{1(t+1)}^{(t)}(\delta) &= (r-t) \cdot \tilde{p}_{11}^{(0)} = 3 \cdot (r-t). \end{aligned}$$

Из леммы 3 следует, что граф $\bar{\Gamma}_\Theta$ дистанционно-регулярен. Так как $\bar{\Gamma}_{(\vec{0},\gamma)}(g) \cong \bar{\Gamma}_\Theta$, то $\bar{\Gamma}_{(\vec{0},\gamma)}(g)$ дистанционно-регулярен.

Пусть теперь $q - 1$ нечетно. Если $t_{c_1} = \dots = t_{c_v} = \lceil q' \rceil = q/2$ и $t_{b_i} < q/2$ для всех $i \in \{b_1, \dots, b_u\} \setminus \{c_1, \dots, c_v\}$, то $t = vq/2 + \sum_{i \in \{b_1, \dots, b_u\} \setminus \{c_1, \dots, c_v\}} t_i$. Из

равенств (2) и леммы 4 имеем $p_{1t}^{(t)}(\delta) = 0$,

$$p_{1(t-1)}^{(t)}(\delta) = \tilde{p}_{1(t_{b_1}-1)}^{(t_{b_1})} + \dots + \tilde{p}_{1(t_{b_u}-1)}^{(t_{b_u})} = vq + \sum_{i \in \{b_1, \dots, b_u\} \setminus \{c_1, \dots, c_v\}} t_i = t + vq/2. \quad (6)$$

Пусть $q > 2$. Пусть $t = q/2 + 1$ и векторы $\delta, \delta' \in V_n^{(t)}(\bar{\Gamma}_\Theta, \vec{0})$ удовлетворяют условиям $\delta = \delta_1 \oplus \delta_2$, $\delta' = \delta'_1 \oplus \delta'_2$, $\delta_1 \in V_{n, q/2, q/2}^{(2)}$, $\delta_2 \in V_{n, 1, q-1}^{(2)}$ и $\delta'_1 \in V_{n, j_1, q-j_1}^{(2)}$, $\delta'_2 \in V_{n, j_2, q-j_2}^{(2)}$, $j_1 + j_2 = t$, $j_1, j_2 < q/2$. Тогда из равенств (4) и (6) получаем

$$p_{1(t-1)}^{(t)}(\delta) = t + q/2 = q + 1, \quad p_{1(t-1)}^{(t)}(\delta') = q/2 + 1.$$

Из леммы 3 и изоморфизма $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g) \cong \bar{\Gamma}_\Theta$ следует, что граф $\bar{\Gamma}_\Theta$ не дистанционно-регулярен.

Если $q = 2$, то $m_{\gamma, g}(x) = x^r \oplus 1$. Значит, $m = r$. Однако $m = rq$, что невозможно. Теорема доказана.

Отметим, что у ряда $(n \times n)$ -матриц, используемых в блочных шифр-системах, минимальный многочлен имеет вид $(x \oplus 1)^r$. Кроме того, если $r = 1$ в п. 3 теоремы 1, то из доказательства теоремы 1 следует, что граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ изоморфен графу $\bar{\Gamma}_{1 \cup n}$.

Рассмотрим случай, когда $r \geq 2$ и $q = 3$. Тогда матрица преобразования g^r подобна клеточно-диагональной матрице с r диагональными порядка три клетками $a_1 = \dots = a_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. При $r = 2$ и $q = 3$ получаем подобие матриц:

$$g \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае ($r \geq 2$, $q = 3$) матрица преобразования g подобна $(2r \times 2r)$ -матрице $a = (a_{ij})$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i + 1, i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ 1, & \text{если } i = n, j \in \{1, r+1\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При этом

$$m_a(x) = \text{НОК}(m_{\varepsilon_1, a}(x), \dots, m_{\varepsilon_n, a}(x)) = x^n \oplus x^{n/2} \oplus 1 = u_a(x).$$

5. Метрики графов орбиталов группы $C(g)$

В зависимости от структуры преобразования $g \in GL_n$ и вектора $\gamma \in V_n^\times$ возникают как надметрики, так и подметрики метрики Хемминга χ_n . Выведем условие, при котором среди метрик графа орбитала группы $C(g)$ присутствует метрика Хемминга.

Утверждение 6. Пусть $g \in GL_n$ и $M(g)$ — множество всех нетривиальных метрик графов орбиталов группы $C(g)$. Метрика $\chi_n \in M(g)$ тогда и только тогда, когда g — подстановочная матрица, которой соответствует полноцикловая подстановка на множестве $\{0, \dots, n-1\}$.

Доказательство. Если $\chi_n \in M(g)$, то граф связан и по следствию 1 существует такой вектор $\gamma \in V_n$, что

$$V_n^{(1)}(g, \gamma) = \gamma^{(g)} = \Delta_1^{(n)}.$$

Следовательно, $\varepsilon_i^g \in \Delta_1^{(n)}$ для любого $i \in \{0, \dots, n-1\}$, т.е. g — подстановочная матрица. Так как $|\gamma^{(g)}| = n$, то $\text{ord}(g) = n$ и g соответствует полноцикловой подстановке. Утверждение доказано.

Утверждение 7. Пусть $\gamma \in V_n^\times$, $g \in GL_n$. Метрика $\mu_{\gamma, g} \cong \chi_n$ тогда и только тогда, когда $\gamma^{(g)}$ — базис пространства V_n .

Доказательство следует из утверждения 1 и следствия 1.

Укажем связи между метриками графов орбиталов группы $C(g)$ и надгруппами группы Джевонса из работы [5].

Опишем метрики графов орбиталов группы $C(g)$, являющиеся надметриками или подметриками метрики Хемминга. Отметим, что частичная классификация подметрик и надметрик метрики Хемминга приведена в [6, 10].

Лемма 5. 1. Не существует преобразования $g \in GL_n$ и вектора $\gamma \in V_n^\times$, для которых граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан и $\mu_{\gamma, g}$ — надметрика метрики Хемминга χ_n , не совпадающая с χ_n .

2. Пусть $\gamma \in \Delta_i^{(n)}$ и граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан. Метрика $\mu_{\gamma, g}$ тогда и только тогда является подметрикой метрики χ_n , когда $\bigcup_{j=1}^c \Delta_j^{(n)} = \gamma^{(g)}$ для некоторого $c \in \{i, \dots, n\}$.

Доказательство. 1. Предположим, что $\mu_{\gamma, g}$ — надметрика метрики Хемминга χ_n для некоторого $g \in GL_n$. Тогда $V_n^{(i)}(g, \gamma) = \Delta_i^{(n)}$ и $V_n^{(t)}(g, \gamma) \subset \Delta_t^{(n)}$ для некоторых $t \in \{1, \dots, n-1\}$ и $i = 1, 2, \dots, t-1$. Если $t = 1$

и $V_n^{(1)}(g, \gamma) \subset \Delta_1^{(n)}$, то из следствия 1 получаем несвязность графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$. Если $t \geq 2$, то из равенства $V_n^{(1)}(g, \gamma) = \Delta_1^{(n)}$ и утверждения 1 следует, что $V_n^{(i)}(g, \gamma) = \Delta_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, t$.

П. 2 непосредственно следует из определения подметрики и утверждения 1. Лемма доказана.

Приведем пример несвязного графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$, у которого существуют компоненты связности, изоморфные графу Хемминга.

ПРИМЕР 1. Пусть g — подстановочная матрица, не являющаяся полноцикловой подстановкой на множестве $\{0, \dots, n-1\}$, $\gamma \in \Delta_1^{(n)}$, $r = \deg m_{\gamma, g}(x) = |\gamma^{(g)}|$. Тогда граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ состоит из 2^{n-r} изоморфных компонент связности, а метрика каждой компоненты связности графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ изоморфна метрике Хемминга χ_r на V_r .

Если $G \leq S(V_n)$, $\{\vec{0}\} \times \Delta_n^{(1)} \subseteq (\alpha, \beta)^G$, то орбитал $(\alpha, \beta)^G$ называется базовым (см. [6]). Пусть R — надгруппа группы подстановочных матриц $\tilde{S}_n$, ρ_R — базовая метрика, т.е. метрика базового орбитала группы R , и g — произвольное преобразование из GL_n ,

$$h_{1,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{2,n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_n^{(1)} = \langle \tilde{S}_n, h_{1,n} \rangle, \quad R_n^{(1)} = \langle \tilde{S}_n, h_{2,n} \rangle.$$

Группы $R_n^{(1)}$, $S_n^{(1)}$, возникшие в [5], изоморфны группе $\tilde{S}_{n+1}$, и являются наименьшими надгруппами группы $\tilde{S}_n$. Группы $AR_n^{(1)}$, $AS_n^{(1)}$, порожденные соответственно группами $R_n^{(1)}$, $S_n^{(1)}$ и группой сдвигов, являются наименьшими надгруппами группы Джевонса. Опишем свойства их базовых метрик.

Для произвольных $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $g \in GL_n$ положим

$$n_i(g) = \left| \left\{ \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g) \mid \gamma \in \Delta_i^{(n)} \right\} \right|.$$

Утверждение 8. Если $n \geq 3$, то:

1. Для каждого преобразования $g \in S_n^{(1)} \setminus \tilde{S}_n$ существует такая пара $(j, r_g) \in \{0, \dots, n-1\} \times S_n$, что

$$g: (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0) \rightarrow (\alpha_{(n-1)r_g}, \dots, \alpha_{(j+1)r_g}, \alpha_0 \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1}, \alpha_{(j-1)r_g}, \dots, \alpha_{0r_g}). \quad (7)$$

2. Если g, g' — различные преобразования из $S_n^{(1)} \setminus \tilde{S}_n$, то:

2.1. Графы орбиталов групп $C(g)$ и $C(g')$ изоморфны тогда и только тогда, когда подстановки $r_g, r_{g'}$ имеют одинаковую цикловую структуру.

2.2. Если подстановка r_g имеет неподвижные точки, то все графы орбиталов группы $C(g)$ не связны.

2.3. Если подстановка r_g является произведением $t \geq 2$ независимых циклов, то для любого вектора $\gamma \in \bigcup_{i=1}^{t-1} \Delta_i^{(n)}$ граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ не связан.

3. Не существует пары $(\gamma, g) \in (V_n^\times, S_n^{(1)} \setminus \tilde{S}_n)$, удовлетворяющей равенству $\rho_{S_n^{(1)}} = \mu_{\gamma, g}$.

4. Если $g \in R_n^{(1)} \setminus \tilde{S}_n$ и подстановка $r_g \in S_n$ полноцикловая, то $n_1(g) = n/2$ при четном n и все графы из множества $\{\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g) \mid \gamma \in \Delta_1^{(n)}\}$ связны; $n_1(g) = (n+1)/2$ при нечетном n и число связных графов из множества $\{\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g) \mid \gamma \in \Delta_1^{(n)}\}$ равно $(n-1)/2$.

Доказательство. П. 1 непосредственно следует из задания группы $S_n^{(1)}$ системой образующих $\langle \tilde{S}_n, h_{1,n} \rangle$ и равенства $h_{1,n}^2 = e_n$.

2. Пусть подстановка $\tilde{s}$ и соответствующая подстановочная матрица s связаны соотношением

$$(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^s = (\alpha_{(n-1)\tilde{s}}, \dots, \alpha_{0\tilde{s}}).$$

Пусть $g = s_1 h_{1,n} s_2$ для некоторых подстановочных матриц s_1, s_2 . Тогда

$$(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^{s_1 h_{1,n}} = (\alpha_{n-1} \oplus \dots \oplus \alpha_0, \alpha_{(n-2)\tilde{s}_1}, \dots, \alpha_{0\tilde{s}_1})$$

и

$$\begin{aligned} & (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^g = \\ & = (\alpha_i, \alpha_{(n-2)\tilde{s}_1\tilde{s}_2}, \dots, \alpha_{(j+1)\tilde{s}_1\tilde{s}_2}, \alpha_{n-1} \oplus \dots \oplus \alpha_0, \alpha_{(j-1)\tilde{s}_1\tilde{s}_2}, \dots, \alpha_{0\tilde{s}_1\tilde{s}_2}), \end{aligned}$$

где $i^{\tilde{s}_1} = j$ и $j^{\tilde{s}_2} = n-1$.

Значит, преобразование $g = s_1 h_{1,n} s_2$ однозначно задается такой парой $(j, r_g) \in \{0, \dots, n-1\} \times S_n$, что

$$(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^g = (\alpha_{(n-1)^g}, \dots, \alpha_{(j+1)^g}, \alpha_0 \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1}, \alpha_{(j-1)^g}, \dots, \alpha_{0^g}).$$

Кроме того, каждая пара (j, r_g) однозначно задает некоторый элемент группы $S_n^{(1)}$, что дает взаимно однозначное соответствие $\varphi: \{0, \dots, n-1\} \times S_n \rightarrow S_n^{(1)}$ и

$$S_{n,1}^{(1)} = \{\varphi(j, r_g) \mid (j, r_g) \in \{0, \dots, n-1\} \times S_n\}.$$

Ясно, что $S_{n,1}^{(1)} \subset S_n^{(1)}$, $S_{n,1}^{(1)} \cap \tilde{S}_n = \emptyset$. Учитывая равенства $|S_{n,1}^{(1)}| = n!n$, $|\tilde{S}_n| = n!$, $|S_n^{(1)}| = (n+1)!$, $|S_{n,1}^{(1)}| + |\tilde{S}_n| = |S_n^{(1)}|$, из количественных соображений получаем, что $S_{n,1}^{(1)} \cup \tilde{S}_n = S_n^{(1)}$.

Значит, каждое преобразование $g \in S_n^{(1)} \setminus \tilde{S}_n$ однозначно задается парой $(j, r_g) \in \{0, \dots, n-1\} \times S_n$. Теперь п. 2 следует из п. 1.

Пп. 3 и 4. Если $\rho_{S_n^{(1)}} = \mu_{\gamma, g}$ для некоторых $\gamma \in V_n^\times$ и $g \in S_n^{(1)} \setminus \tilde{S}_n$, то

$$V_n^{(1)}(g, \gamma) = V_n^{(1)}(\rho_{S_n^{(1)}}) = \gamma^{(g)} = \Delta_1^{(n)} \cup \Delta_2^{(n)}.$$

При этом $|V_n^{(1)}(\rho_{S_n^{(1)}})| = n + \binom{n}{2}$.

Пусть $j = 0$, $r_g = (n-1, \dots, 1, 0)$, $(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^g = (\alpha_{n-2}, \dots, \alpha_0, \alpha_0 \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1})$, $t = 0, \dots, \lceil n/2 \rceil$. Тогда

$$\varepsilon_t^{(g)} = V_n^{(1)}(g, \varepsilon_t) = \{\varepsilon_t\} \cup \{\varepsilon_{n-t-1}\} \cup \left(\bigcup_{i=0}^{n-t-1} \{\varepsilon_i \oplus \varepsilon_{i+t}\} \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{t-1} \{\varepsilon_{n-t+i} \oplus \varepsilon_i\} \right).$$

Если n четно, то $|V_n^{(1)}(g, \varepsilon_t)| = n+1$ и $\langle \varepsilon_t^{(g)} \rangle = V_n$, т. е. все графы множества $\{\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g) \mid \gamma \in \Delta_1^{(n)}\}$ связны.

Если n нечетно и $t = (n+1)/2$, то

$$\varepsilon_t^{(g)} = V_n^{(1)}(g, \varepsilon_t) = \{\varepsilon_t\} \cup \left(\bigcup_{i=0}^{n-t-1} \{\varepsilon_i \oplus \varepsilon_{i+t}\} \right),$$

т. е. $|V_n^{(1)}(g, \varepsilon_t)| = (n+1)/2$. Если $t \in \{1, \dots, (n-1)/2\}$, то $|V_n^{(1)}(g, \varepsilon_t)| = n+1$ и граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \varepsilon_t)}(g)$ связан.

Следовательно, для любого вектора $\gamma \in \Delta_1^{(n)}$ имеем $|V_n^{(1)}(g, \gamma)| < |V_n^{(1)}(\rho_{S_n^{(1)}})|$. Из пп. 1 и 2 следует, что если r_g — произвольная полноцикловая подстановка и преобразование g задается равенством (7), то $|V_n^{(1)}(g, \gamma)| < |V_n^{(1)}(\rho_{S_n^{(1)}})|$ для любого вектора $\gamma \in \Delta_1^{(n)}$.

Пусть теперь подстановка r_g не полноцикловая. Из п. 2 утверждения 8 следует, что граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ не связан и $|V_n^{(1)}(g, \gamma)| \leq n$, если $\gamma \in \Delta_1^{(n)}$. Следовательно, $\rho_{S_n^{(1)}} \neq \mu_{\gamma, g}$ для всех $\gamma \in V_n^\times$ и $g \in S_n^{(1)} \setminus \tilde{S}_n$. Утверждение доказано.

Пусть метрика ρ на множестве V_n инвариантна относительно группы сдвигов, т. е. $\rho(\alpha, \theta) = \rho(\alpha \oplus \beta, \theta \oplus \beta)$ для всех $\alpha, \theta, \beta \in V_n$. Положим $\|\alpha\|_\rho = \rho(\alpha, 0)$ и $\|\alpha\| = \|\alpha\|_{\chi_n}$ при $\alpha \in V_n$.

Коэффициент рассеивания (branch number) (см. [14, 15]) линейного преобразования $a \in GL_n(2)$ и метрики Хемминга χ_n естественным образом обобщается на произвольную метрику ρ на пространстве V_n следующим образом:

$$b_\rho(a) = \min \left\{ \|\alpha\|_\rho + \|\alpha^a\|_\rho \mid \alpha \in V_n^\times \right\}.$$

Величина $b_\rho(a)$ также отражает степень рассеивания преобразования a и используется, например, в разностном методе и его обобщениях. В разностном методе часто используется метрика Хемминга, в методе усеченных разностей вектор разбивается на блоки и рассматривается подметрика метрики Хемминга. При обосновании стойкости XSL-шифрсистем значение $b_{\chi_n}(a)$ стараются сделать максимальным.

Нетрудно убедиться, что любое преобразование $g \in S_n^{(1)}$ имеет наименьшее возможное значение величины $b_{\chi_n}(g)$, равное двум. Действительно, пусть

$$(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^g = (\alpha_{(n-1)r_g}, \dots, \alpha_{(j+1)r_g}, \alpha_0 \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1}, \alpha_{(j-1)r_g}, \dots, \alpha_{0r_g})$$

для некоторых $(j, r_g) \in \{0, \dots, n-1\} \times S_n$. Тогда $\varepsilon_j^g = \varepsilon_j$. Значит, $b_{\chi_n}(g) = 2$.

Утверждение 9. Если $n \geq 3$, то:

1. Для каждого преобразования $g \in R_n^{(1)} \setminus \tilde{S}_n$ существует такая пара $(j, r_g) \in \{0, \dots, n-1\} \times S_n$, что

$$\begin{aligned} (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^g &= \\ &= (\alpha_{(n-1)r_g} \oplus \alpha_{jr_g}, \dots, \alpha_{(j+1)r_g} \oplus \alpha_{jr_g}, \alpha_{jr_g}, \alpha_{(j-1)r_g} \oplus \alpha_{jr_g}, \dots, \alpha_{0r_g} \oplus \alpha_{jr_g}). \end{aligned}$$

2. Пусть $g, g' \in R_n^{(1)} \setminus \widetilde{S}_n$, $g' \neq g$. Графы орбиталов групп $C(g)$ и $C(g')$ изоморфны тогда и только тогда, когда подстановки $r_g, r_{g'}$ имеют одинаковую цикловую структуру.

3. Если $\gamma \in V_n^\times$ и преобразованию $g \in R_n^{(1)} \setminus \widetilde{S}_n$ соответствует полноцикловая подстановка $r_g \in S_n$, то $\rho_{R_n^{(1)}} = \mu_{\gamma, g}$. Кроме того, $n_1(g) = 1$ и граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \varepsilon_0)}(g)$ связан.

Доказательство. Доказательство п. 1 непосредственно следует из задания группы $R_n^{(1)}$ системой образующих $\langle \widetilde{S}_n, h_{2,n} \rangle$ и полностью аналогично доказательству п. 1 утверждения 8. Значит, каждое преобразование $g \in R_n^{(1)} \setminus \widetilde{S}_n$ однозначно задается парой $(j, r_g) \in \{0, \dots, n-1\} \times S_n$.

П. 2 следует из п. 1.

3. Отметим, что если $\rho_{R_n^{(1)}} = \mu_{\gamma, g}$ для некоторых $\gamma \in V_n^\times$ и $g \in R_n^{(1)} \setminus \widetilde{S}_n$, то

$$V_n^{(1)}(g, \gamma) = V_n^{(1)}(\rho_{R_n^{(1)}}) = \gamma^{(g)} = \Delta_1^{(n)} \cup \Delta_n^{(n)},$$

причем $|V_n^{(1)}(\rho_{R_n^{(1)}})| = n+1$.

Пусть $r_g = (n-1, n-2, \dots, 1, 0), j=0$ и

$$(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^g = (\alpha_{n-2} \oplus \alpha_{n-1}, \alpha_{n-3} \oplus \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0 \oplus \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1}).$$

Тогда $\varepsilon_0^{(g)} = \Delta_1^{(n)} \cup \Delta_n^{(n)}$. Значит, $V_n^{(1)}(g, \gamma) = V_n^{(1)}(\rho_{R_n^{(1)}})$ и $\rho_{R_n^{(1)}} = \mu_{\gamma, g}$. Так как $\Delta_1^{(n)} \subset \gamma^{(g)}$, то $n_1(g) = 1$.

Из пп. 1 и 2 следует, что если $g \in R_n^{(1)} \setminus \widetilde{S}_n$, $r_g \in S_n$ и $\gamma \in \Delta_1^{(n)}$, то $V_n^{(1)}(g, \gamma) = V_n^{(1)}(\rho_{R_n^{(1)}})$, т. е. $\rho_{R_n^{(1)}} = \mu_{\gamma, g}$. Аналогично получаем, что $n_1(g) = 1$. Утверждение доказано.

Если $g \in R_n^{(1)}$, то $b_{\chi_n}(g) \leq 2$. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)^g &= \\ &= (\alpha_{(n-1)g} \oplus \alpha_{j'g}, \dots, \alpha_{(j+1)g} \oplus \alpha_{j'g}, \alpha_{j'g}, \alpha_{(j-1)g} \oplus \alpha_{j'g}, \dots, \alpha_{0g} \oplus \alpha_{j'g}) \end{aligned}$$

для некоторой пары $(j, r_g) \in \{0, \dots, n-1\} \times S_n$. Тогда $\varepsilon_i^g = \varepsilon_{i'g}$, $i = 0, \dots, n-1$, $i \neq j$. Значит, $b_{\chi_n}(g) = 2$.

Укажем связь коэффициента рассеивания b_{χ_n} с базовыми подметриками метрики Хемминга. Пусть R — надгруппа группы Джевонса [6], $g \in R$, Γ_R — орбитал группы R , $(0, \varepsilon_0) \in \Gamma_R$, μ_R — метрика графа $\bar{\Gamma}_R$,

$$U_R = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \mu_R(\vec{0}, \alpha) = 1 \quad \forall \alpha \in \Delta_n^{(i)} \right\}, \quad V_{\mu_R} = \bigcup_{i \in U_R} \Delta_n^{(i)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$2 \leq b_{\chi_n}(g) \leq 1 + \max \{j \mid j \in U_R\}.$$

Рассмотрим группу $R_n^{(2)} = \langle \tilde{S}_n, h_n \rangle$,

$$h_n = h_{1,n} h_{2,n} h_{1,n}, \quad h_{2m} = 1_{2m} \oplus e_{2m}, \quad h_{2m+1} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{1} \\ 1^\downarrow & h_{2m} \end{pmatrix},$$

где 1_{2m} — $(2m \times 2m)$ -матрица из единиц.

Для $g \in h_n \tilde{S}_n$ несложно показать, что $b_{\chi_n}(g) = 3$.

Рассмотрим надгруппу $S_{2m}^{(2)} = \langle \tilde{S}_{2m}, h_{1,2m}, h_{2,2m} \rangle$ групп $R_{2m}^{(1)}, S_{2m}^{(1)}$. Ее орбиты имеют вид

$$\Delta_0^{(n)}, \quad \Delta_{2i-1}^{(n)} \cup \Delta_{2i}^{(n)} \cup \Delta_{2m-(2i-1)}^{(n)} \cup \Delta_{2m-2i}^{(n)}, \quad i = 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor.$$

Поэтому $2 \leq b_{\chi_n}(g) \leq \lfloor (2n+4)/3 \rfloor$ для всех $g \in S_{2m}^{(2)}$; оценка сверху следует из [12].

6. Комбинаторно-геометрические параметры некоторых классов преобразований

Напомним, что произведение двух циркулянтных матриц — также циркулянтная матрица. Пусть $\alpha = (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)$, $\alpha \in V_n$.

Будем говорить, что $(n \times n)$ -матрица $a = (a_{ij})$ над полем $GF(2)$ является t -циркулянтной с порождающим вектором α , если $a_{ij} = \alpha_{(n-1-j-it) \pmod n}$ для всех $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ и некоторого $t \in \{1, \dots, n-1\}$.

Пусть $\alpha = (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)$, $\beta = (\beta_{n-1}, \dots, \beta_0)$ — произвольные векторы из V_n . Матрицы $a = (a_{ij})$ и $b = (b_{ij})$ соответственно d_1 -циркулянтная и d_2 -циркулянтная с порождающими векторами $\alpha = (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)$ и $\beta = (\beta_{n-1}, \dots, \beta_0)$. Тогда ab есть $d_1 d_2$ -циркулянтная матрица.

Пусть P — поле разложение многочлена $x^n \oplus 1$,

$$c_n = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mathbf{0} & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что $u_{c_n}(x) = x^n \oplus 1$. Кроме того, 1-циркулянтная матрица a с порождающим вектором $\alpha = (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)$ представима в виде $a = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-1-k} c_n^k$,

а l -циркулянтная матрица $a^{(l)}$ — в виде $a^{(l)} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n-1-k} c_n^{lk \bmod n}$, $l \in \{1, \dots, n-1\}$ (см., например, [11]).

Пусть $n = 2^t d$, где d — простое число, $d > 2$, $t \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-1-k} x^k$. Пусть $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}$ — корни многочлена $x^d \oplus 1$, т. е.

$$x^n \oplus 1 = (x^d \oplus 1)^{2^t} = (x \oplus 1)^{2^t} \cdot \prod_{i=1}^{d-1} (x \oplus \lambda_i)^{2^t}.$$

Тогда матрицы c_n и $a^{(l)}$ подобны жордановым матрицам

$$\tilde{c}_n = \begin{pmatrix} b_0 & \mathbf{0} \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots \mathbf{0} & b_{d-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{a}^{(l)} = f(\tilde{c}_n^l) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0^l & \mathbf{0} \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots \mathbf{0} & \tilde{b}_{d-1}^l \end{pmatrix}$$

соответственно, где b_i — жорданова $(2^t \times 2^t)$ -клетка с корнем λ_i , т. е. $b_i = \text{diag}(\lambda_i, \dots, \lambda_i)$, и $\tilde{b}_i = f(b_i)$, $i = 0, \dots, d-1$. Характеристический многочлен матрицы $\tilde{a}^{(l)}$ есть $\prod_{i=0}^{d-1} (x \oplus f(\lambda_i^l))^{2^t}$.

В качестве иллюстрации рассмотрим преобразование $g = (g_{ij})$ из унитарной группы UT_n , $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. В этом случае преобразование g принадлежит силовской 2-подгруппе группы $GL_n(2)$ и подобно верхне-треугольной матрице. Положим $g^d = (g_{ij}^{(d)})$ и $g_{ij}^{(1)} = g_{ij}$, $d \in \mathbb{N}$.

Утверждение 10. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $n = 2^m$, $g \in UT_n$, $d \in \{1, \dots, m-1\}$, $i \in \{1, \dots, 2^m - 1\}$, $j \in \{i+1, \dots, i+2^d\}$. Тогда

$$g_{ij}^{(2^d)} = \begin{cases} 0, & \text{если } j < i + 2^d, \\ g_{i(i+1)} g_{(i+1)(i+2)} \cdots g_{(i+2^d-1)(i+2^d)}, & \text{если } j = i + 2^d. \end{cases}$$

Доказательство проводится индукцией по d , и мы его опускаем.

Из утверждения 10 следует, что если для матрицы $g \in UT_n$ найдутся числа $d \in \{1, \dots, m-1\}$, $i \in \{1, \dots, m-d\}$, удовлетворяющие равенству

$$g_{i(i+1)} = g_{(i+1)(i+2)} = \cdots = g_{(i+2^d-1)(i+2^d)} = 1,$$

то $\text{ord}(g) \geq 2^{d+1}$. В частности, если $d = m-1$, то $\text{ord}(g) = n$.

Ясно, что $\varepsilon_0 g = \varepsilon_0$ для любой матрицы $g \in UT_n$. Значит, $\Gamma_{(\vec{0}, \varepsilon_0)}(g) = \{(\alpha, \alpha \oplus \varepsilon_0) \mid \alpha \in V_n\}$. Граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \varepsilon_0)}(g)$ этого орбитала состоит из 2^{n-1} компонент связности, число вершин в каждой компоненте связности равно двум, и $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \varepsilon_0)}(g)) = S_{2^{n-1}} \wr S_2$.

Отметим, что g имеет систему вложенных инвариантных подпространств $W_i = \langle \varepsilon_{n-i}, \dots, \varepsilon_{n-1} \rangle$, $W_1 < \dots < W_{n-1}$.

Укажем минимальный многочлен и свойства графов орбиталов группы $C(g)$ при $g \in UT_n$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6. Пусть $g \in UT_n$, $b = g \oplus e$, $b^r = (b_{ij}^{(r)})$, $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда для $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, r+i\}$ справедливо равенство

$$b_{ij}^{(r)} = \begin{cases} g_{i(i+1)} \cdots g_{(r+i)(r+i+1)}, & \text{если } j = r+i, \\ 0, & \text{если } j < r+i. \end{cases}$$

Доказательство проводится индукцией по r , и мы его опускаем.

Для $i \in \{0, \dots, n-1\}$ положим

$$A_n^{(i)} = \left\{ \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-i-1}, 1, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_0 \right) \mid (\alpha_{i-1}, \dots, \alpha_0) \in V_i \right\}.$$

Утверждение 11. Пусть $n \geq 2$, $r \in \{1, \dots, n\}$ и $g \in UT_n$.

1. Равенство $m_g(x) = u_g(x) = (x \oplus 1)^n$ выполняется тогда и только тогда, когда $g_{12} = \dots = g_{(n-1)n} = 1$.
2. Если $g_{12}g_{23} \cdots g_{(n-1)n} = 0$, то все графы орбиталов группы $C(g)$ не связны.
3. Пусть $g_{12} = \dots = g_{(n-1)n} = 1$. Тогда $m_{\gamma, g}(x) = (x \oplus 1)^{i+1}$ для любого вектора $\gamma \in A_n^{(i)}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Доказательство. Положим $b = g \oplus e_n$, $b^r = (b_{ij}^{(r)})$, $r \in \{1, \dots, n\}$. Из леммы 6 следуют пп. 1 и 2.

3. Пусть $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\gamma = (\gamma_{n-1}, \dots, \gamma_0) \in A_n^{(i)}$ и $\gamma' = \gamma b^c$, $c \in \{0, \dots, n-1\}$. Для $j \in \{0, \dots, n-1\}$ справедливо равенство

$$\tilde{\gamma}_{n-j-1} = \sum_{k=1}^n \oplus \gamma_{n-k} b_{k(j+1)}^{(c)} = \sum_{k=n-i}^{j-c+1} \oplus \gamma_{n-k} b_{k(j+1)}^{(c)},$$

причем $\tilde{\gamma}_{n-j-1} = 0$ при $j - c + 1 < n - i$. Кроме того, $\tilde{\gamma} = \vec{0}$ при $i < c$ (так как $n - 1 < n - i + c - 1$).

Если $i = c$, то при $j < n - 1$ имеем $\tilde{\gamma}_{n-j-1} = 0$. Если же $j = n - 1$, то $\tilde{\gamma}_0 = \gamma_i b_{(n-i)n}^{(i)} = 1$, так как $\gamma_i = 1$ по определению, а равенство $b_{(n-i)n}^{(i)} = 1$ следует из леммы 6. Значит, $\gamma(g \oplus e)^i \neq \vec{0}$, а $\gamma(g \oplus e)^{i+1} = \vec{0}$.

Таким образом, $m_{\gamma,g}(x) = (x \oplus 1)^{i+1}$ для любого вектора $\gamma \in A_n^{(i)}$. Утверждение доказано.

Для $a \in GL_n$ положим

$$B_n^{(0)}(a) = \{\beta \in V_n^\times \mid \beta a = \beta\},$$

$$B_n^{(t)}(a) = \left\{ \beta \in V_n^\times \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{t-1} B_n^{(j)}(a) \right) \mid \beta a^{2^t} = \beta \right\}, \quad t = 1, \dots, m.$$

Отметим, что при $a_{12} = \dots = a_{(n-1)n} = 1$ из утверждения 10 следуют равенства $\text{ord}(a) = n$ и $B_n^{(0)}(a) = \{\varepsilon_0\}$.

Далее нам понадобится следующий технический результат.

Лемма 7. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $g \in UT_n$ и $g_{12} = \dots = g_{(n-1)n} = 1$. Тогда

$$B_n^{(0)} = A_n^{(0)}, \quad B_n^{(t)} = \bigcup_{j=2^{t-1}}^{2^t-1} A_n^{(j)} \quad \text{для любого } t \in \{1, \dots, m\}.$$

Доказательство проводится индукцией по t , и мы его опускаем.

Для $i \in \{0, \dots, n-1\}$ и $g \in UT_n$ обозначим через $A_n^{(i)}(g)$ множество всех таких векторов $\gamma \in A_n^{(i)}$, что $\Gamma_{(\vec{0}, \gamma)}(g) \neq \Gamma_{(\vec{0}, \beta)}(g)$ для каждого $\beta \in \Gamma^{(i)}(g) \setminus \{\gamma\}$. Положим $\Omega_n^{(i)}(g) = \{\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g) \mid \gamma \in A_n^{(i)}(g)\}$.

Опишем классы изоморфных графов среди графов орбиталов группы $C(g)$ для $g \in UT_n$.

Следствие 3. Пусть $n \geq 2$, $g \in UT_n$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда все графы из множества $\Omega_n^{(i)}(g)$ изоморфны, $|\Omega_n^{(i)}(g)| = 2^{i - \lceil \log_2(i+1) \rceil}$. Если $i = 2^t - 1$, $t \in \{1, \dots, \lfloor \log_2 n \rfloor + 1\}$, то компоненты связности графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ изоморфны графу Хемминга на пространстве V_{2^t} .

Доказательство. Из утверждения 5 и утверждения 11 следует, что все графы из множества $\Omega_n^{(i)}(g)$ изоморфны. Согласно лемме 7 для любого

вектора $\gamma \in A_n^{(i)}$ справедливо равенство $|\gamma^{(g)}| = 2^{\lceil \log_2(i+1) \rceil + 1}$. Так как каждому вектору $\gamma \in A_n^{(i)}$ соответствует граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ и все графы множества $A_n^{(i)}(g)$ изоморфны, то и все графы $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$, $\gamma \in A_n^{(i)}$, изоморфны. Кроме того, из леммы 7 следует, что $A_n^{(i)}g = A_n^{(i)}$. Очевидно, что если $\gamma_2 \in \gamma_1^{(g)}$ для $\gamma_1, \gamma_2 \in A_n^{(i)}(g)$, то $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_1)}(g) = \bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma_2)}(g)$. Таким образом,

$$|\Omega_n^{(i)}(g)| = |A_n^{(i)}| / 2^{\lceil \log_2(i+1) \rceil + 1} = 2^{i - \lceil \log_2(i+1) \rceil}.$$

Если $i = 2^t - 1$, то $m_{\gamma, g}(x) = (x \oplus 1)^{2^t} = x^{2^t} \oplus 1$ для любого $\gamma \in A_n^{(i)}$. Если $2^t < n$, то граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ не связан, и из теоремы 1 получаем, что все его компоненты связности изоморфны графу Хемминга на пространстве V_{2^t} . Значит, их метрики изоморфны метрике χ_{2^t} . Если же $2^t = n$, то граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ связан и изоморфен графу Хемминга с метрикой χ_n . Следствие доказано.

Приведем примеры метрик и других характеристик графов орбиталов группы $C(g)$ для циркулянтных матриц и матриц некоторых блочных шифрсистем.

Примеры

1. У циркулянтной матрицы

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

характеристический многочлен есть $u_{a_1}(x) = (x \oplus 1)^4$, минимальный многочлен $m_{a_1}(x) = (x \oplus 1)^2$. Матрица a_1 приводима, $a_1^2 = e$. Все графы орбиталов не связны. Кроме того, $(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)a_1 = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_3 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_0 = 0$. Пусть B_4 — множество всех векторов четного веса из $V_4^\times$, т. е. $B = \Delta_2^{(4)} \cup \Delta_4^{(4)}$.

В зависимости от вектора $\gamma \in V_4^\times$ возможны два вида орбиталов:

$$\Gamma_{(\vec{0}, \gamma)}(g) = \begin{cases} \{(\alpha, \alpha \oplus \theta) \mid \alpha \in V_4, \theta \in \{\gamma, \gamma^{a_1}\}\}, & \text{если } \gamma \in V_4^\times \setminus B_4, \\ \{(\alpha, \alpha \oplus \gamma) \mid \alpha \in V_4\}, & \text{если } \gamma \in B_4. \end{cases}$$

Таким образом, если $\gamma \in B_4$, то граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ состоит из 2^3 компонент связности, число вершин у каждой компоненты связности равно двум

и $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)) = S_{2^3} \wr S_2$. Если же $\gamma \in V_4^\times \setminus B_4$, то граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ состоит из 2^2 компонент связности, число вершин у каждой компоненты связности равно 4. Метрика графа каждой компоненты связности изоморфна метрике Хемминга χ_2 . Кроме того, $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)) = S_{2^2} \wr D_4$, где D_4 — группа диэдра.

2. Согласно [13] матрица

$$a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

обладает хорошими рассеивающими свойствами. Она используется в алгоритме блочного шифрования E2. Ее коэффициент рассеивания равен 5 и лишь на единицу меньше максимального для (0,1)-матриц (см. [12]).

Ее характеристический многочлен равен $(x^2 \oplus x \oplus 1)^4$, $\text{ord}(a_2) = 12$. Непосредственные вычисления показали, что число попарно различных графов орбиталов равно 23. Причем имеются: 1) 20 графов орбиталов, которым соответствует орбита преобразования a_2 длины 12; 2) 2 изоморфных графа орбиталов, которым соответствует орбита преобразования a_2 длины 6; 3) один граф орбитала, которому соответствует орбита преобразования a_2 длиной 3.

3. У матрицы

$$a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

алгоритма блочного шифрования Camellia характеристический и минимальный многочлен равны $(x \oplus 1)^8$. Выполняется равенство $a_3^8 = e$.

Положим

$$\begin{aligned} B_8^{(0)} &= \{ \alpha \in V_8^\times \mid \alpha a_3 = \alpha \}, \\ B_8^{(1)} &= \{ \alpha \in V_8^\times \setminus B_8^{(0)} \mid \alpha a_3^2 = \alpha \}, \\ B_8^{(2)} &= \{ \alpha \in V_8^\times \setminus (B_8^{(0)} \cup B_8^{(1)}) \mid \alpha a_3^4 = \alpha \}. \end{aligned}$$

В зависимости от вектора $\gamma \in V_8^\times$ возможны следующие классы орбиталов:

$$\begin{aligned} \Gamma_{(\vec{0}, \gamma)}(g) &= \\ &= \begin{cases} \{ (\alpha, \alpha \oplus \theta) \mid \alpha \in V_8, \theta \in \gamma^{\langle a_3 \rangle} \}, & \text{если } \gamma \in V_8^\times \setminus (B_8^{(0)} \cup B_8^{(1)} \cup B_8^{(2)}), \\ \{ (\alpha, \alpha \oplus \theta) \mid \alpha \in V_8, \theta \in \{ \gamma, \gamma^{a_3}, \gamma^{a_3^2}, \gamma^{a_3^3} \} \}, & \text{если } \gamma \in B_8^{(2)}, \\ \{ (\alpha, \alpha \oplus \theta) \mid \alpha \in V_8, \theta \in \{ \gamma, \gamma^{a_3} \} \}, & \text{если } \gamma \in B_8^{(1)}, \\ \{ (\alpha, \alpha \oplus \gamma) \mid \alpha \in V_8 \}, & \text{если } \gamma \in B_8^{(0)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, если $\gamma \in B_8^{(0)}$, то граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ состоит из 2^7 компонент связности из двух вершин каждая и $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)) = S_{2^7} \wr S_2$. Если же $\gamma \in B_8^{(1)}$, то граф $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ состоит из 2^6 изоморфных компонент связности из четырех вершин каждая. Метрика графа каждой компоненты связности изоморфна метрике Хемминга χ_2 . Кроме того, $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)) = S_{2^6} \wr D_4$, где D_4 — группа диэдра.

Поскольку $a_3^8 = e$, то $a_3 \in UT_n$. В силу следствия 3:

- Для $\gamma \in A_8^{(7)}$ метрика графа $\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)$ изоморфна метрике Хемминга, и $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)) = S_2 \uparrow S_8$. Имеется 16 графов орбиталов, изоморфных графу Хемминга.
- Для $\gamma \in A_8^{(6)}$ имеется 8 графов орбиталов, состоящих из двух компонент связности, у которых число линейно независимых векторов в множестве $\gamma^{\langle a_3 \rangle}$ равно 7.
- Для $\gamma \in A_8^{(5)}$ имеется 4 изоморфных графа орбиталов, состоящих из четырех компонент связности, у которых число линейно независимых векторов в множестве $\gamma^{\langle a_3 \rangle}$ равно 6.
- Для $\gamma \in A_8^{(4)}$ имеется два изоморфных графа орбиталов, состоящих из 8 компонент связности, у которых число линейно независимых векторов в множестве $\gamma^{\langle a_3 \rangle}$ равно 5.

4. У матрицы Адамара типа 2

$$a_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

характеристический многочлен есть $u_{a_4}(x) = (x \oplus 1)^8$. Матрица a_4 приводима, $a_4^2 = e$. Все графы орбиталов не связны.

Положим $B_8^{(0)} = \{\alpha \in V_8^\times \mid \alpha a_4 = \alpha\}$. Если $\gamma \in B_8^{(0)}$, то граф орбитала состоит из 2^7 компонент связности, число вершин в каждой компоненте связности равно двум, и $\text{Aut}(\bar{\Gamma}_{(\vec{0}, \gamma)}(g)) = S_{2^7} \wr S_2$. Если же $\gamma \in V_8^\times \setminus B_8^{(0)}$, то граф орбитала состоит из 2^6 компонент связности, число вершин в каждой компоненте связности равно 4. Метрика графа каждой компоненты связности изоморфна метрике Хемминга χ_2 . Кроме того, $\text{Aut}(\Gamma_{(\vec{0}, \gamma)}(g)) = S_{2^6} \wr D_4$, где D_4 — группа диэдра.

5. У циркулянтной матрицы

$$a_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

характеристический многочлен есть $u_{a_5}(x) = (x \oplus 1)^8$. Матрица a_5 приводима, $a_5^2 = e$. Ситуация в этом случае описывается так же, как в случае 3.

Список литературы

1. Погорелов Б. А. Основы теории групп подстановок. — М.: 1986.
2. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А. Алгебра. Т. 2. — М.: Гелиос АРВ, 2003.

3. *Godsil C., Royle G.* Algebraic Graph Theory. — Springer-Verlag, 2001.
4. *Погорелов Б. А., Пудовкина М. А.* Свойства графов орбиталов надгрупп группы Джевонса // Математические вопросы криптографии. — 2010. — Т. 1. Вып. 1 — С. 55-83.
5. *Погорелов Б. А.* Подметрики метрики Хемминга и теорема А.А. Маркова // В сб. : Труды по дискретной математике. Т. 9. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — С. 190–219.
6. *Погорелов Б. А., Пудовкина М. А.* Подметрики Хемминга и их группы изометрий // В сб. : Труды по дискретной математике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — Т. 11. Вып. 2. — С.147–191.
7. *Deza M., Deza E.* Encyclopedia of Distances. — Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
8. *Баннаи Э., Ито Т.* Алгебраическая комбинаторика. — М.: Мир, 1987.
9. *Погорелов Б. А., Пудовкина М. А.* Натуральные метрики и их свойства. Ч. 1. Подметрики и надметрики // Математические вопросы криптографии. — 2011. — Т. 2. Вып. 4. — С. 47–76.
10. *Погорелов Б. А., Пудовкина М. А.* Натуральные метрики и их свойства. Ч. 2. Случай метрик Хемминга // Математические вопросы криптографии. — 2012. — Т. 3. Вып. 1. — С. 71–95.
11. *Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Комбинаторика неотрицательных матриц. — М. : ТВП, 2000.
12. *Choy J., Khoo K.* New applications of differential bounds of the SDS structure // ISC'08. — 2008.
13. *Kanda M., Moriai S., Aoki K., Ueda H., Takashima Y., Ohta K., Matsumoto T.* E2 — A New 128-bit Block Cipher // IEICE Trans. Fund. — Spec. Sect. on Cryptography and Inf. Security. — 2000. — V. E83-A , No. 1. — P. 48–59.
14. *Daemen J.* Cipher and hash function design strategies based on linear and differential cryptanalysis. — PhD. — K. U. Leuven, 1995.
15. *Глухов М. М.* О рассеивающих линейных преобразованиях для блочных шифрсистем // Математические вопросы криптографии. — 2011. — Т. 2. Вып. 2. — С. 5–40.